

TRÖÖØNG ÑÄI HOÏC QUÝ NHÖN
KHOA TOAÙN

-----!-----

Nhòum sinh vieân thöïc hieän:
Voõ Thò Nguyeät (Nhòum
trööûng)

Nguyeän Thò Nhung
Traàn Thò Nhung
Leä Thanh Nhööõng
Phan thò Myõ Nööng
Ñoaøn Thanh Phong
Traàn Thanh Phong(1987)

Teân ñeà taøi:

“HÖÖNG TRÌNH MUỖ
G PHAÙP ÑAÙNH GIAÙ”

Giaùo Vieân Hööùng Daãn : DƯÖNG THANH VỸ

Quy Nhôn /11/2009

Lôøi noui ñaàu

Phồông trình muỗ laø moät maùng ñeà taøi khaù thuù vò vùi nhieàu phồông phaùp giaù ñaéc saéc . Ngoøai nhöõng phồông phaùp giaù thuaàn tuùy nhö: bieán ñoài töông ñöông, ñaët aân phuï, ñöa veà cuøng cô soá, logarit hai veá, baèng caùch ñaùng giaù phồông trình döïa treân : tính chaát haøm soá muỗ; tính chaát giaù tò tuyeät ñoái; tam thöùc baäc hai, caùc baát ñaúng thöùc cô baùn... ta coù theå nhanh choùng chæ ra ñöôïc nghòeâm cuûa baøi toaùn. Phồông phaùp naøy ñaéc bieät coù hieäu quaù ñoái vùi nhöõng phồông trình khoâng maõu möïc hay nhöõng phồông trình ta khoâng theå giaù baèng caùc phồông phaùp thoâng thồøng hoaëc seù gaëp nhieàu khoù khaên.

Ñeà baïn ñöïc khoâng coøn aùi ngaïi trong vieäc löïa choïn phồông phaùp giaù khi ñöùng tröôùc moät phồông trình khoâng maõu möïc, nhöùm chuùng toài xin giöùu thieäu ñeà taøi “ **Giaù phồông trình muỗ baèng phồông phaùp ñaùng giaù**” . Ôù ñaây chuùng toài toång hõp vaø ñöa ra nhöõng ví dụ ñieän hình ñöïc saép xeáp töø ñôn giaù ñeán phöùc taïp theo töøng daïng ñaùng giaù cuï theå thồøng gaëp. Sau moãi ví dụ hoaëc sau moãi daïng ñaùng giaù chuùng toài coù ñöa ra nhaän xeùt vaø höùung ñi, höùung phaùt trieån cho baøi toaùn ñeà baïn ñöïc tieän tham khaùo vaø naém baét moät caùch deã daøng.

Ñeà taøi cuûa chuùng toài goàm 4 phaàn, moãi phaàn laø moät daïng cuûa phồông phaùp ñaùng giaù:

- Daïng 1: Ñaùng giaù döïa vaøo tính chaát haøm soá muỗ.
- Daïng 2: Ñaùng giaù döïa vaøo caùc baát ñaúng thöùc cô baùn.
- Daïng 3: Ñaùng giaù döïa vaøo tính chaát haøm soá chöùa giaù trò tuyeät ñoái.
- Daïng 4: Ñaùng giaù döïa vaøo tam thöùc baäc hai.

Hy voïng ñeà taøi naøy laø taøi lieäu thieát thöïc cho vieäc oân taäp reøn luyeän kyõ naêng giaù toaùn phuïc vuï caùc baïn trong caùc kyø thi.

Chuùc caùc baïn may maén vaø hoïc taäp toát hôn!

Nhóm thực hiện

Môu ñaàu

Phöông trình muõ:

Phöông trình muõ cô baân coù daïng

$$a^x = b, (a > 0; a \neq 1).$$

1. Haøm soá $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) goïi laø haøm soá muõ cô soá a .

2. Caùc tính chaát

$$. a^0 = 1$$

$$. 1^x = 1$$

$$. a^x > 0, \forall a > 0, a \neq 1$$

$$. a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

$$. \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

$$. (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$$

$$. a^x b^x = (a.b)^x$$

$$. \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b} \right)^x$$

$$. a > 1 \text{ Vôùi } x_1 > x_2 \text{ thì } a^{x_1} > a^{x_2}$$

$$. 0 < a < 1 \text{ Vôùi } x_1 > x_2 \text{ thì } a^{x_1} < a^{x_2}$$

* chuỷùi

$$. a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a - 1)[f(x) - g(x)] > 0$$

$$. \text{Phöông trình } [f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} [f(x) - 1][g(x) - h(x)] = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Đãing 1: ÑÀÙNH GIAÙI DÖÏA TREÂN TÍNH CHAÁT HAØM SOÁ MUÛ.
(Phöông Trình Muõ)

1. Phöông phaùp chung : Giaûi phöông trình $f(x) = g(x)$

Xeùt treân taäp xaùc ñònh D ta coù

$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ g(x) \leq m, \forall x \in D \end{cases}$$

Khi ñoù phöông trình thoûa maõn khi $\begin{cases} f(x) \leq m \\ g(x) \leq m \end{cases}$

☆ Ví dụ minh hoïa :

Ví dụ 1:[4] Giaûi phöông trình : $3^{x^2} = \cos(2x)$

Giaûi:

Xeùt phöông trình: $3^{x^2} = \cos(2x)$

Ta coù haï xeùt:

$$x^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3^{x^2} \geq 3^0 = 1; \forall x \in \mathbb{R}$$

Vaø $\cos(2x) \leq 1; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Do ñoù } 3^{x^2} = \cos(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x) = 1 \\ 3^{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vaø phöông trình coù nghieäp laø $x = 0$

Ví dụ 2:[4] Giaûi phöông trình:
 $2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} + 5^{x^2} = 4^{1-x^2}$

Giaûi:

Ta coù haï xeùt $x^2 \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{neä } 2^{x^2} \geq 2^0 = 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3^{x^2} \geq 3^0 = 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4^{x^2} \geq 4^0 = 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$5^{x^2} \geq 5^0 = 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{vaø } 4^{1-x^2} \leq 4 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} V_{\text{eátraû}} \geq 4 \\ V_{\text{eátraû}} \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Do ño} \quad V_{\text{eátraû}} = V_{\text{eáphaû}} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{\text{eátraû}} = 4 \\ V_{\text{eáphaû}} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Keá luaä : Phöông trình ñaã cho cöùng hieän laø $x=0$

Ví dụ 3: [3] Giaûi phöông trình :

$$4^{\sin(x)} - 2^{1+\sin(x)} \cos(xy) + 2^{|y|} = 0$$

Giaûi:

$$\text{Xeù phöông trình : } 4^{\sin(x)} - 2^{1+\sin(x)} \cos(xy) + 2^{|y|} = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[2^{\sin(x)} - \cos(xy) \right]^2 + \left[2^{|y|} - \cos^2(xy) \right] = 0 \quad (2)$$

Ta nhaän thaáy raøg:

$$2^{|y|} - \cos^2(xy) \geq 0 \quad ; \quad (\text{V} \text{ì } 2^{|y|} \geq 1 \text{ vaø } \cos^2(xy) \leq 1)$$

$$\text{vaø } \left[2^{\sin(x)} - \cos(xy) \right]^2 \geq 0$$

$$\text{Do ño} \quad \text{ta coù } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|y|} - \cos^2(xy) = 0 & (3) \\ 2^{\sin(x)} - \cos(xy) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Xeù phöông trình (3) : } 2^{|y|} - \cos^2(xy) = 0$$

$$\text{Ta nhaän xeù : } \begin{cases} 2^{|y|} \geq 1 \\ \cos^2(xy) \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Do ño} \quad (3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|y|} = 1 \\ \cos^2(xy) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$$

$$\text{Thay } y=0 \text{ vaø phöông trình (4) ta ñöôc : } 2^{\sin(x)} - 1 = 0$$

$$\text{Phöông trình töông ñöông : } 2^{\sin(x)} = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Keá luaä : Phöông trình ñaã cho cöùng hieän laø } \begin{cases} x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$$

Nhàñ xèùt: Trong càùc ví dũi trên , bàèng vieäc ñàùnh giaù möät càùch ràät tinh teá càùc toàùn töù trong phöông trình , ta ñã nhanh choùng tìm ñöôïc nghiã cuûa baøi toàùn möät càùch deä dàng. Ñây laø phöông phaùp duøng ñeä ñàùnh giaù phöông trình muõ ràät hay.

Söù duøng càùc tính chaát caùu haøm soá ñeä giaù phöông trình laø möät daïng khaù quen thuoäc . Noái vöù phöông trình muõ tính chaát ñeä tröng cuûa nó laø tính ñôn ñieäu. Ñây cuõng laø möät maùng ràät thuù vò. Ta coù 3 höôùng aùp duøng sau:

- **Höôùng 1:** Thöïc hieän theo càùc böôùc:

Böôùc 1: Chuyeån phöông trình veä daïng $f(x)=k$

Böôùc 2: Xeùt haøm soá $y=f(x)$

Duøng laäp luaän khaùg ñònh haøm soá ñôn ñieäu(giaù söù ñoàng bieán)

Böôùc 3: Nhàñ xèùt

. Vôùx $\Rightarrow$ x₀ $\Leftrightarrow f(x)=f(x_0)=k$, do ñoùx₀ laø nghiã

. Vôùx $\lt$ x₀ $\Leftrightarrow f(x) < f(x_0)=k$, do ñoùphöông trình voàng hieän

. Vôùx $\gt$ x₀ $\Leftrightarrow f(x) > f(x_0)=k$, do ñoùphöông trình voàng hieän

Keá luaä: Phöông trình coù nghiã duy nhaát laøx $\Rightarrow$ x₀

- **Höôùng 2:** Thöïc hieän theo càùc böôùc:

Böôùc 1: Chuyeån phöông trình veä daïng $f(x)=g(x)$

Böôùc 2: Xeùt haøm $y=f(x)$ vaø $y=g(x)$

Duøng laäp luaän khaùg ñònh $y=f(x)$ laø ñoàng bieán, coøn haøm $y=g(x)$ laø nghòch bieán hoaëc laø haøm haèng.

Xaùc ñònh x₀ sao cho $f(x_0)=g(x_0)$.

Böôùc 3: Vaäy phöông trình coù nghiã duy nhaát : x $\Rightarrow$ x₀

- **Höôùng 3:** Thöïc hieän theo càùc böôùc:

Böôùc 1: Chuyeån phöông trình veä daïng $f(x) = f(v)$

Böôùc 2: Xeùt haøm soá $y=f(x)$

Duøng laäp luaän khaùg ñònh haøm ñôn ñieäu.

Khi ñoù $f(x)=f(v) \Leftrightarrow u=v ; \forall u,v \in D$

☆ Ví dũi minh hoä :

Ví dũi 4: [4] Giaù phöông trình : $3^x + 4^x = 5^x$ (1)

Giaù: Phöông trình $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Cách 1: ta có nhận xét $x=2$ là nghiệm của phương trình

$$* \text{ Với } x > 2, \text{ ta có } \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{và } \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

Vậy với mọi $x > 2$ không là nghiệm của phương trình

$$* \text{ Với } x < 2, \text{ ta có } \left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{và } \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

Vậy với mọi $x < 2$ không là nghiệm của phương trình

Kết luận: $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Cách 2: Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$

$$\text{Ta có } f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Hơn nữa, ta thấy $f(2)=1$

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Ví dụ 5: [3] Giải phương trình : $6^x - 2^x = 32$

Giải:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 32 + 2^x = 6^x$$

$$\Leftrightarrow 32 \left(\frac{1}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$$

Nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình

$$* \text{ Với } x > 2, \text{ ta có } \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{và } 32 \left(\frac{1}{6}\right)^x < 32 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow 32\left(\frac{1}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x < 1$$

Vậy mọi $x > 2$ không phải là nghiệm của phương trình

$$* \text{ Với } x < 2, \text{ ta có } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{vậy } 32\left(\frac{1}{6}\right)^x > 32\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow 32\left(\frac{1}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$$

Vậy mọi $x < 2$ không phải là nghiệm của phương trình

Kết luận: $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Ví dụ 6: [4] Giải phương trình: $x + 2.3^{\log_2 x} = 3$

Giaûi:

Điều kiện $x > 0$

$$\text{Biến đổi phương trình về dạng } 2.3^{\log_2 x} = 3 - x \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(x) = 2.3^{\log_2 x}$$

$$g(x) = 3 - x$$

Ta thấy $f(x)$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+$,

$g(x)$ là hàm giảm trên $\mathbb{R}^+$

Do vậy nếu (1) có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

$$\text{Ta lại thấy } x = 1 \text{ là nghiệm của phương trình vì } 2.3^{\log_2 1} = 3 - 1$$

Kết luận: Phương trình có duy nhất nghiệm $x = 1$

Ví dụ 7: [6]

$$\text{Giải phương trình: } |2009 - x|^{2010} + |2010 - x|^{2009} = 1 \quad (1)$$

Giaûi:

Ta dễ dàng thấy $x = 2009$ và $x = 2010$ là nghiệm của phương trình

$$* \text{ Nếu } x < 2009 \Rightarrow |2009 - x|^{2010} > 0 \text{ và } |2010 - x|^{2009} > 1$$

$$\text{Suy ra } |2009 - x|^{2010} + |2010 - x|^{2009} > 1$$

Vậy mọi $x < 2009$ không phải là nghiệm của phương trình

* Nếu $x > 2010 \Rightarrow |2009 - x|^{2010} > 1$ và $|2010 - x|^{2009} > 0$

Suy ra $|2009 - x|^{2010} + |2010 - x|^{2009} > 1$

Vậy mọi $x > 2010$ không phải là nghiệm của phương trình

* Nếu $2009 < x < 2010$ ta có

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (x - 2009)^{2010} + (2010 - x)^{2009} = 1$$

Ta xét hàm số $f(x) = (x - 2009)^{2010} + (2010 - x)^{2009}$ ta thấy rằng:

$$(x - 2009)^{2010} < x - 2009$$

$$(2010 - x)^{2009} < 2010 - x$$

$$\text{Suy ra } (x - 2009)^{2010} + (2010 - x)^{2009} < 1$$

Vậy phương trình vô nghiệm

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2009$ và $x = 2010$

* **Chú ý :** Trong phương pháp trên ta đã sử dụng hai mệnh đề sau:

+ **Mệnh đề 1:** Xét phương trình $f(x) = a$ trong đó $f(x)$ luôn tăng hoặc giảm (hoặc nghịch biến) trên tập xác định của phương trình khi đó phương trình có nghiệm duy nhất.

+ **Mệnh đề 2:** Xét phương trình $f(x) = g(x)$, trong đó $f(x)$ luôn tăng hoặc giảm (hoặc nghịch biến) và $g(x)$ luôn tăng hoặc giảm (hoặc nghịch biến) trên miền xác định của phương trình thì khi đó phương trình có nghiệm duy nhất.

Một cách tổng quát: Nếu hàm số $f(x) = h$ có m khoảng thì hàm số có nhiều nhất là m nghiệm.

Ta xét thêm một ví dụ nữa:

Ví dụ 8: Giải phương trình : $3^{2x} + 4^{2x} = 5^{2x}$

Giaûi:

Hoặc ta có thể áp dụng phương pháp trên như sau:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} = 1$$

Ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình

và đơn điệu Vẽ đồ thị hàm nghịch biến

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất

* Tóm tắt toàn bộ ta học toán có thể mô tả như sau :

Giải phương trình : $a^x + b^x = (a+b)^x$; $a, b > 0$

Khi nào phương trình có thể áp dụng phương pháp nhân giả thiết trên

Tổng quát: $\sum_{i=1}^n a_i^x = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^x$; $a_i > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$

🐾 **Bài tập nhà nghề:**

Giải các phương trình sau :

1, $3^x + x - 4 = 0$

2, $3.4^x + (3x - 10).2^x + 3 - x = 0$

3, $x^2 + (2^x - 3)x + 2(1 - 2^x) = 0$

4, $2^{2x-1} + 3^{2x} + 5^{2x+1} = 2^x + 3^{x+1} + 5^{x+2}$

5, $x^3 + 2^{3x} + 3^x.2^{2x} + (1 + 3x^2)2^x + x - 2 = 0$

6, $(2 + \sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2 + \sqrt{2})^{\cos^2 x} + (2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\cos 2x}$

Dạng 2 : NHẬN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG CÁCH BẮT NHẬN THỰC CỐ BẮN

Treân này , chúng tôi này trình bày những bài toán nhận giải nhằm có thể sử dụng phương pháp nhận giải để giải toán phương trình mũ một cách nhanh chóng , dễ hiểu. Tuy nhiên ta cũng này sử dụng khéo léo một số bất đẳng thức thông dụng gặp như Côsi, Bunhiacôpxki, Bernoulli..... để giải quyết những bài toán phức tạp

1. Một số nét chính của các bất đẳng thức

1. Bất đẳng thức Côsi :

Với mọi số thực khác 0 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

2. Bất đẳng thức Bernoulli : là một bất đẳng thức cho phép tính gần đúng của lũy thừa $1+x$, bất đẳng thức này có thể phát biểu như sau:

$$(1+x)^x \geq 1+rx \quad \begin{cases} \forall r \geq 0 \\ x > -1 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Nếu số mũ x thì bất đẳng thức này đúng với mọi x .

Bất đẳng thức này trở thành bất đẳng thức nghiệm gần như sau

$$(1+x)^x > 1+rx \quad \begin{cases} \forall r \geq 2 \\ x > -1 \quad \text{với } x \neq 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. Bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

Với 2 dãy số thực tùy ý $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ ta luôn có bất đẳng thức:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ là 2 bội của

hàm số tại số thực k nếu $a_i = k b_i$, $\forall i = \overline{1, n}$

☆ Moät soá ví duï minh hoïa

Ví duï 1: Giaû phöông trình: $\sqrt[3]{8-x^2} = 3^x + 3^{-x}$

Giaûi:

Ñieàu kieä : $\forall x \in \mathbb{R}$

Ta coùnhaä xeù: $VT = \sqrt[3]{8-x^2} \leq \sqrt[3]{8} = 2$

$$VP = 3^x + 3^{-x} \stackrel{\text{Coäi}}{\geq} 2\sqrt{3^x 3^{-x}} = 2$$

$$\text{Suy ra } VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3^x = 3^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vaä phöông trình coùnghiän duy nhaäx=0

Ví duï 2: Giaû phöông trình: $\sqrt{(4-x)(x-2)} = \frac{1}{2}(5^x + 5^{-x})$

Giaûi:

Ñieàu kieä: $x \in [2, 4]$

Ta coù $VT = \sqrt{(4-x)(x-2)} \stackrel{\text{Coäi}}{\leq} \frac{4-x+x-2}{2} = 1$

$$VP = \frac{1}{2}(5^x + 5^{-x}) \stackrel{\text{Coäi}}{\geq} \frac{1}{2}\sqrt{5^x + 5^{-x}} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } VT = VP &\Leftrightarrow \begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x = x-2 \\ 5^x = 5^{-x} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Khoâng toà tại } x \end{aligned}$$

Vaä phöông trình voànghiän

Nhaän xeù: Vôùi nhöõng baøi toaùn nhö ví duï 1, ví duï 2 thì söû duïng phöông phaùp ñaùnh giaù döïa vaøo baát ñaúng thöïc laø caùch raát hay vaø ngaén goïn trong lôøi giaûi. Neáu nhö ôû ví duï 1 ta coù theä söû duïng phöông phaùp ñôn ñieäu ñeä tìm ra nghiäm cuûa baøi toaùn thì sang ví duï 2 haàu nhö khoâng coù phöông phaùp naøo khaùc phöông phaùp ñaùnh giaù baøi toaùn ñoù.

Ví dụ 3:[4] Giải phương trình: $3^{\frac{25x+3}{5}} - 5 \cdot 3^{3x} + 2\sqrt[5]{27} = 0$

Giaûi:

Đặt $t = 3^x$, thì khi $t > 0$ thì phương trình có dạng:

$$t^5 \cdot \sqrt[5]{27} - 5t^3 + 2\sqrt[5]{27} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{2}{t^3} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

Nhân xét:

$$VT = \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^5} \geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}t^2\right)^3 \cdot \frac{1}{t^6}} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

$$\text{Vậy ta có } \frac{1}{3}t^2 = \frac{1}{t^3} \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{1}{5}$$

Nhận xét: Không phải lúc nào chúng ta cũng có thể nhận ra ngay rằng một bài toán nào đó là sử dụng phương pháp nhân giữa các số để biến đổi các số về cùng một dạng rồi sử dụng bất đẳng thức để giải. Vì vậy, chúng ta cần phải tìm ra nghiệm.

Ví dụ 4:[4] Giải phương trình: $\frac{2^x}{4^x + 1} + \frac{4^x}{2^x + 1} + \frac{1}{2^x + 4^x} = \frac{3}{2}$

Giaûi:

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2^x \\ b = 4^x \end{cases}; a, b > 0$$

Khi đó phương trình trở thành: $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{1}{a+b} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } VT &= \left(\frac{a}{b+1} + 1 \right) + \left(\frac{b}{a+1} + 1 \right) + \left(\frac{1}{a+b} + 1 \right) - 3 \\ &= \frac{a+b+1}{b+1} + \frac{a+b+1}{a+1} + \frac{a+b+1}{a+b} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[(b+1)+(a+1)+(a+b)] \left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+b} \right) \stackrel{\text{Cöa}}{\geq} \\
&\frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt[3]{(b+1)+(a+1)+(a+b)} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(b+1)+(a+1)+(a+b)}} - 3 \\
&\geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} = VP \\
&\text{Suy ra } VT = VP \Leftrightarrow a+1=b+1=a+b \\
&\Leftrightarrow a=b-1 \Leftrightarrow 2^x=4^x=1 \Leftrightarrow x=0 \\
&\text{Vậy } x=0 \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình.}
\end{aligned}$$

Nhận xét: Rất nhiều học sinh nhầm tưởng rằng có thể giải bài toán bằng cách sử dụng bất đẳng thức $t=2^x$. Tuy nhiên khi đó ta sẽ nhận được một phương trình bậc 6, mà phương trình bậc 6 thì hầu như chưa có một phương pháp giải cụ thể nào.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\frac{3^x}{5^x+1} + \frac{5^x}{3^x+1} + \frac{1}{3^x+5^x} = \frac{3}{2}$

Làm một cách thông minh, sử dụng phương pháp trên ta tìm được nghiệm duy nhất $x=0$.

Nhận xét:

- Ví dụ 4, ví dụ 5 nêu xuất phát từ một bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad (\text{Bất đẳng thức này được chứng minh nhờ cách làm ô vế ví dụ 4})$$

- Việc ra bài tập cho dạng này giúp học sinh biết được bất đẳng thức Côsi thật đơn giản nếu bạn biết một số bất đẳng thức được chứng minh từ bất đẳng thức Côsi. Lúc đó bạn quy bất đẳng thức về dạng mẫu số nhỏ (Vì bất đẳng thức Côsi áp dụng cho những số không âm và dạng mẫu số nhỏ những số dương nên chúng liên hệ với nhau được)

➤ **Một số bài tập tối giản:**

1) Giải phương trình: $\sqrt[4]{16-x^2} = 2^x + 2^{-x}$

(Nhập số $x=0$)

2) Giải phương trình: $\frac{2^x}{m^2 4^x + 1} + \frac{4^x}{m^2 2^x + 1} + \frac{1}{m^2 4^x + 2^x} = \frac{3}{2}$

(Nhập số $x=0$)

Ví dụ 6: [4] Giải phương trình: $3^x + 2^x = 3x + 2$

Giai:

Theo bất đẳng thức Bernoulli ta có

* Với $x \geq 1$ hoặc $x < 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3^x \geq 2x + 1 \\ 2^x \geq x + 1 \end{cases} \Rightarrow 3^x + 2^x \geq 3x + 2$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $x=1$.

* Với $x \in (0;1)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3^x < 2x + 1 \\ 2^x < x + 1 \end{cases} \Rightarrow 3^x + 2^x < 3x + 2$$

Phương trình vô nghiệm.

Kết luận: VPT phương trình có nghiệm $x=0$ và $x=1$.

Ví dụ 7:[4] Giải phương trình: $9^{|x|} + 3^{|x|} = 10x + 2$

Giai:

Theo bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$\text{* Với } x \geq 1 \text{ ta có } \begin{cases} 9^{|x|} = 9^x \geq 8x + 1 \\ 3^{|x|} = 3^x \geq 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 9^{|x|} + 3^{|x|} \geq 10x + 2$$

Bất đẳng thức xảy ra khi $x=1$

* Với $x < 0$ ta có

$$\begin{cases} 9^{|x|} = 9^{-x} \geq -8x + 1 \geq 8x + 1 \\ 3^{|x|} = 3^{-x} \geq -2x + 1 \geq 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 9^{|x|} + 3^{|x|} \geq 10x + 2$$

Bất đẳng thức xảy ra khi $x=0$

$$\text{* Với } x \in (0;1) \text{ ta có } \begin{cases} 9^{|x|} = 9^x < 8x + 1 \\ 3^{|x|} = 3^x < 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 9^{|x|} + 3^{|x|} < 10x + 2$$

Phương trình vô nghiệm nếu $x \in (0;1)$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x=0$ và $x=1$.

Nhận xét: Qua ví dụ 6, ví dụ 7 ta thấy nếu gặp bài toán có dạng:

$a^x + b^x = cx + 2$ ($a, b > 0; c = a + b - 2$) thì phương pháp Bernoulli nổi lên đầu tiên để giải hiệu quả nhất bằng cách nhận ra nó theo tổng trọng hợp giống như trên.

Ví dụ 8:[4] Giải phương trình: $3^x = 2x - 1$

Giai:

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 3^x + (1-3)x = 1 \stackrel{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=0$ và $x=1$.

Nhận xét: Không phải bài toán nào ta cũng nhìn ra cách áp dụng bất đẳng thức Bernoulli mà trong trường hợp cụ thể có thể chuyển bài toán về dạng: $a^{f(x)} + (1-a)f(x) = 1$ ($a > 1$). Khi đó ta xác định được:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Giải phương trình tìm nghiệm}$$

🐾 **Một số bài toán tìm giá trị:**

- 1) Giải phương trình: $5^x = 4x + 1$
- 2) Giải phương trình: $3^x + 5^x = 6x + 2$
- 3) Giải phương trình: $7^x + 5^x = 10x + 2$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $(2+\sqrt{3})^{\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}} = 7+4\sqrt{3}$

Giaûi:

Điều kiện $3 \leq x \leq 5$

$$\text{Ta có } \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2)(x-3+5-x)} = 2$$

$$\text{Suy ra VT } \leq (2+\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3} = \text{VP}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-3=5-x \Leftrightarrow x=4$

Vậy $x=4$ là nghiệm của phương trình

Nhận xét: Ở bài toán trên chúng ta có thể quy về giải phương trình vô tỉ $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = 2$ bằng cách bình phương hai vế không sẽ không đỡ nhanh chóng nhờ áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski.

Ví dụ 11: Giải phương trình:

$$(1+\sqrt{2})^{\sin x + \sqrt{2} \cos x} = (1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (1), x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Giaûi:

$$(1) \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nhận xét phương trình thuận nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$. Chúng ta có thể sử dụng phương pháp giải bài toán bằng cách đặt ẩn phụ hoặc đặt ẩn phụ. Với một chút biến đổi nhỏ sẽ sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski chúng ta dễ dàng tìm ra nghiệm của nó.

$$\text{Ta có } \sin x + \sqrt{2} \cos x = \sin x + \cos x + (\sqrt{2} - 1) \cos x$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2)(\sin x + \cos x)} + (\sqrt{2} - 1) \cos x \\ & \leq \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{Vì } \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ thì } 0 \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ & \leq \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{VP} \end{aligned}$$

Những thời xảy ra khi va chạm:

$$\begin{cases} \sin x = \cos x \\ \cos x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $x = \frac{\pi}{4}$ là nghiệm.

Nhây là một số ví dụ thông gặp khi giải phương trình mũ khi các phương pháp khác không đem lại kết quả tối ưu thì bắt những thời là công cụ hiệu quả nhất.

**Đãing 3: ÑÀÙNH GIAÙ PHỒÔNG TRÌNH MUỐ BAÈNG
CAÙC TÍNH CHAÁT
HAØM CHÖÙA ĐAÁU TRÒ TUYEÁT ÑOÁI**

1. Ñòngh nghóa :

$$a^{|x|} + b^{|x|} = (a + b - 2)x = 2 \quad (a, b \text{ là hai sô sô})$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

2. Caùc tính chaát:

$$* |a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$* |a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$* |a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

$$* |a - b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) \geq 0$$

Ví dụi 1:[5] Giaùphồông trìngh: $3^{|4x-4|} = 81^{(x-1)}$

Giaùii:

$$X \in \mathbb{R} \quad 3^{|4x-4|} = 81^{(x-1)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3^{|4x-4|} = 3^{4(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow |4x-4| = 4(x-1) \quad (1)$$

$$X \in \mathbb{R} \quad 4x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ thì (1) thoã}$$

$$4x-4 < 0 \quad (\text{loãi})$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ thì } 4x+4 = 4x-4 \quad (\text{loãi})$$

Vaây $x \geq 1$ là nghiệm của phồông trìngh (1).

Ví dụi 2: Giaùphồông trìngh: $(2 + \sqrt{3})^{|2-x|+|x+1|} = 26 + 15\sqrt{3}$

Giaùii:

$$\text{Giaùphồông trìngh: } (2 + \sqrt{3})^{|2-x|+|x+1|} = 26 + 15\sqrt{3}$$

$$\text{Phồông trìngh} \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{|2-x|+|x+1|} = (2 + \sqrt{3})^3$$

$$\Leftrightarrow |2-x|+|x+1| = 3 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } |2-x|+|x+1| \geq |2-x+x+1| = 3 = \text{VP}$$

$$\text{Ñáng thồu sây ra} \Leftrightarrow (2-x)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

Vaây $x \in [-1; 2]$ là nghiệm.

Nhà ãn xeùt: ÔÙ ví ðui treân töø (*) neáu baèng caùch môù ðaáu giaù trò ñoái thì chuùng ta cuõng giaù queát ñoïc baøi toaùn nhöng noù seõ raéc roái hôn. Neáu yù moät chuùt chuùng ta söù ðuùng baát ñaúng thöùc trò tuyeät ñoái $|a+b| \leq |a| + |b|$ thì baøi toaùn trôù neân ðeå ðaøng hôn.

* **Toaùng quaùt cho ðaïng toaùn naøy:**

$$a^{|\alpha - f(x)| + |f(x) + \beta|} = b \quad (vôùi b = a^y)$$

Ví ðui 3:[5]

Giaùphöông trình : $(1 + \sqrt{3})^{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-2}} = 6 + 2\sqrt{5}$

Giaù: _____

$$\text{Phöông trình} \Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})^{\sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2}} = (1 + \sqrt{3})^2 -$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1| - |\sqrt{x-2}-1| = 2$$

$$\text{Ta coù } T = |\sqrt{x-2}+1| - |\sqrt{x-2}-1| \leq |\sqrt{x-2}+1 - \sqrt{x-2}-1| = 2 = VP$$

$$\text{Ñaúng thöùc xaây ra} \Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-1)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1 > 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Vaây phöông trình coùngheän $x \geq 3$.

***Chuù yù:** Raát nhieàu hoïc sinh khi giaù baøi toaùn naøy chæ thu ñoïc ngheäm $x=3$.

* **Toaùng quaùt cho ðaïng naøy :**

$$a^{|f(x)+\alpha| + |f(x)-\beta|} = b \quad (b=a^y)$$

$$\text{Söù ðuùng tính chaát } |a| - |b| \leq |a-b|$$

$$\text{Ñaúng thöùc xaây ra khi } b(a-b) \geq 0.$$

Ví ðui 4:[6] Tìm taát caù caùc caëp soá thöïc x,y thoùa :

$$3^{|x^2-2x-3| - \log_3 5} = 5^{-(y+4)} \quad (1)$$

$$\text{vaây } |y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \quad (2)$$

Giaù:

$$\text{Ta có } 5^{-(y+4)} = 3^{|x^2 - 2x - 3| - \log_3 5} \geq 3^{-\log_3 5} = 5^{-1}$$

Suy ra $y \leq -3$ (*)

$$\text{Từ (2) ta có } y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $y = -3$

$$\text{Thế vào (1) suy ra } \begin{cases} x = -1; \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

Nhận xét: Sai làm thông gặp ôu đang bài này là:

- Hoic sinh sẽ khôu giâu trò tuyeät ñoái cuôa (2) ñaân ñeân bài toaøn này ñaõi vaø khôu ñình hôông tieáp theo.
- Ñây là một trong nhôõng bài toaùn khôu ñình hôông cho hoic sinh nếu nhô khôông bieát caùch so saùnh ñeõ suy ra $y \leq -3$.

Ví dụ 5: Giâuphông trình: $3^{|\sin \sqrt{x}|} = |\cos x|$

Giaûi:

Ñieàu kieän: $x \geq 0$

$$\text{Do } |\sin \sqrt{x}| \geq 0 \text{ nên } 3^{|\sin \sqrt{x}|} \geq 1; |\cos x| \leq 1$$

$$\text{Suy ra: } 3^{|\sin \sqrt{x}|} = |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \sqrt{x} = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = k\pi \\ x = h\pi \end{cases} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k^2 \pi^2 \\ x = h\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = k^2 \pi \\ x = k^2 \pi \end{cases}, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ h = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Vaø nghiênn cuâ phông trình là $x = 0$

Nhận xét: Khi gặp phông trình muõ ñaĩng ví dụ 3 ta nên ñuøng caùch ñaĩnh giâu trên ñeõ giaûi vì nó

lieân quan ñeân haøm $\sin x$ vaø $\cos x$ mà $\begin{cases} |\sin x| \leq 1 \\ |\cos x| \leq 1 \end{cases}$

Ví dụ 6: Giâuphông trình: $8^{|x|} + 2^{|x|} = 8x + 2$

Giaûi:

Giải phương trình : $8^{|x|} + 2^{|x|} = 8x + 2$

Theo bất đẳng thức Bernoulli ta có

* Với $x \geq 1$

$$\begin{cases} 8^{|x|} = 8^x \geq 7x + 1 \\ 2^{|x|} = 2^x \geq x + 1 \end{cases} \Rightarrow 8^{|x|} + 2^{|x|} \geq 8x + 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$

* Với $x \leq 0$

$$\begin{cases} 8^{|x|} = 8^{-x} \geq -7x + 1 \geq 7x + 1 \\ 2^{|x|} = 2^{-x} \geq -x + 1 \geq x + 1 \end{cases} \Rightarrow 8^{|x|} + 2^{|x|} \geq 8x + 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=0$

* Với $x \in [0; 1]$

$$\begin{cases} 8^{|x|} = 8^x < 7x + 1 \\ 2^{|x|} = 2^x < x + 1 \end{cases} \Rightarrow 8^{|x|} + 2^{|x|} < 8x + 2$$

Phương trình vô nghiệm

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm $x=0$ và $x=1$.

Toán qua : Khi gặp phương trình mũ chứa giá trị
trên trục tuyệt đối
 $a^{|x|} + b^{|x|} = (a + b - 2)x + 2$ (a, b là hằng số). Ta dùng bất
đẳng thức Bernoulli để giải quyết bài toán và
phương pháp này rất hữu ích trong các bài toán
đặt 2 trong tam giác.

Đaịng 4: ÑÀÙNH GIAÙ DÖĨA VAØO TAM THỜÙC BAÄC HAI, PHỜÔNG TRÌNH MUỖ

Ñăët aản phui laø phờông phaùp ñöôïc duøng phoả bieán trong vieăc giaûi phờông trình noùi chung vaø giaûi phờông trình muỗ noùi rieâng. Nhieàu baøi toaùn chæ nhìn vaøo laø ta coù theă thaáy ñöôïc caùch choïn aản phui thích hôip. Nhõng cuõng khoâng ít baøi toaùn khién chuùng ta boái roái ngay töø böôùc naøy. Ñoái vùi nhõng baøi toaùn naøy, thoâng thờôøng ñoùi hoù baïn ñoïc phaùu coù caùc nhìn tinh teá ñeă ñaùng giaù vaø ñeă ra hõuùng giaûi thích hôip. Ñeă minh hoïa cho sõi tinh teá ñoù, chuùng ta laàn löôit xeùt caùc ví dụ sau:

Ví dụ 1[2]: Giaû phờông trình : $(2 - \sqrt{3})^x + 2(2 + \sqrt{3})^x = 3$

Giaûi:

Ta nhaă xet ra ñeă $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$

Do ñoù ñeă $(2 - \sqrt{3})^x = t$; Ñieă kieă $t > 0$ thì $(2 + \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$

Khi ñoù phờông trình ñöôïc vieă lai $t + 2\frac{1}{t} = 3$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 > 0 \\ t = 2 > 0 \end{cases}$$

* Vôùt=1, ta coù $(2 - \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

* Vôùt=2, ta coù $(2 - \sqrt{3})^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{2-\sqrt{3}}^2$

Keă luaă : phờông trình ñeă cho coù hai nghieă $x=0$ vaø $x = \log_{2-\sqrt{3}}^2$

Chuù yù: Trong nhieàu trờôøng hôip ta khoâng thaáy ngay ñöôïc sõi xuaát hieă $ab=1$ ñoái vùi caùc toaùn töô cuôa phờông trình . Khi ñoù caàn ñaùng giaù tinh teá hôn. Cuĩ theă ta xeùt ví dụ sau:

Ví dụ 2:[1] Giaû phờông trình: $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0$

Giaûi:

Nhà xét ra $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$

và $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

Do đó nếu $(2 + \sqrt{3})^x = t$; thì khi $t > 0$, thì $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$

và $(7 + 4\sqrt{3})^x = t^2$

Khi đó phương trình trở thành vô

$$t^2 - 3\frac{1}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 > 0 \\ t^2 + t + 3 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Kết luận: phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Nhà xét: Nhờ vậy, trong ví dụ trên, bằng việc nhân giả

$$\begin{cases} 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \\ (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1 \end{cases}$$

ta sẽ lựa chọn một ẩn phụ $t = (2 + \sqrt{3})^x$ cho phương trình .

Ví dụ tiếp theo ta sẽ miêu tả việc lựa chọn ẩn phụ thông qua nhân giả mô tả rằng của $ab = 1$. Nếu là:

$$ab = c^2 \Leftrightarrow \frac{a}{c} \frac{b}{c} = 1$$

ta lập phương trình dạng $Aa^x + Bb^x + Cc^x = 0$

Khi đó ta có thể chia cả hai vế phương trình cho $c^x \neq 0$

$$\text{ta sẽ có } A\left(\frac{a}{c}\right)^x + B\left(\frac{b}{c}\right)^x + c = 0$$

Tổ chức lại ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{c}\right)^x$, $t > 0$ và suy ra $\left(\frac{b}{c}\right)^x = \frac{1}{t}$

Ta xét ví dụ cuối như sau:

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(3 + \sqrt{5})^x + 7(3 - \sqrt{5})^x = 2^{x+3}$

Giaûi:

Chia 2 vế cho $2^x > 0$ ta được:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + 7\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$$

$$\text{Nhân cả hai vế với } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = t, \text{ khi đó } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } t + \frac{7}{t} = 8$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 > 0 \\ t=7 > 0 \end{cases}$$

$$* \text{ Với } t=1 \text{ ta có } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x=0$$

$$* \text{ Với } t=7 \text{ ta có } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 7$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm

$$x=0 \text{ và } x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 7$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } t + \frac{7}{t} = 8$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 > 0 \\ t=7 > 0 \end{cases}$$

$$* \text{ Với } t=1 \text{ ta có } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x=0$$

$$* \text{ Với } t=7 \text{ ta có } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 7$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm

$$x=0 \text{ và } x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 7$$

Nếu bạn nào nắm vững hơn về kỹ năng giải các dạng toán trên mỗi câu bạn làm các ví dụ sau:

$$1) (5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 10$$

$$2) \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \right)^{\sin x} + \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \right)^{\sin x} = 4$$

$$3) (4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$$

$$4) (2 + \sqrt{3})^x + (7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^x = 4(2 + \sqrt{3})$$

Chú ý: Tuy nhiên, nhiều bài toán sau khi đã đặt ẩn phụ vẫn còn toàn tại ẩn ban đầu. Loại bài toán này ta có thể giải bằng các phương pháp thông thường cho phương trình ẩn t. Những ôu này, chúng tôi sẽ trình bày phương pháp nhanh gọn qua hình lý Viet của tam thức bậc hai. Với phương pháp này ta sẽ nhanh chóng đưa ra nghiệm của phương trình.

Ta xét các ví dụ sau

Ví dụ 4:

Giaû phương trình: $3 \cdot 25^{x-2} + (3x - 10)5^{x-2} + 3 - x = 0$ (1)

Giaû:

Đặt $5^{x-2} = t$, thì khi đó $t > 0$

Khi đó phương trình trở về dạng:

$$3 \cdot t^2 + (3x - 10)t + 3 - x = 0 \quad (2)$$

$$\text{Nếu vậy ta có } \begin{cases} S = \frac{10-3x}{3} = \frac{1}{3} - x \\ P = \frac{3-x}{3} = \frac{1}{3}(3-x) \end{cases} (*)$$

Nếu ta đặt phương trình (2) ta có

$$\begin{cases} t = \frac{1}{3} > 0 \\ t = -x + 3 > 0, \text{ khi } x < 3 \end{cases}$$

* Trường hợp 1:

$$5^{x-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x-2 = \log_5 \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 + \log_5 \frac{1}{3}$$

* Trường hợp 2:

$$5^{x-2} = 3-x, \text{ khi } x < 3$$

Xét hàm $g(x) = 5^{x-2} - 3 + x$ ta có

$$\begin{cases} g'(x) = 5^{x-2} \ln 5 + 1 > 0 \\ g(2) = 0 \end{cases}$$

Vậy $x=2$ thỏa $x < 3$ là nghiệm của phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=2$ và $x=2 + \log_5 \frac{1}{3}$

Nhận xét: Đây là một ví dụ vẫn dùng rất tinh tế nhìn lí Viet của tam thức bậc hai

Ở bài tập này, sau khi đặt ẩn phụ $5^{x-2}=t$, phương trình vẫn còn toàn tại ẩn x . Ta có thể giải phương trình (2) nhờ một phương trình bậc hai theo ẩn t thông thường. Những ô này chúng tôi trình bày theo phương pháp này dựa vào tam thức bậc hai.

Hoàn toàn tổng cộng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: [2]

$$\text{Giải phương trình: } 9^{x^2} + (x^2 - 3)3^{x^2} + 2 - 2x^2 = 0 \quad (1)$$

Giaûi:

$$\text{Nếu } 3^{x^2} = t, \text{ thì ta có } t > 0$$

Khi đó ta có phương trình:

$$t^2 + (x^2 - 3)t + 2 - 2x^2 = 0$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} S = -x^2 + 3 = (x^2 + 1) + 2 \\ P = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) \end{cases}$$

Do đó ta có hệ phương trình (2) ta có $\begin{cases} t = 2 \\ t = x^2 - 1 \end{cases}$

* Trường hợp 1:

$$t = 2. \text{ Khi đó ta có } x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \log \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\log \frac{2}{3}}$$

* Trường hợp 2:

$$t = x^2 - 1. \text{ Khi đó ta có } x^2 = x^2 - 1. \text{ Ta có hai trường hợp sau:}$$

$$\begin{cases} VT \geq 1, \forall x \\ VP \leq 1, \forall x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 1 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Kết luận: phương trình đã cho có nghiệm:

$$x = 0; x = \sqrt{\log \frac{2}{3}}; x = -\sqrt{\log \frac{2}{3}}$$

➤ **Bài tập về nhà.**

Giaûi các phương trình sau:

$$1) 9^x = 2(x - 2)3^x + 2x - 5 = 0$$

$$2) 3^{x^2} - (2^x + 9)3^x + 9x^2 = 0$$

$$3) 25^x - 2(3 - x)5^x + 2x - 7 = 0$$

KEÁT LUAÂN CHUNG

Vôùi sõi coá gaéng vaø noả löïc cuûa taát caù caùc thaønh vieân trong nhòum taøi lieäu ñaõ ñöôïc hoønh thaønh trong döï kieán. Tuy nhieân , do thôøi gian coù haïn vaø kinh nghieäm cuûa nhòum coøn non yeáu, ñeà taøi coù theå coøn nhieàu thieáu soùt, khuyeát ñieäm. Raát mong quyù thaày cô giaùo, caùc baïn sinh vieân vaø baïn ñöïc gaàn xa goùp yù, pheâ bình ñeà chaát löôïng ñeà taøi ngaøy moät hoønh chaønh hôn.

Chuùng toài raát mong nhaän ñöôïc sõi goùp yù cuûa ñoác giaù vaø caùc baïn sinh vieân!

TẠO LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phöông phaùp giaûi toaùn töï luaän haøm soá muõ, haøm soá logarit -Traàn Thò Vaân Anh
- [2] 15 Chuyeân ñeà TAM THÖÙC BAÛC HAI -
Nguyeãn Ñöùc Ñoàng
- [3] 690 Baøi toaùn ñaïi soá choïn loïc - Nguyeãn Ñöùc Ñoàng
- [4] Phöông phaùp giaûi toaùn Ñaïi soá- Phöông trình,heã phöông trình,baát phöông trình chöùa muõ-Leâ Hoàng Ñöùc
- [5] Phöông phaùp giaûi toaùn Ñaïi soá- Phöông trình,heã phöông trình,baát phöông trình chöùa daáu trò tuyeät ñoái-Leâ Hoàng Ñöùc
- [6] 500 Baøi toaùn ñieãn hình phöông trình, baát phöông trình,heã phöông trình muõ logarit - Traàn Ñình Thì

MUÏC LUÏC

<i>Môu ñaàu</i>	3
<i>Daïng 1: Ñaùnh giaù phöông trình muõ döïa vaøo tính chaát haøm soá muõ</i>	4-10
<i>Daïng 2: Ñaùnh giaù phöông trình muõ döïa vaøo caùc baát ñaúng thöïc cô baùn</i>	11-17
<i>Daïng 3: Ñaùnh giaù phöông trình muõ baèng caùc tính chaát haøm chöùa daáu trò tuyeät ñoái.</i>	18-22
<i>Daïng 4: Ñaùnh giaù phöông trình muõ baèng tam thöïc baäc hai</i>	23-28