PHÒNG GD&ĐT CẨM THỦY

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2013-2014
Môn thi: Toán 8
Ngày thi: 15 tháng 4 năm 2014

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\dfrac{x+1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2 - x^2}{x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm x để P= $\dfrac{-1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Câu 2. (6 điểm)

a) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 22, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

c) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0,$ tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

b) Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1.$ Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC $(M \neq B, C)$. Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

a) Chứng minh : ΔOEM vuông cân

b) Chứng minh: $ME // BN$

c) Từ C kẻ $CH \perp BN (H \in BN)$. Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)}\right]$$

$$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} . \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \in$ ĐKXĐ

$$\Rightarrow 2x^2 = -x+1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} (TM) \\ x = -1 (KTM) \end{array}\right.$$

Vậy $P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

c)

$$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$P = x+1+\frac{1}{x-1} = x-1+\frac{1}{x-1}+2$$

Vì $x > 1$ nên $x-1 > 0$. Áp dụng BĐT Cosi ta có: $x-1+\frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} = 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 (TM)$

Vậy $GTNN$ của P là $4 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 2.

a) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$

Khi đó: $f(x)=(x^2-4).(-5x)+ax+b$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2)=22 \\ f(-2)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=22 \\ -2a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=16 \end{cases}$$

Do đó: $f(x)=(x^2-4).(-5x)+3x+16$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x)=-5x^3+23x+16$

b) $a^3+5a=a^3-a+6a=a(a^2-1)+6a=a(a-1)(a+1)+6a$

Vì $a(a-1)(a+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 mà $(2,3)=1$ nên $a(a-1)(a+1)$ chia hết cho 6

$6a$ chia hết cho 6

Nên a^3+5a chia hết cho 6

c) $x^2+xy-2012x-2013y-2014=0$

$\Leftrightarrow x^2+xy+x-2013x-2013y-2013=1$

$\Leftrightarrow x(x+y+1)-2013(x+y+1)=1$

$\Leftrightarrow (x-2013)(x+y+1)=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2013=1 \\ x+y+1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2013=-1 \\ x+y+1=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2014 \\ y=-2014 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2012 \\ y=-2014 \end{cases} \end{array}\right.$$

Câu 3.

a)

$$P=\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{a^2+c^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

$$=\frac{1}{b^2+c^2-(b+c)^2}+\frac{1}{a^2+c^2-(a+c)^2}+\frac{1}{a^2+b^2-(a+b)^2}$$

$$=\frac{1}{-2ab}+\frac{1}{-2ac}+\frac{1}{-2ab}=\frac{a+b+c}{-2abc}=0$$

b) $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{2}{1+ab}=\left(\dfrac{1}{1+a^2}-\dfrac{1}{1+ab}\right)+\left(\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{1}{1+ab}\right)$

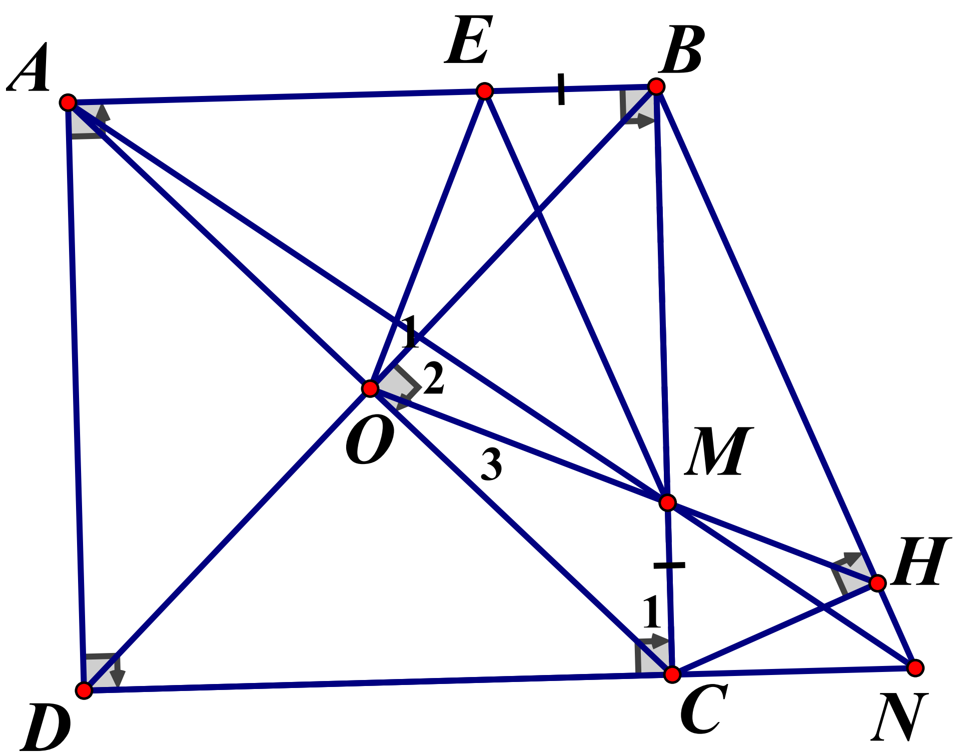
$$=\frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)}+\frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)}$$

$$=\frac{a(b-a)(1+b^2)+b(a-b)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}=\frac{(b-a)(a+ab^2-b-a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}=\frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}$$

Do $a\ge 1; b\ge 1$ nên $\dfrac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}\ge 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{2}{1+ab}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$$

Câu 4.



a) Xét ΔOEB và ΔOMC

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có: OB=OC

Và $\hat{B}_1=\hat{C}_1=45^0, BE=CM\,(gt)\Rightarrow \Delta OEB=\Delta OMC\,(c.g.c)$

$\Rightarrow OE=OM$ và $\hat{O}_1=\hat{O}_3$

Lại có: $\hat{O}_2+\hat{O}_3=\widehat{BOC}=90^0$ vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow \hat{O}_2 + \hat{O}_1 = \widehat{EOM} = 90^0$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \Delta OEM$ vuông cân tại O

b) Từ giả thiết tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB//CD$ và AB = CD

+) $AB//CD \Rightarrow AB//CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (định lý Ta let) (*)

Mà BE $= CM\,(gt)$ và $AB = Cd \Rightarrow AE = BM$ thay vào $(*)$

Ta có: $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME//BN$ (Ta let đảo)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME//BN \Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{OH'E}$ (cặp góc so le trong)

Mà $\widehat{OME} = 45^0$ vì ΔOEM vuông cân tại O

$\Rightarrow \widehat{MH'B} = 45^0 = \hat{C}_1 \Rightarrow \Delta OMC \sim \Delta BMH'(g.g)$

$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}$, kết hợp $\widehat{OMB} = \widehat{CMH'}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta OMB \sim \Delta CMH'(c.g.c) \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{MH'C} = 45^0$

Vậy $\widehat{BH'C} = \widehat{BH'M} + \widehat{MH'C} = 90^0 \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN\,(H \in BN) \Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)