

DẠNG 6**Thể tích khối tứ diện đặc biệt**

- Câu 1:** Cho hình chóp $SABC$ có $SA = SB = SC = BA = BC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.
- Câu 2:** Tính thể tích của khối chóp $SABC$ có $ASB = 60^\circ, BSC = 90^\circ, CSA = 120^\circ$ và $SA = a, SB = 2a, SC = 4a$
- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 3:** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a; CD = x$ và các cạnh còn lại bằng $3a$. Tính x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ là lớn nhất.
- A. $x = 2a\sqrt{10}$. B. $a\sqrt{10}$. C. $6a$. D. $3a$.
- Câu 4:** Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 12$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện bằng:
- A. 8 . B. $\frac{4}{3}$. C. 4 . D. $\frac{8}{3}$.
- Câu 5:** Cho hình chóp $SABC$ có thể tích bằng 3 và $AB = 3, AC = 4, BC = 5$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC . Góc giữa mặt phẳng $(SAB), (SAC)$ và đáy lần lượt là $30^\circ; 60^\circ$. Tính cotang góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)
- A. $\frac{24-13\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{8-5\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{24+13\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{8+5\sqrt{3}}{5}$.
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 8, BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính thể tích của khối tứ diện $MABC$.
- A. $V = 24$. B. $V = \frac{64}{3}$. C. $V = \frac{32}{3}$. D. $V = 12$.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 4a, AC = 3a$ và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H . Biết A, H nằm khác phía với đường thẳng BC và các mặt bên của hình chóp cùng tạo với mặt đáy góc 60° . Tính thể tích V của hình chóp đã cho.
- A. $V = 2a^3\sqrt{3}$. B. $V = 12a^3\sqrt{3}$. C. $V = 6a^3\sqrt{3}$. D. $V = 36a^3\sqrt{3}$.
- Câu 8:** Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc; khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $OABC$ bằng
- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a có các góc

$A'AB = BAD = A'AD = \alpha \left(0^\circ < \alpha < 90^\circ\right)$. Biết khối hộp đã cho có thể tích bằng $\frac{a^3 \sqrt{3\sqrt{3}-5}}{2}$

- A. $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. C. $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Câu 10: Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc thỏa mãn $\frac{1}{OA} + \frac{4}{OB} + \frac{9}{OC} = 1$. Khi biểu thức $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính thể tích khối tứ diện $OABC$.

- A. 162. B. 72. C. 108. D. 216.

Câu 11: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a , $A'AB = BAD = A'AD = \alpha \left(0 < \alpha < 90^\circ\right)$. Tính thể tích khối hộp đã cho theo a và α .

- A. $V = \sqrt{2}a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1+2\cos \alpha}$. B. $V = \sqrt{2}a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1+2\cos \alpha}$.
C. $V = 2a^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1+2\cos \alpha}$. D. $V = 2a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1+2\cos \alpha}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC và các mặt bên $(SBC), (SCA), (SAB)$ tạo với mặt đáy (ABC) các góc lần lượt là $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{128(4+\sqrt{3})}$. B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8(4+\sqrt{3})}$. C. $V = \frac{a^3}{8(2\sqrt{3}+1)}$. D. $V = \frac{a^3}{128(2\sqrt{3}+1)}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt bên $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$ và mặt đáy tương ứng là $90^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$. Biết tam giác SAB vuông cân tại S có $AB = a$, chu vi tứ giác $ABCD$ bằng $9a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = a^3 \sqrt{3}$. B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 14: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia $AC, B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là?

- A. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3}{12}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 15: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, tam giác CAB đều và tam giác DAB vuông cân tại D . Góc giữa hai mặt phẳng $(CAB), (DAB)$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$ B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ C. $V = \frac{3a^3}{4}$ D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

Câu 16: Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau có $AB = 2a$ là đoạn vuông góc chung. Các điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM + 2BN = 3a$. Hỏi thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$ là?

- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{3a^3}{8}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 17: Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB=1$, $AC=2$, $BC=\sqrt{5}$. Các tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B, C , góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{2\sqrt{15}}{5}$. B. $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{2\sqrt{15}}{3}$. D. $V = \frac{2\sqrt{15}}{15}$.

Câu 18: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB=x$, tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng $2-x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của x để khối tứ diện đã cho có thể tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

A. 1. B. 6. C. 4. D. 2.

Câu 19: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB=2a$, tam giác CAB đều và tam giác DAB vuông cân tại D . Góc giữa hai mặt phẳng (CAB) , (DAB) bằng 30° . Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ có $BD=2$, hai tam giác ABD, BCD có diện tích lần lượt là 6 và 10. Biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 16, tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD)

A. $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. B. $\arcsin\left(\frac{4}{15}\right)$. C. $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$. D. $\arccos\left(\frac{4}{15}\right)$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau, mặt bên SAD là tam giác đều và tạo với mặt đáy góc 60° , $AD=4, AC=6, BD=8$. Tính thể tích V của khối $S.ABCD$

A. $V = 24$. B. $V = \frac{96}{5}$. C. $V = \frac{48}{5}$. D. $V = \frac{144}{5}$.

Câu 50 : Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 22: Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và tổng diện tích các mặt (OBC) , (OCA) , (OAB) bằng $\sqrt{3}$. Diện tích mặt (ABC) bằng 1. Tính thể tích V của khối tứ diện đã cho.

A. $V = \frac{1}{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{12}}{9}$. C. $V = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 23: Cho khối lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài các cạnh bằng x . Các điểm M, N lần lượt trên các cạnh AA_1, CC_1 sao cho $AM + CN = 2a$. Tìm x biết thể tích khối tứ diện $BDMN$ bằng $2a^3$.

A. $x = a\sqrt{2}$. B. $x = a\sqrt{6}$. C. $x = a\sqrt{3}$. D. $x = 2a\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều, tam giác CAB vuông cân tại C , $AB = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(CAB), (ADB)$. Tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a^3 \sqrt{2}}{8}$.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 9(\text{cm})$, $BC = 11(\text{cm})$, $CA = 6(\text{cm})$, $SA = 3(\text{cm})$, $SB = 3(\text{cm})$ và $SC = 5(\text{cm})$. Tính thể tích V của khối chóp.

- A. $V = \frac{\sqrt{2159}}{6}(\text{cm}^3)$. B. $V = \frac{\sqrt{241}}{2}(\text{cm}^3)$. C. $V = \frac{\sqrt{2159}}{2}(\text{cm}^3)$. D. $V = \frac{3\sqrt{241}}{2}(\text{cm}^3)$.

Câu 26: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 1, BC = 2$. Góc $CBB' = 90^\circ, ABB' = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của AA' . Biết $d(AB', CM) = \frac{\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 27: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BAC = 90^\circ$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB) , (DBC) , (DCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng 60° , hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho A, H nằm về hai phía của đường thẳng BC . Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. B. $V = 6\sqrt{3}a^3$. C. $V = 4\sqrt{3}a^3$. D. $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 28: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BAC = 90^\circ$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB) , (DBC) , (DCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng 60° , hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho C, H nằm về hai phía của đường thẳng AB . Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. B. $V = 6\sqrt{3}a^3$. C. $V = 4\sqrt{3}a^3$. D. $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 29: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BAC = 90^\circ$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB) , (DBC) , (DCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng 60° , hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho B, H nằm về hai phía của đường thẳng AC . Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. B. $V = 6\sqrt{3}a^3$. C. $V = 4\sqrt{3}a^3$. D. $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 30: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BAC = 90^\circ$ và góc giữa các mặt phẳng $(DAB), (DBC), (DCA)$ và mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng 60° , hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trong tam giác ABC . Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$:

- A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. B. $V = 6\sqrt{3}a^3$. C. $V = 4\sqrt{3}a^3$. D. $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 31: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$, $(ADD'A')$ tạo với đáy các góc lần lượt là 45° và 60° . Tính thể tích V của khối hộp đã cho biết độ dài cạnh bên bằng 1.

- A. $V = 3$. B. $V = \frac{7}{3}$. C. $V = \sqrt{3}$. D. $V = \sqrt{7}$.

Câu 32: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BAC = 90^\circ$, góc giữa các mặt phẳng (DAB) , (DAC) và mặt phẳng (ABC) lần lượt là 45° và 60° . Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$ biết $AD = 6a$.

- A. $V = \frac{12\sqrt{5}a^3}{5}$. B. $V = \frac{4\sqrt{21}a^3}{7}$. C. $V = \frac{4\sqrt{5}a^3}{5}$. D. $V = \frac{12\sqrt{21}a^3}{7}$.

Câu 33: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = \frac{a}{2}$, $BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) cùng tạo với đáy góc 60° , tam giác SBC nhọn và mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{(3-\sqrt{3})a^3}{32}$. B. $V = \frac{(3+\sqrt{3})a^3}{32}$. C. $V = \frac{3(3-\sqrt{3})a^3}{32}$. D. $V = \frac{3(3+\sqrt{3})a^3}{32}$.

Câu 34: Cho hai đường thẳng chéo nhau Ax , By tạo với nhau góc 60° và $AB = a$ là độ dài đoạn vuông góc chung. Hai điểm M , N di động trên Ax , By sao cho $MN = 2a$. Tìm thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$.

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{16}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{36}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 35: Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a$, các góc $BAC = 120^\circ$, $SBA = SCA = 90^\circ$, góc giữa mặt phẳng (SAC) và đường thẳng SB bằng $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{8}$ và khoảng cách từ S đến (ABC) nhỏ hơn $2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 36: Cho hai đường thẳng a, b cố định chéo nhau. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng a, b $A \in a; B \in b$. Trên a lấy điểm M khác A , trên b lấy điểm N khác B sao cho $AM = x; BN = y$. Biết $AB = 6$, góc giữa hai đường thẳng a, b là 60° . Tính thể tích của tứ diện $ABMN$ theo x và y .

- A. $\frac{\sqrt{3}xy}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}xy}{4}$. C. $\frac{xy}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}xy}{6}$.

Câu 37: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = SB$, $SC = SD$. Biết rằng mặt phẳng $(SAB) \perp (SCD)$ và tổng diện tích của hai tam giác SAB , SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{4a^3}{75}$. B. $V = \frac{4a^3}{15}$. C. $V = \frac{4a^3}{25}$. D. $V = \frac{12a^3}{25}$.

Câu 38: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $SAB = SCB = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh SA . Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCM) bằng $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng ?

- A. $\frac{10\sqrt{3}}{9}a^3$. B. $\frac{10\sqrt{3}}{3}a^3$. C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}a^3$. D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 39: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = BC = x$, $SB = CA = y$, $SC = AB = z$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ bằng?

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Câu 40: Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn thẳng DE . Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

- A. $\frac{7}{6}$. B. $\frac{11}{12}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 41: Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE . Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng?

- A. $\frac{7}{6}$. B. $\frac{11}{12}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 42: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, mặt bên tạo với đáy một góc 75° . Mặt phẳng chứa (P) chứa đường thẳng AB và tạo với góc đáy một góc 45° chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S bằng:

- A. $\frac{16+9\sqrt{3}}{78}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{2})}$. C. $\frac{2+\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{2})}$. D. $\frac{16+9\sqrt{3}}{26}$.

Câu 43: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3a$, $AC = a$. Mặt phẳng (DBC) , (DAC) , (DAB) lần lượt tạo với mặt phẳng (ABC) các góc 90° , α , β trong đó $\alpha + \beta = 90^\circ$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{3a^3}{13}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{10}$. D. $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 44: Cho khối đa diện $SABCD$ bằng cách ghép hai khối chóp tam giác $S.ABD$ và $S.BCD$ lại với nhau, biết $SA = 4; SB = 3; SC = 2; SD = 1$ và $ASB = BSC = CSD = DSA = BSD = 60^\circ$. Thể tích khối đa diện $SABCD$ bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 45: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC ; điểm P thuộc cạnh CD sao cho $PD = 2CP$, mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Tính thể tích khối đa diện $BMNPQD$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$.

B. $\frac{23\sqrt{2}}{432}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{48}$.

D. $\frac{13\sqrt{2}}{432}$.

Câu 46: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$; $AC = a\sqrt{15}$; $BD = a\sqrt{10}$; $CD = 4a$. Biết góc giữa đường thẳng AD và (BCD) là 45° , khoảng cách giữa AD và BC là $\frac{5a}{4}$. Hình chiếu vuông góc của A lên (BCD) nằm trong tam giác BCD . Tính độ dài đoạn AD .

A. $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$.

B. $2a$.

C. $2a\sqrt{2}$.

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 47: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' , CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$; khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $A'G' = \frac{4}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng.

A. 2.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 4.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 48: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $\frac{3}{4}$. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' , CC' lần lượt bằng 1; $\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Côsin góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Câu 49: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCA) bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$; khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng.

A. $\frac{1}{36}$.

B. $\frac{1}{48}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{1}{24}$.

Câu 50: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A , $AB = AC = 1$, $BAC = 30^\circ$. Các mặt bên $(ABB'A')$, $(ACC'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc 45° , 60° và $AA' = 1$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng.

A. $\frac{3\sqrt{31}}{124}$.

B. $\frac{\sqrt{93}}{372}$.

C. $\frac{\sqrt{31}}{124}$.

D. $\frac{\sqrt{93}}{124}$.

Câu 51: Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 5(cm)$, $AC = 7(cm)$, $SA = 3(cm)$. $CAB = 30^\circ$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) và đáy lần lượt là 45° , 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{35\sqrt{29}}{116}$.

B. $V = \frac{7\sqrt{5}}{4}$.

C. $V = \frac{21\sqrt{5}}{4}$.

D. $V = \frac{105\sqrt{5}}{116}$.

Câu 52: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{7}$. Hai mặt bên (SAB) , (SAC) lần lượt tạo với đáy góc 45° , 60° và $SA = 1$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ bằng.

- A. $V = \frac{1}{2}$. B. $V = \frac{7}{9}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 1$ và $AC = \sqrt{3}$. Các mặt bên (SBC) , (SAC) , (SAB) lần lượt tạo với đáy các góc 30° , 45° và 60° . Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

- A. $\frac{3 - \sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{20}$ C. $\frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{20}$

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{12}$, đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$. Các mặt bên (SAC) , (SAB) lần lượt tạo với đáy các góc 45° , 60° . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC . Cô-sin góc giữa mặt (SBC) và đáy bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

Câu 55: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$ B. $V = \frac{2a^3 \sqrt{3}}{9}$ C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$ D. $V = \frac{4a^3 \sqrt{3}}{9}$

Câu 56: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $BAD = 120^\circ$. Các mặt bên (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SDA) lần lượt tạo với đáy các góc 90° , 30° , 45° , 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$

- A. $V = \frac{(4\sqrt{3} - 3)a^3}{26}$ B. $V = \frac{(4\sqrt{3} - 3)a^3}{104}$ C. $V = \frac{(12\sqrt{3} - 9)a^3}{26}$ D. $V = \frac{(12\sqrt{3} - 9)a^3}{104}$

Câu 57: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua C' và cắt các tia AB , AD , AA' lần lượt tại M , N , P . Khối tứ diện $AMNP$ có thể tích nhỏ nhất bằng

- A. 27 B. 14 C. 11 D. 36

Câu 58: Cho hai đường thẳng chéo nhau Ax , By và hợp với nhau một góc bằng 60° . Biết $AB = a$ là đoạn vuông góc chung. Lấy điểm C trên By sao cho $BC = a$ và gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên Ax . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$ D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$

- Câu 59:** Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng
- A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 60:** Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc và các điểm A, B, C không trùng với điểm O lần lượt thay đổi trên các tia Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: Tỉ số diện tích tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Khối tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất bằng
- A. $\sqrt{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $4\sqrt{3}$. D. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 61:** Cho khối đa diện $ABC.A'B'C'$ có $AA' // BB' // CC'$. Biết khoảng cách từ điểm A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ điểm A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; khoảng cách giữa hai đường thẳng BB', CC' bằng 2 và $AA' = 1, BB' = 2, CC' = 3$. Thể tích của khối đa diện $ABC.A'B'C'$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\sqrt{3}$.
- Câu 62:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = \sqrt{3}a, SB > 2a$ và $ABC = BAS = BCS = 90^\circ$, sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. B. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$.
- Câu 63:** Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = \sqrt{2}, OC = 1$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các cạnh AC, BC sao cho hai mặt phẳng $(OMN), (ABC)$ vuông góc với nhau. Khối đa diện $ABOMN$ có thể tích lớn nhất bằng
- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{5}$.
- Câu 64:** Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 1, OB = 2, OC = 3$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, mặt phẳng (α) qua trung điểm I của OG cắt các tia OA, OB, OC lần lượt tại D, E, F . Thể tích khối tứ diện $ODEF$ có giá trị lớn nhất bằng
- A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 65:** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ điểm C đến BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ điểm A đến BB', CC' lần lượt là 1 và 2; hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 66: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' , CC' lần lượt là 1 và $\sqrt{3}$; góc giữa hai mặt bên của lăng trụ chung cạnh AA' bằng 90° . Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $AM' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. 2. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

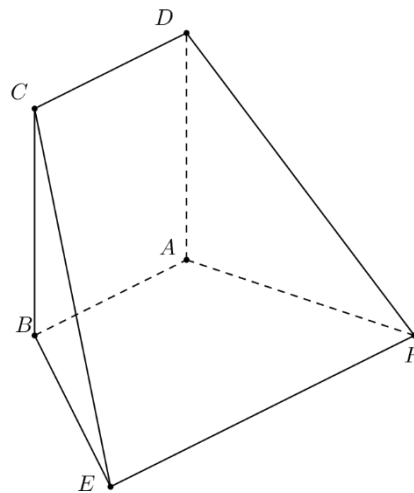
Câu 67: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, $AB = a$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Hãy tính thể tích của khối chóp $A'.BB'C'C$

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{81}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. D. $\frac{a^3\sqrt{31}}{8}$.

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC . Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 69: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và hình thang cân $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết $AB = a$, $BC = BE = a\sqrt{2}$, $AB \parallel EF$ và $EF = 3a$. Thể tích khối đa diện $ABCDEF$ bằng



- A. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 70: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$; góc giữa AA' với $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' ; DD' cùng bằng 1. Góc của mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(C'CDD')$ bằng 60° . Thể tích khối hộp đã cho bằng

A. $2\sqrt{3}$.

B. 2.

C. $\sqrt{3}$.D. $3\sqrt{3}$.**BẢNG ĐÁP ÁN**

1.C	2.B	3.B	4.B	5.A	6.C	7.B	8.C	9.B	10.D
11.D	12.B	13.C	14.B	15.D	16.B	17.D	18.D	19.D	20.C
21.A	22.D	23.B	24.D	25.B	26.A	27.A	28.D	29.C	30.B
31.A	32.A	33.D	34.A	35.B	36.A	37.A	38.C	39.A	40.A
41.D	42.D	43.A	44.A	45.B	46.B	47.D	48.D	49.D	50.B
51.D	52.A	53.D	54.A	55.B	56.A	57.A	58.C	59.B	60.C
61.D	62.A	63.A	64.A	65.D	66.A	67.C	68.B	69.A	70.C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn C**

Gọi SH là đường cao của hình chóp và I là trung điểm của AC

Vì $SA = SB = SC = 1$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Do đó $H \in BI$.

Đặt $AC = x, 0 < x < \sqrt{3}$.

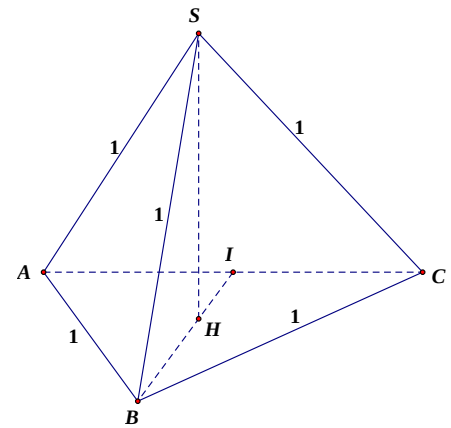
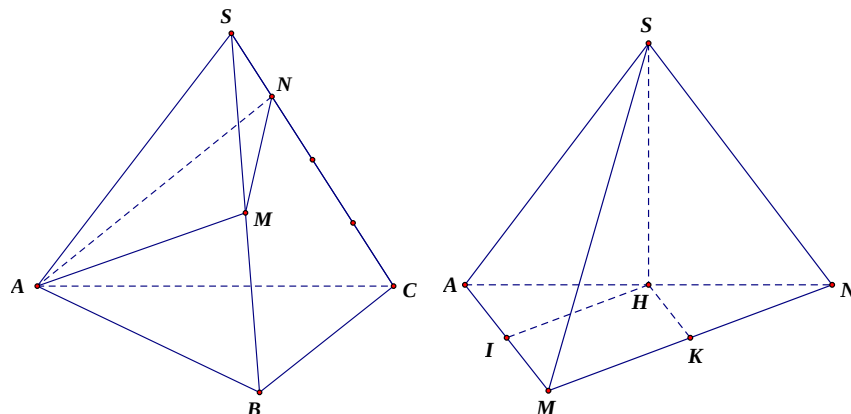
$$\text{Ta có } BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2} BI \cdot AC = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}$$

$$\text{Mặt khác, } HB = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{ABC}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}. \text{ Suy ra } SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{3-x^2}{4-x^2}}$$

$$\text{Khi đó, } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{12} \cdot x \sqrt{3-x^2} \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{x^2 + 3 - x^2}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Vậy } \max(V_{SABC}) = \frac{1}{8}$$

**Câu 2: Chọn B**

Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $SM = SN = a$.

$$\text{Khi đó, } \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{SABC} = 8.V_{SAMN}.$$

Xét khối chóp $SAMN$. Gọi SH là đường cao của hình chóp.

Tam giác SAM đều $\Rightarrow AM = a$

Tam giác SMN vuông cân tại $S \Rightarrow MN = a\sqrt{2}$

Tam giác SAN cân tại S và $NSA = 120^\circ \Rightarrow AN = \sqrt{SA^2 + SN^2 - 2SA \cdot SN \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$

Từ đây suy ra tam giác AMN vuông tại M . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AM, MN . Khi đó:

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp SI \\ AM \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (SHI) \Rightarrow AM \perp HI$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $MN \perp HK$. Do đó H là trung điểm của AN .

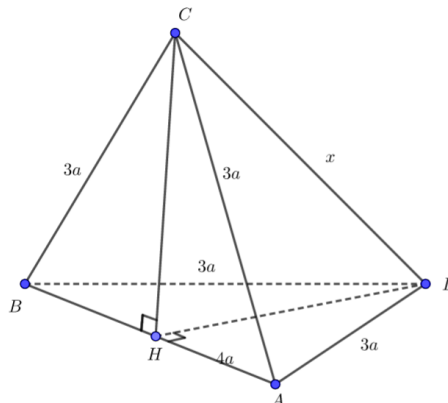
$$\text{Khi đó, } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a}{2}. \text{ Suy ra } V_{SAMN} = \frac{1}{3}SH.S_{AMN} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = 8.V_{SAMN} = V_{SAMN} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Note: có thể sử dụng công thức giải nhanh:

$$V_{SABC} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{6} \cdot \sqrt{1 + 2\cos ASB \cdot \cos BSC \cdot \cos CSA - \cos^2 ASB - \cos^2 BSC - \cos^2 CSA} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$$

Câu 3: Chọn B



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow CH \perp AB; DH \perp AB$. $CH = DH = \sqrt{(3a)^2 - (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

$$\text{Áp dụng công thức } V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_1 \cdot S_2 \cdot \sin \alpha}{a} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_{ABC} \cdot S_{ABD} \cdot \sin((ABC);(ABD))}{AB}$$

$$V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{5} \cdot \sin((ABC);(ABD))}{4a} = \frac{5}{6} \cdot a^3 \cdot \sin((ABC);(ABD))$$

Do đó thể tích $ABCD$ lớn nhất khi $\sin((ABC);(ABD)) = 1 \Leftrightarrow (ABC) \perp (ABD)$.

Khi đó $CH \perp DH \Rightarrow CD^2 = CH^2 + DH^2 = 10a^2 \Rightarrow CD = a\sqrt{10}$.

Câu 4: Chọn B

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{1}{36} OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2 \leq \frac{1}{36} \left(\frac{OA^2 + OB^2 + OC^2}{3} \right)^3 = \frac{16}{9} \Rightarrow V \leq \frac{4}{3}$$

Câu 5: Chọn A

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy. α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow S_{ABC} = 6$. và $SH = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3}{2}$

Từ H kẻ $HI \perp AB; HK \perp AC; HM \perp BC$

$$\Rightarrow HI = \frac{SH}{\tan 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2}; HK = \frac{SH}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{HBC} = S_{ABC} - S_{HAB} - S_{HAC} = 6 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow HM = \frac{2S_{HBC}}{BC} = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{10}; \cot \alpha = \frac{HM}{SH} = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{15}.$$

Câu 6: Chọn C

Từ giả thiết ta có $BC \perp AB, AS \Rightarrow BC \perp BS$.

Xét tam giác vuông ABC ta có

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10.$$

Xét tam giác vuông SBA ta có

$$SB = \sqrt{AS^2 + BA^2} = 10.$$

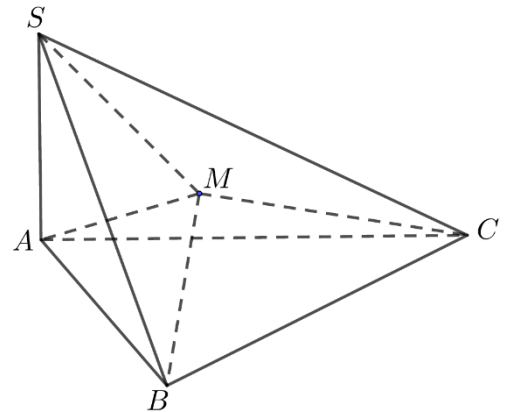
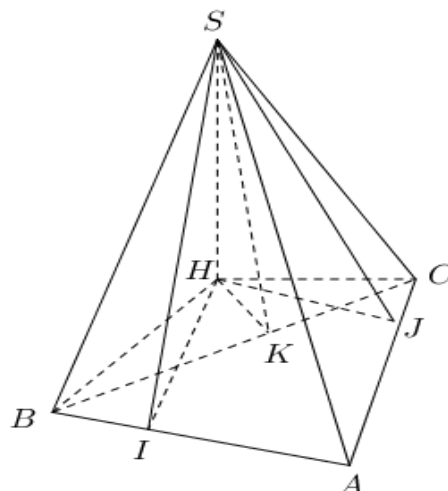
Gọi h là khoảng cách chung từ M đến các mặt của hình chóp $S.ABC$.

Từ giả thiết ta có:

$$V_{SABC} = \frac{1}{6} SA \cdot BA \cdot BC = 48 = V_{MABC} + V_{MABS} + V_{MCBS} + V_{MACS}$$

$$= \frac{1}{3} h (S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABS} + S_{\Delta ASC} + S_{\Delta SBC}) = \frac{1}{3} h \left(\frac{1}{2} AB \cdot BC + \frac{1}{2} AC \cdot AS + \frac{1}{2} SB \cdot BC + \frac{1}{2} AB \cdot AS \right) = 36h$$

$$\Rightarrow h = \frac{4}{3} \Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3} h S_{\Delta ABC} = \frac{32}{3}.$$

**Câu 7: Chọn B**

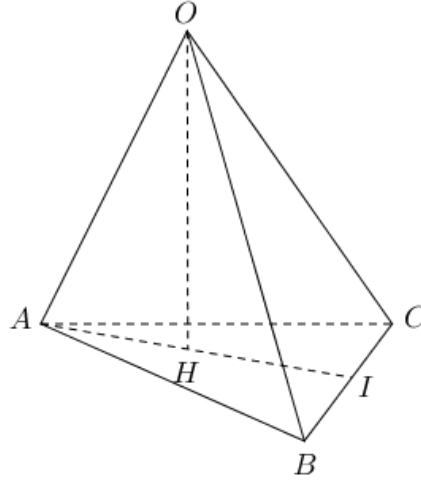
Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, AC, BC .

$$\text{Khi đó } \angle SIH = \angle SJH = \angle SKH = 60^\circ \Rightarrow HI = HJ = HK = \frac{SH}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle HAB} + S_{\triangle HAC} - S_{\triangle HBC} = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) \frac{SH}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{SH}{\sqrt{3}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC = a \cdot \frac{SH}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow SH = 6a\sqrt{3}. \text{ Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 6a\sqrt{3} \cdot 6a^2 = 12a^3\sqrt{3}.$$

Câu 8: Chọn C



Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$ ($a, b, c > 0$).

Vẽ $AI \perp BC$ ($I \in BC$), $OH \perp AI$. Suy ra $OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH = 1$.

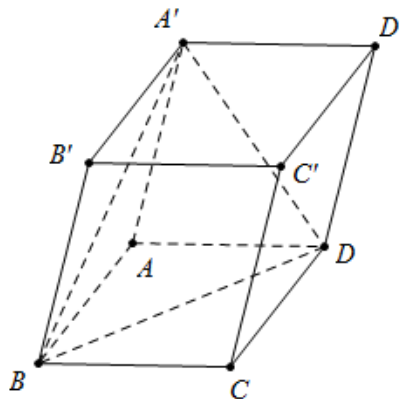
$$\text{Ta có } V_{OABC} = \frac{1}{3} OA \cdot S_{\triangle OBC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{abc}{6}.$$

Xét tam giác OAI vuông tại O có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1. \text{ Ta lại có } 1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{27}{(abc)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} abc \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $V_{OABC} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Câu 9: Chọn B



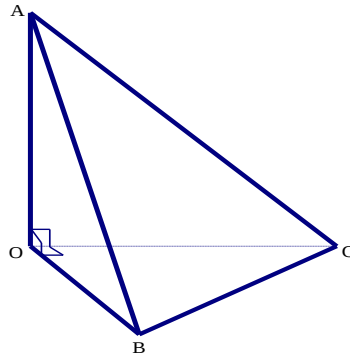
Áp dụng công thức nhanh ta có:

$$V_{A.A'BD} = \frac{a.a.a}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{a^3}{6} \sqrt{1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha}.$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3V_{A'.ABCD} = 6V_{A.A'BD} = a^3 \sqrt{1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha} = \frac{a^3 \sqrt{3\sqrt{3} - 5}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha} = \sqrt{3\sqrt{3} - 5} \Leftrightarrow 4(1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha) = 3\sqrt{3} - 5.$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos^3 \alpha - 12 \cos^2 \alpha - 3\sqrt{3} + 9 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 10: Chọn D

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}, \text{ dấu “=” xảy ra khi } a_i b_j = a_j b_i, \forall i \neq j$$

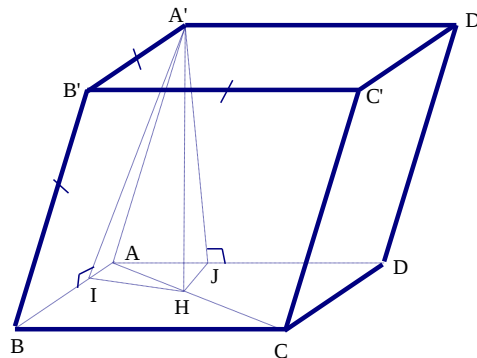
$$\text{Ta có } 1 = \frac{1}{OA} + \frac{4}{OB} + \frac{9}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{2^2}{OB} + \frac{3^2}{OC} \geq \frac{(1+2+3)^2}{OA+OB+OC} = \frac{36}{OA+OB+OC}$$

$$\Rightarrow OA+OB+OC \geq 36$$

Suy ra $OA+OB+OC$ nhỏ nhất bằng 36 khi $\frac{1}{OA} = \frac{2}{OB} = \frac{3}{OC}$.

Mà $\frac{1}{OA} + \frac{4}{OB} + \frac{9}{OC} = 1$ nên $OA = 6; OB = 12; OC = 18$.

$$\text{Vậy } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 12 \cdot 18 = 216.$$

Câu 11: Chọn D

Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ và các cạnh AB, AD .

Ta có $\begin{cases} A'H \perp AB \\ AI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HI) \Rightarrow AB \perp HI.$

Tương tự cũng có $HJ \perp AD.$

Xét hai tam giác vuông $A'AI$ và $A'AJ$ có $\begin{cases} AA' \text{ chung} \\ A'AI = A'AJ = \alpha \end{cases}$ nên $\Delta A'AI = \Delta A'AJ.$

Suy ra $AI = AJ = AA' \cos \alpha = a \cos \alpha$, do đó hai tam giác AHI, AHJ bằng nhau nên $HI = HJ.$

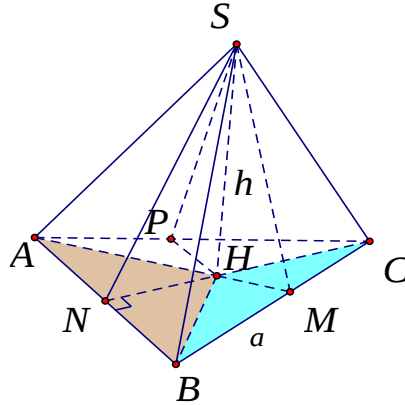
Vậy H cách đều AB và AD nên nằm trên phân giác góc $BAD \Rightarrow H \in AC.$

$$AH = \frac{AI}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Diện tích đáy } S_{ABCD} = 2S_{ABD} = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha = a^2 \sin \alpha.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha} = 2a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + 2\cos \alpha}.$$

Câu 12: Chọn B



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh BC, AB, AC ; h là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

Khi đó, $SNH = 30^\circ, SPH = 45^\circ, SMH = 60^\circ$.

$$\text{Mà } S_{\Delta ABC} = S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HBC} \Leftrightarrow \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} a (HN + NM + HP) \Leftrightarrow HN + NM + HP = \frac{a \sqrt{3}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow (\tan 30^\circ + \tan 45^\circ + \tan 60^\circ) h = \frac{a \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\tan 30^\circ + \tan 45^\circ + \tan 60^\circ) h = \frac{a \sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} h = \frac{a \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{3a}{2(4 + \sqrt{3})}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2(4 + \sqrt{3})} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8(4 + \sqrt{3})}.$$

Câu 13: Chọn C

Gọi H là trung điểm AB .

Theo giả thiết nên $SH \perp mp(ABCD)$, $SH = \frac{a}{2}$ và

$$BC + CD + DA = 8a.$$

Gọi M, N, P là hình chiếu vuông góc của H lần lượt lên AD, DC, CB .

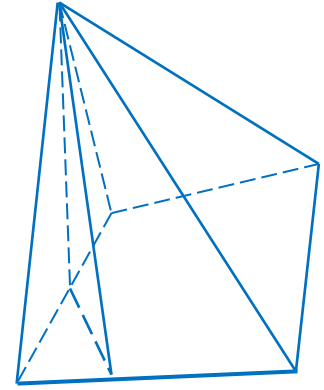
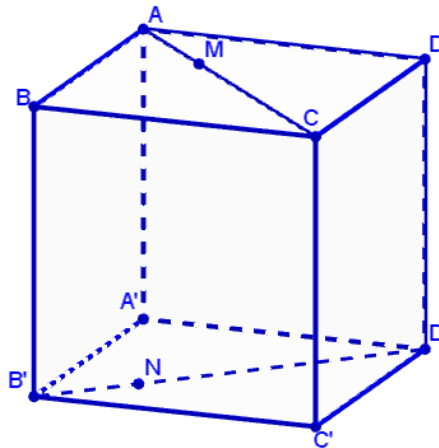
$$\text{Suy ra: } ((SAD, (ABCD)) = SMH = 60^\circ$$

$$((SCD, (ABCD)) = SNH = 60^\circ$$

$$((SCB, (ABCD)) = SPH = 60^\circ.$$

$$\text{Từ đó: } HM = HN = HP = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3}SH.(S_{\Delta HAD} + S_{\Delta HCD} + S_{\Delta HCB}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} (HM \cdot DA + HN \cdot CD + HP \cdot CB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot 8a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

**Câu 14: Chọn B**

Ta có: $(AM, NB') = 90^\circ$. $d(AM, B'N) = a$. Gọi $AM = x (x > 0)$.

$$\text{Ta có: } V_{AMNB'} = \frac{1}{6} AM \cdot B'N \cdot \sin(AM, B'N) \cdot d(AM, B'N) = \frac{1}{6} x (a\sqrt{2} - x) \cdot a \leq \frac{1}{6} a \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2}{4} = \frac{a^3}{12}.$$

Câu 15: Chọn D

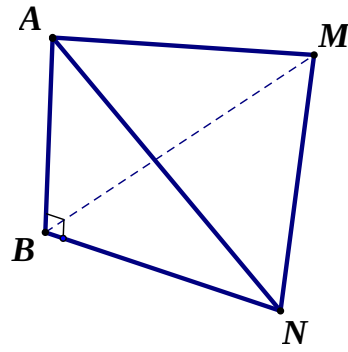
$$\text{Ta có: } S_1 = S_{\Delta CAB} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2; S_2 = S_{\Delta DAB} = \frac{2a \cdot a}{2} = a^2 \text{ và } \alpha = 30^\circ = ((CAB), (DAB))$$

$$\text{Do đó } V = \frac{2S_1 S_2 \cdot \sin \alpha}{3AB} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}a^2 \cdot a^2 \cdot \sin 30^\circ}{3 \cdot 2a} = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3$$

Câu 16: Chọn B

Áp dụng công thức tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD).$$



Đặt $AM = x, BN = y (x, y > 0)$. Từ giả thiết ta có $x + 2y = 3a$.

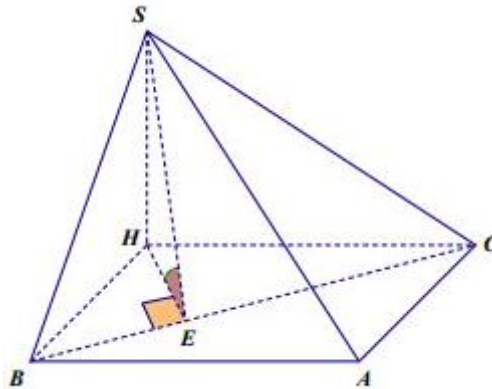
Khi đó thể tích của khối tứ diện $ABMN$ là:

$$V_{ABMN} = \frac{1}{6} AM \cdot BN \cdot d(AM; BN) \cdot \sin(\angle AM, BN) = \frac{1}{6} \cdot AM \cdot BN \cdot AB \cdot \sin 90^\circ = \frac{axy}{3}$$

$$= \frac{1}{3} a \cdot (3a - 2y) \cdot y = \frac{1}{6} a \cdot (3a - 2y) \cdot 2y \leq \frac{1}{6} a \cdot \frac{(3a - 2y + 2y)^2}{4} = \frac{3a^3}{8}.$$

Do đó, $V_{\max} = \frac{3a^3}{8}$ khi $x = 2y = \frac{3a}{2}$.

Câu 17: Chọn D



Từ S vẽ $SH \perp (ABC)$. Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow AB \perp BH$.

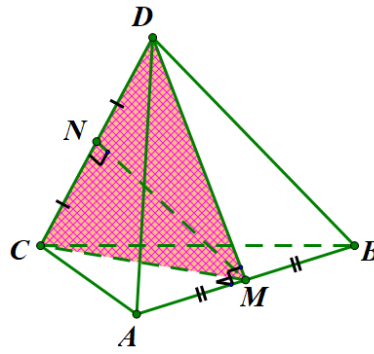
Chứng minh tương tự ta cũng có $AC \perp CH$.

Tam giác ABC vuông tại A do $AC^2 + AB^2 = BC^2$. Vậy suy ra $ABHC$ là hình chữ nhật.

Từ H vẽ $HE \perp BC$ thì $((SBC), (ABC)) = SHE = 60^\circ \Rightarrow SH = HE \cdot \sqrt{3}$.

Trong đó $HE = \frac{HB \cdot HC}{\sqrt{HB^2 + HC^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Vậy $SH = \frac{2\sqrt{15}}{5} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{15}}{15}$.

Câu 18: Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Các tam giác DAB, CAB cân nên ta có $\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CMD) \Rightarrow AB \perp MN$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $CD \perp NM$.

Ta có $V_{ABCD} = V_{A.CDM} + V_{B.CDM} = \frac{1}{3}AM.S_{CDM} + \frac{1}{3}BM.S_{CDM} = \frac{1}{6}AB.CD.NM$.

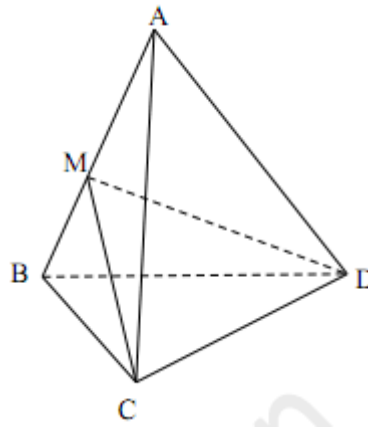
Với $AB = x, CD = 2 - x$ và

$$MN = \sqrt{MD^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(2-x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2x^2 - 12x + 12}}{2}.$$

Suy ra $V = \frac{1}{12}x(2-x)\sqrt{2x^2 - 12x + 12} = \frac{\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow x(2-x)\sqrt{2x^2 - 12x + 12} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 2$.

Câu 19: Chọn D



Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDM)$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}AB.S_{CDM} = \frac{1}{6}AB.CM.DM.\sin CMD$$

Trong đó $AB = 2a; CM = \frac{\sqrt{3}}{2}.2a = a\sqrt{3}; DM = \frac{AB}{2} = a$. Vậy $V = \frac{1}{6}.2a.a\sqrt{3}.a.\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

Câu 20: Chọn C

Ta có công thức:

$$V = \frac{2.S_{\triangle ABD}.S_{\triangle ADC}.\sin\left(\left(ABD\right);\left(ADC\right)\right)}{3.BD} \Leftrightarrow \sin\left(\left(ABD\right);\left(ADC\right)\right) = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(ABD\right);\left(ADC\right) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$$

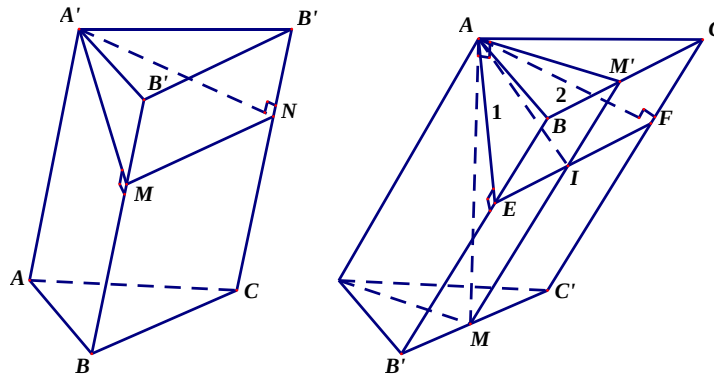
Câu 21: Chọn A

Ta có công thức diện tích đáy là $S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2} = 24$

$$V = \frac{2.S_{\triangle ABCD}.S_{\triangle SAD}.\sin\left(\left(ABCD\right);\left(ADC\right)\right)}{3.AD} = 24$$

Câu 50 : Chọn D

Bổ đề : Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, mặt phẳng (α) vuông góc các cạnh của lăng trụ và tạo với lăng trụ một thiết diện có diện tích S . Khi đó $V_{LT} = AA'.S_{A'MN}$.



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB' và CC' .

Gọi M' là trung điểm của BC , I là giao điểm của MM' và $EF \Rightarrow I$ là trung điểm của EF .

Ta có: $\begin{cases} AE \perp BB' \\ AF \perp BB' \text{ (do } AF \perp CC') \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AEF) \Rightarrow BB \perp EF$

$$\Rightarrow d(C, BB') = d(F, BB') = EF = \sqrt{5}$$

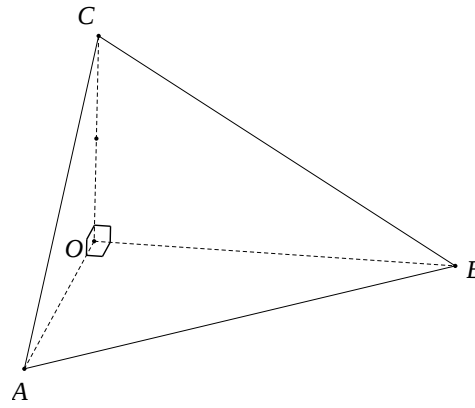
$\triangle AEF$ vuông tại $A \Rightarrow AI = \frac{1}{2}EF = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Mà $MM' \perp AI$.

$$\Rightarrow \triangle AMM' \text{ vuông tại } A, AI \text{ là đường cao} \Rightarrow AI = \frac{AM.AM'}{\sqrt{AM^2 + AM'^2}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\text{Tam giác } AA'M \text{ vuông tại } M \Rightarrow AA' = \sqrt{AM^2 + A'M^2} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{AEF} = \frac{2\sqrt{15}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.2 = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 22: Chọn B

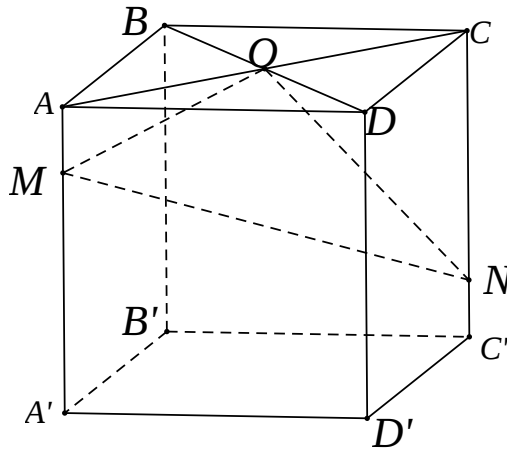


Ta có
$$\begin{cases} 2S_1 = bc \\ 2S_2 = ca \\ 2S_3 = ab \end{cases}; \tan \alpha = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{bc} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Khi đó,
$$S = \frac{S_1}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{2} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \geq \sqrt{\frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)^2} = 1.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \Rightarrow V = \frac{\left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\right)^3}{6} = \frac{\sqrt[4]{12}}{9}.$

Câu 23: Chọn B



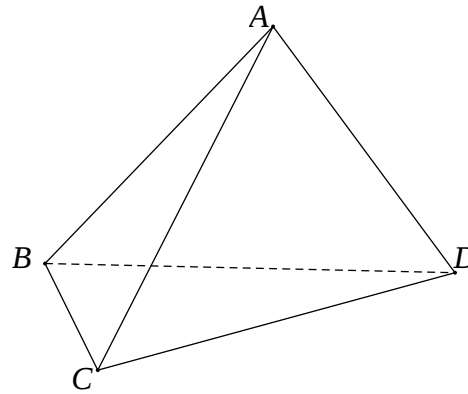
Đặt độ dài cạnh khối lập phương là x và O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD \perp (ACNM) \Rightarrow V_{BDMN} = \frac{1}{3} S_{MON} \cdot BD.$

$$S_{OMN} = S_{ACNM} - S_{OAM} - S_{OCN} = \frac{AM + CN}{2} \cdot AC - \frac{AM \cdot OA}{2} - \frac{CN \cdot OC}{2} = \frac{ax\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{BDMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{ax\sqrt{2}}{2} \cdot x\sqrt{2} = 2a^3 \Leftrightarrow x = a\sqrt{6}.$$

Câu 24: Chọn B

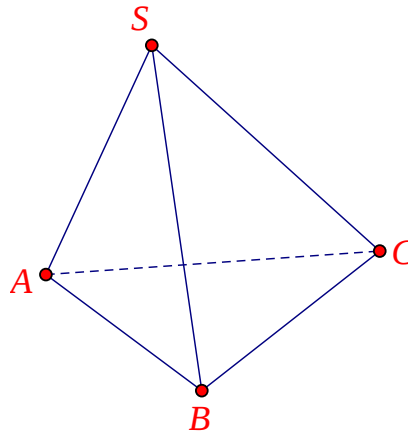


$$\text{Ta có } S_1 = S_{ABD} = \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}, \quad S_2 = S_{CAB} = \frac{AB^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Vì vậy, } V = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3AB} = \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \sin \alpha}{3\sqrt{3}a} = \frac{3a^3 \cdot \sin \alpha}{8} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Câu 25: Chọn A



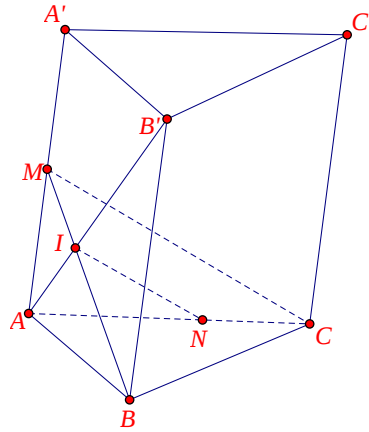
Áp dụng công thức tổng quát khi biết độ dài 6 cạnh hoặc dùng công thức góc tại đỉnh S , ta có

$$\cos ASB = \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2SA \cdot SB} = -\frac{23}{42}, \quad \cos BSC = \frac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2SB \cdot SC} = -\frac{47}{70}$$

$$\cos ASC = \frac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA \cdot SC} = -\frac{1}{15}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6} \sqrt{1 + 2 \left(-\frac{23}{42} \right) \left(-\frac{47}{70} \right) \left(-\frac{1}{15} \right) - \left(-\frac{23}{42} \right)^2 - \left(-\frac{47}{70} \right)^2 - \left(-\frac{1}{15} \right)^2} = \frac{\sqrt{2159}}{6} (cm^3).$$

Câu 26: Chọn A



Gọi $I = BM \cap AB', IN \parallel CM (N \in BC)$ có $CM \parallel (AB'N)$

$$\Rightarrow d(CM, AB') = d(C, (AB'N)) = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{Lại có } \frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{IM}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(B, (AB'N)) = 2d(C, (AB'N)) = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{Ta có } \cos ABN = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } BB' = x, \text{ thì } V_{B.AB'N} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2} = \frac{x\sqrt{2}}{9}.$$

$$\text{Mà } AB' = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad BN = \frac{4}{3} \Rightarrow NB' = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}},$$

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2 - 2AB \cdot BN \cdot \cos ABN} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

$$\cos B'AN = \frac{x^2 + x + 1 + \frac{13}{9} - \left(x^2 + \frac{16}{9}\right)}{\frac{2\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}{3}} = \frac{3x + 2}{2\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}$$

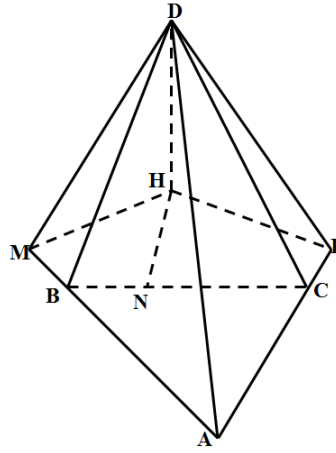
$$\Rightarrow \sin B'AN = \sqrt{1 - \frac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}}$$

$$\Rightarrow S_{AB'N} = \frac{\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}{6} \cdot \sqrt{1 - \frac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}} = \frac{\sqrt{43x^2 + 40x + 48}}{12}.$$

$$\text{Do đó } d(B, (AB'N)) = \frac{3V_{B.AB'N}}{S_{AB'N}} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{9}}{\frac{\sqrt{43x^2 + 40x + 48}}{12}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Vậy } V_{B.AB'N} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ và } \left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp DM.$$

Câu 27: Chọn D



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, BC, CA
 $DMH = DNH = DPH = 60^\circ$ (góc của các mặt $(DAB), (DBC), (DCA)$ với (ABC))
 $\Rightarrow HM = HN = HP \Rightarrow H$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC .
 Gọi r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc $A \Rightarrow r_a = HM = HN = HP$

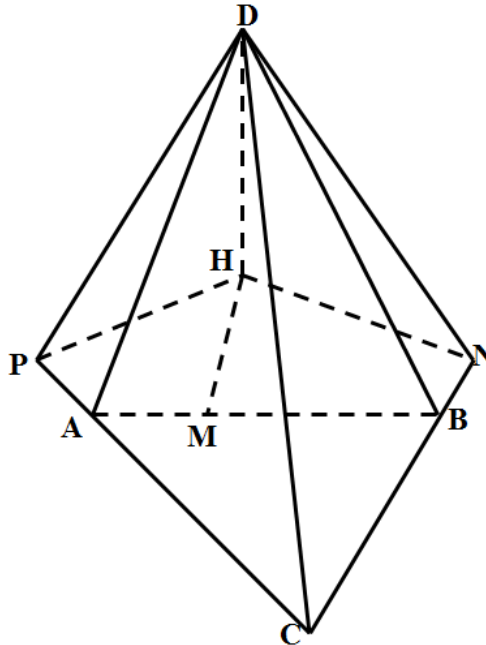
$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 6a^2$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HAC} - S_{HBC} = \frac{HM \cdot AB}{2} + \frac{HP \cdot AC}{2} - \frac{HN \cdot BC}{2} = r_a \frac{b+c-a}{2} = r_a(p-a)$$

$$\Rightarrow r_a = \frac{S_{ABC}}{p-a} = 6a. \text{ Lại có } \tan DMH = \frac{DH}{HM} \Rightarrow DH = r_a \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}a.$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3} DH \cdot S_{ABC} = 12\sqrt{3}a^3.$$

Câu 28: Chọn C



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, BC, CA
 $DMH = DNH = DPH = 60^\circ$ (góc của các mặt $(DAB), (DBC), (DCA)$ với (ABC))
 $\Rightarrow HM = HN = HP \Rightarrow H$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác ABC .
 Gọi r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp góc $C \Rightarrow r_c = HM = HN = HP$

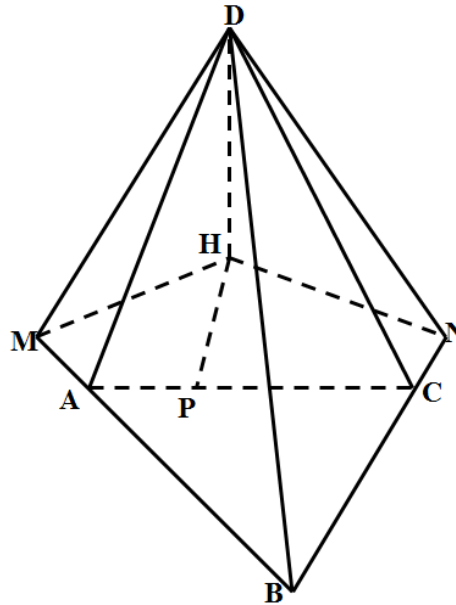
$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2} = 6a^2$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = S_{HAC} + S_{HBC} - S_{HAB} = \frac{HP.AC}{2} + \frac{HN.BC}{2} - \frac{HM.AB}{2} = r_c \frac{a+b-c}{2} = r_c(p-c)$$

$$\Rightarrow r_c = \frac{S_{ABC}}{p-c} = 2a. \text{ Lại có } \tan DMH = \frac{DH}{HM} \Rightarrow DH = r_c \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a.$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3}DH.S_{ABC} = 4\sqrt{3}a^3.$$

Câu 29: Chọn B



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, BC, CA
 $DMH = DNH = DPH = 60^\circ$ (góc của các mặt $(DAB), (DBC), (DCA)$ với (ABC))

$\Rightarrow HM = HN = HP \Rightarrow H$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác ABC .

Gọi r_b là bán kính đường tròn bàng tiếp góc $B \Rightarrow r_b = HM = HN = HP$

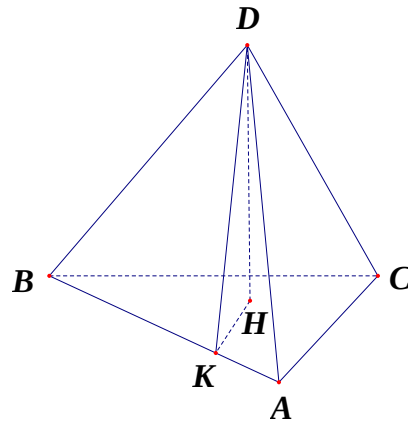
$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2} = 6a^2$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} - S_{HAC} = \frac{HM.AB}{2} + \frac{HN.BC}{2} - \frac{HP.AC}{2} = r_b \frac{a+c-b}{2} = r_b(p-b)$$

$$\Rightarrow r_b = \frac{S_{ABC}}{p-b} = 3a. \text{ Lại có } \tan DMH = \frac{DH}{HM} \Rightarrow DH = r_b \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}a.$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3}DH.S_{ABC} = 6\sqrt{3}a^3.$$

Câu 30: Chọn A



Vì góc giữa các mặt phẳng $(DAB), (DBC), (DCA)$ và mặt phẳng (ABC) bằng nhau và H nằm trong tam giác ABC nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Tam giác ABC vuông tại A , ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5a$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = 6a^2$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC , ta có:

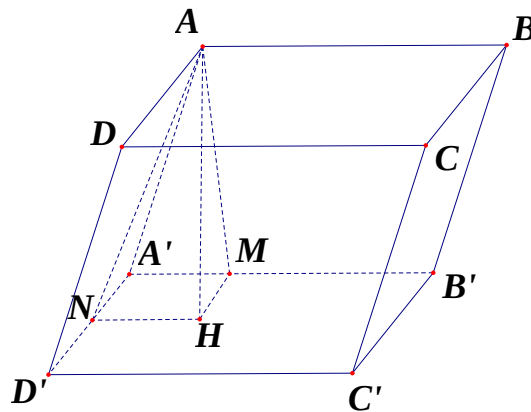
$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB + AC + BC}{2}.r \Leftrightarrow 6a^2 = 6a.r \Leftrightarrow r = a.$$

Gọi K là hình chiếu của H trên cạnh AB , suy ra góc giữa mặt phẳng (DAB) và mặt phẳng (ABC) là $DKH \Rightarrow DKH = 60^\circ$.

Tam giác DHK vuông tại H , ta có $DH = HK.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3}.DH.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.6a^2 = 2\sqrt{3}a^3.$$

Câu 31: Chọn A



Gọi H là hình chiếu của điểm A trên mặt đáy $(A'B'C'D')$, M, N lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh $A'B', A'D'$ suy ra góc giữa hai mặt bên $(ABB'A'), (ADD'A')$ với đáy lần lượt là $AMH, ANH \Rightarrow AMH = 45^\circ, ANH = 60^\circ$.

Đặt $AH = x$

Tam giác AHM vuông cân tại H , ta có $HM = AH = x$

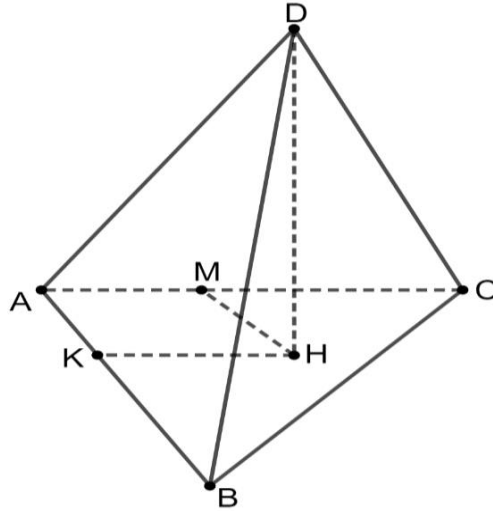
Tam giác AHN vuông tại H , ta có $HN = \frac{AH}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Theo cách dựng ta có tứ giác $A'MHN$ là hình chữ nhật, suy ra $A'H = \sqrt{HN^2 + HM^2} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

Tam giác AHA' vuông tại H , ta có $AA'^2 = AH^2 + HA'^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 + \frac{4x^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{21}}{7} (x > 0)$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AH.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{21}}{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = 3.$$

Câu 32: Chọn D



Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 6a^2$.

Hạ $DH \perp (ABC)$ ($H \in (ABC)$), $HK \perp AB$ ($K \in AB$), $HM \perp AC$ ($M \in AC$)

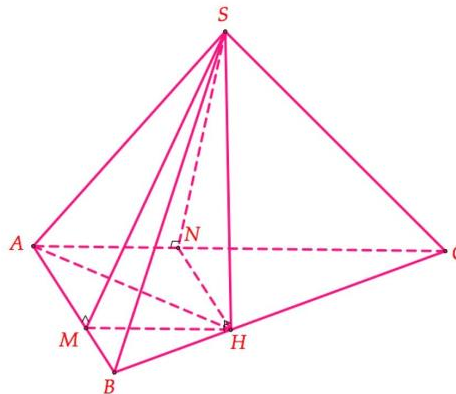
Theo định lí ba đường vuông góc chung, ta có $AB \perp DK$, $AC \perp DM \Rightarrow DKH = 45^\circ$, $DMH = 60^\circ$
Và tứ giác $HMAK$ là hình chữ nhật với $AK = HM$.

Đặt $h = DH$, ta có $HM = h \cot 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Và } AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{36a^2 - \left(\frac{h}{\sin 45^\circ}\right)^2} = \sqrt{36a^2 - 2h^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{36a^2 - 2h^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{108}{7}}a \Rightarrow V = \frac{Sh}{3} = \frac{12\sqrt{21}a^3}{7}.$$

Câu 33: Chọn A



Kẻ $SH \perp BC$ ($H \in BC$) $\Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Kẻ $HN \perp AB$ ($M \in AB$), $HN \perp AC$ ($N \in AC$) $\Rightarrow AB \perp (SHM)$, $AC \perp (SHN)$

và

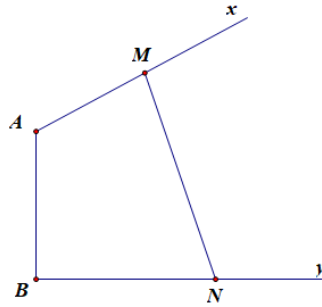
$$SNH = SMH = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có } S = \frac{ABAC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}. \text{ Với } h = SH \text{ và } HM = HN = h \cot 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ta có } S = S_{HAB} + S_{HAC} = \frac{1}{2}(AB \cdot HM + AC \cdot HN) = \frac{h}{2\sqrt{3}} \left(\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8} \Leftrightarrow h = \frac{3a}{2(\sqrt{3}+1)}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{Sh}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{8} \cdot \frac{3a}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{(3-\sqrt{3})a^3}{32}.$$

Câu 34: Chọn B



$$\text{Đặt } AM = x, BN = y. \text{ Ta có } V = \frac{AM \cdot BN \cdot \sin 60^\circ}{6} = \frac{axy\sqrt{3}}{12}.$$

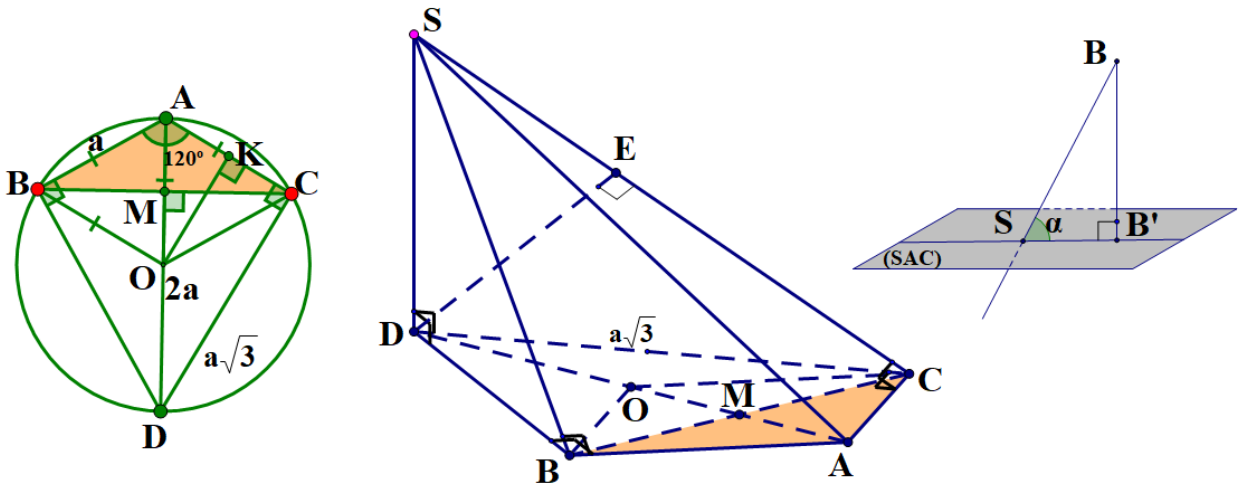
Ta tìm mối quan hệ giữa x và y theo điều kiện $MN = 2a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MN^2 &= \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN})^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN})^2 \\ &= AM^2 + BN^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} \\ &= x^2 + a^2 + y^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = x^2 + a^2 + y^2 \pm xy = 4a^2. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + y^2 \pm xy \geq 2xy \pm xy \geq xy \Leftrightarrow V \leq \frac{\sqrt{3}a^3}{4}.$$

$$\text{Trong đó } 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 2AM \cdot BN \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = \pm xy.$$

Câu 35: Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $OA = OB = OC = AB = a$.

Gọi D là hình chiếu của S trên (ABC) thì $SD \perp AB, SD \perp AC$.

$\triangle SAB, \triangle SCD$ là các tam giác cân tại S nên $SM \perp AB$, $SN \perp CD$.

Mặt khác $SM \perp CD \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến MN .

Kẻ $SH \perp MN (H \in MN) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

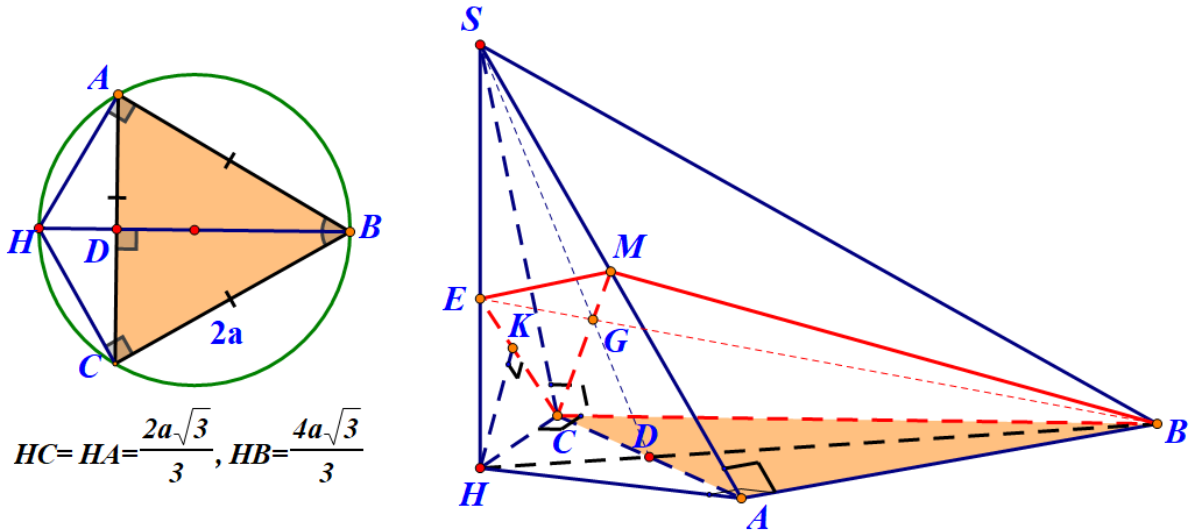
$SM \perp Sx, SN \perp Sx$ nên góc $[(SAB); (SCD)] = (SM; SN) = MSN = 90^\circ$.

$$\frac{7a^2}{10} = S_{SAB} + S_{SCD} = \frac{1}{2} AB \cdot SM + \frac{1}{2} CD \cdot SN \xrightarrow{AB=CD} \frac{7a^2}{10} = \frac{1}{2} AB (SM + SN) \Rightarrow SM + SN = \frac{7a}{5}.$$

$$SM^2 + SN^2 = MN^2 = a^2 \Rightarrow SM \cdot SN = \frac{(SM + SN)^2 - (SM^2 + SN^2)}{2} = \frac{12a^2}{25}.$$

$$\text{Vậy } SH = \frac{SM \cdot SN}{MN} = \frac{12a}{25} \rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{4a^3}{25}.$$

Câu 38: Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) . Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCH) \Rightarrow BC \perp HC. \text{ Tương tự ta có } BA \perp AH.$$

Suy ra H thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC . Do đó, H thuộc đường thẳng BD sao cho $\overrightarrow{HD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DB}$, với D là trung điểm cạnh AC .

Ta có tứ giác $ABCH$ nội tiếp đường tròn bán kính BH .

$$\triangle ABC \text{ đều cạnh } 2a \Rightarrow BD = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có: } \frac{BD}{BH} = \frac{3}{4} \Rightarrow BH = \frac{4BD}{3} = \frac{4}{3}a\sqrt{3}; HA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi $G = CM \cap SD$, $E = BD \cap SH$ thì G là trọng tâm $\triangle SAC$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác $\triangle SDH$ với ba điểm E, G, B thẳng hàng, ta có

$$\frac{SE}{EH} \cdot \frac{HB}{BD} \cdot \frac{DG}{GS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SE}{EH} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{SE}{EH} = \frac{3}{2}.$$

$$d(A; (BCM)) = d(S; (BCM)) = \frac{SE}{HE} d(H; (BCM)) \Rightarrow d(H; (BCM)) = \frac{2}{3} d(A; (BCM)) = \frac{4a\sqrt{21}}{21}.$$

Gọi K là hình chiếu của H trên CE thì K là hình chiếu của H trên (BCM)

$$\Rightarrow CK = d(H; (BCM)) = \frac{4a\sqrt{21}}{21}.$$

$$\Delta HCE \text{ vuông tại } H, \text{ đường cao } HK \Rightarrow \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HC^2} = \frac{9}{16a^2} \Rightarrow HE = \frac{4a}{3}.$$

$$SH = \frac{5}{2}HE = \frac{10a}{3}.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{10\sqrt{3}a^3}{9}.$$

Câu 39: Chọn A

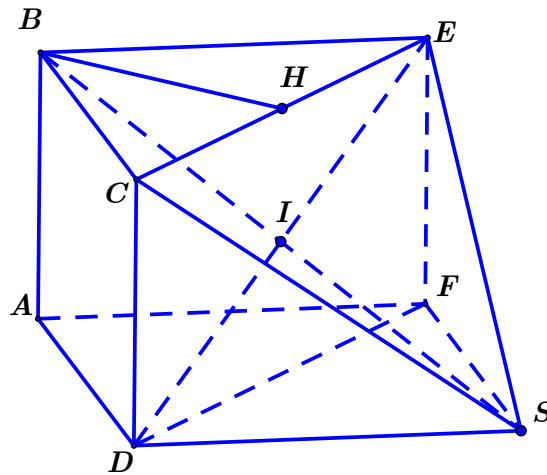
Áp dụng công thức tính thể tích của tứ diện gần đều, ta có:

$$\begin{aligned} V_{S.ABC} &= \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + z^2 - y^2)(y^2 + z^2 - x^2)} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{(12 - 2z^2)(12 - 2y^2)(12 - 2x^2)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{(6 - z^2)(6 - y^2)(6 - x^2)} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(6 - z^2)(6 - y^2)(6 - x^2)} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$(6 - z^2)(6 - y^2)(6 - x^2) \leq \left(\frac{6 - z^2 + 6 - y^2 + 6 - x^2}{3} \right)^3 = 2^3 = 8.$$

$$\text{Do đó: } V_{S.ABC} \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{8} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = 2.$$

Câu 40: Chọn D

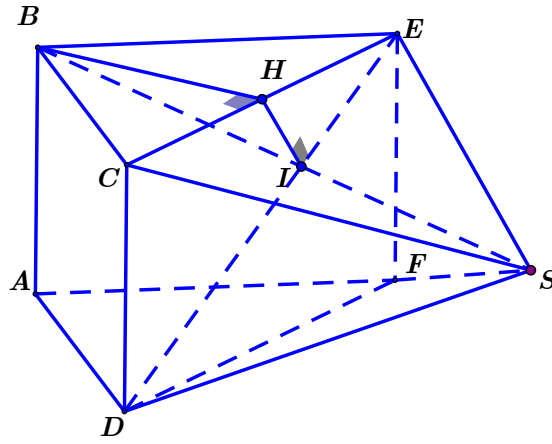
Ta có $ADE.BCF$ là một lăng trụ đứng có đáy $\triangle ADE$ là tam giác vuông cân tại A với $AD = AE = 1$, cạnh bên $AB = 1$.

Gọi I là trung điểm DE thì $BI = SI$ nên $d(S; (ADE)) = d(B; (ADE)) = BH$.

$$\text{Ta có } V_{S.CDFE} = \frac{1}{3} \cdot d(S, (CDEF)) \cdot S_{CDEF} = \frac{1}{3} \cdot BH \cdot CD \cdot CE = \frac{1}{3}.$$

$$V_{BCE.ADF} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BE \cdot AB = \frac{1}{2}. \text{ Khi đó: } V_{ABCDSEF} = V_{BCE.ADF} + V_{S.CDEF} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Câu 41: Chọn D



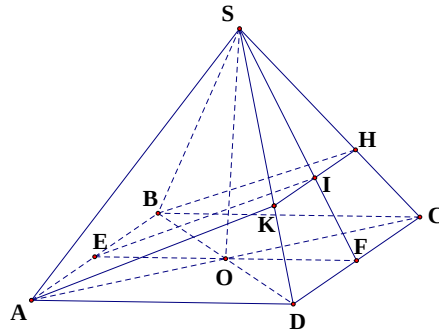
Ta có $ADE.BCF$ là một lăng trụ đứng có đáy $\triangle ADE$ là tam giác vuông cân tại A với $AD = AE = 1$, cạnh bên $AB = 1$, do đó $V_{BCE.ADF} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BE \cdot AB = \frac{1}{2}$.

Gọi H là trung điểm CE và I là hình chiếu vuông góc của H trên DE , Khi đó ta có BI vuông góc DE với tại I và $BI = SI$ nên $d(S; (ADE)) = d(B; (ADE)) = BH$.

Ta có $V_{S.CDFE} = \frac{1}{3} \cdot d(S, (CDEF)) \cdot S_{CDEF} = \frac{1}{3} \cdot BH \cdot CD \cdot CE = \frac{1}{3}$.

Khi đó: $V_{ABCDSEF} = V_{BCE.ADF} + V_{S.CDFE} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Câu 42: Chọn A



Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD .

Chiều cao của khối chóp là $h = \frac{1}{2} \tan 75^\circ = \frac{1}{2} \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{2(1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ)} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

Và $SE = \sqrt{h^2 + OE^2} = \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Thể tích khối chóp tứ giác đều là $V_0 = \frac{Sh}{3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{6}$.

Ta có $(SEF) \perp AB$. Kẻ $EI \cap SF = I$ sao cho $IEF = 45^\circ$ khi đó $(P) \equiv (ABI)$ và $(P) \cap (SCD) = HK // CD // AB$.

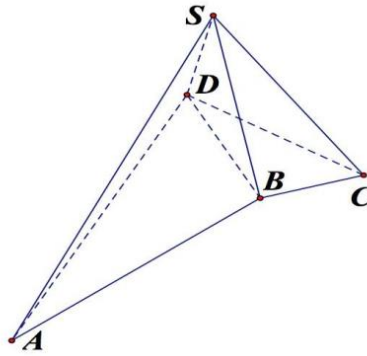
Trong tam giác $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SH$ có:

$$\frac{IS}{IF} = \frac{S_{SEI}}{S_{IEF}} = \frac{\sin SEI}{\sin IEF} = \frac{SE \cdot \sin 30^\circ}{FE \cdot \sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{SI}{SF} = \frac{5+2\sqrt{3}}{13}.$$

Do đó theo tỉ số thể tích có:

$$V_s = \frac{SH}{SC} \cdot \left(\frac{1}{2}V_0\right) + \frac{SK}{SD} \cdot \left(\frac{1}{2}V_0\right) = \frac{SI}{SF} \cdot \frac{1}{2}V_0 + \frac{SI}{SF} \cdot \frac{1}{2}V_0 = \frac{SI}{SF} \cdot V_0 = \frac{16+9\sqrt{3}}{78}.$$

Câu 43: Chọn A



Có $BC = \sqrt{10}a$, $S_{ABC} = \frac{3a^2}{2}$ và áp dụng công thức thể tích tứ diện khi biết ba góc của mặt bên tạo với đáy.

$$V = \frac{2S^2}{3(a \cot \alpha + b \cot \beta + c \cot \gamma)} = \frac{2\left(\frac{3a^2}{2}\right)^2}{3(\sqrt{10}a \cdot 0 + a \cot \alpha + 3a \cot \beta)}$$

$$= \frac{3a^3}{2(\cot \alpha + 3 \tan \alpha)} \leq \frac{3a^3}{4\sqrt{\cot \alpha \cdot 3 \tan \alpha}} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}.$$

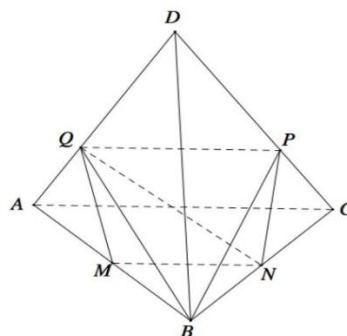
Câu 44: Chọn B

Ta có thể tích của khối tứ diện đều cạnh $a = 1$ là $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$

Ta có $\frac{V_{S.ABD}}{V} = SA \cdot SB \cdot SD = 12 \Rightarrow V_{S.ABD} = \sqrt{2}$ và $\frac{V_{S.CBD}}{V} = SC \cdot SB \cdot SD = 6 \Rightarrow V_{S.CBD} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 45: Chọn B



Ta có thiết diện của (MNP) và tứ diện là hình thang $MNPQ$ trong đó $MN \parallel PQ$

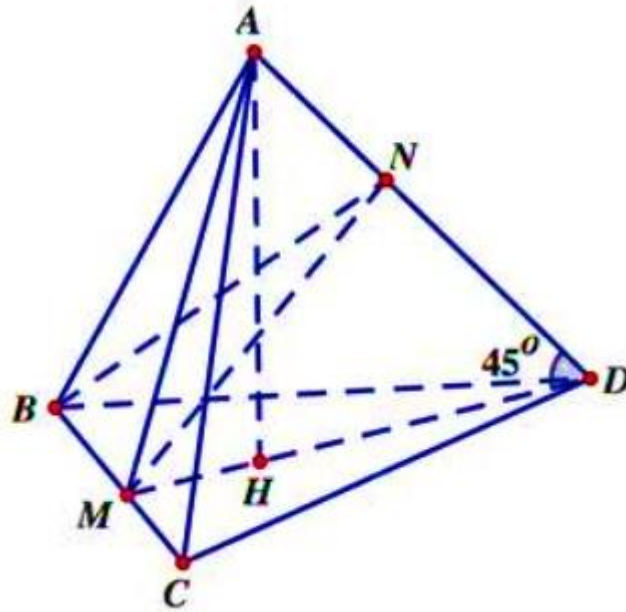
$$\text{Có } V_{BMNPQD} = V_{D.BPQ} + V_{B.MNQ} + V_{Q.BNP}; V_{D.BPQ} = \frac{4}{9} V_{ABCD}$$

$$V_{Q.MBN} = \frac{1}{3} S_{MBN} \cdot d(Q, (MBN)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} \cdot \frac{1}{3} d(D, (ABC)) = \frac{1}{12} V_{ABCD}$$

$$V_{Q.BPN} = \frac{1}{3} S_{PBN} \cdot d(Q, (PBN)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} S_{BCD} \cdot \frac{2}{3} d(A, (PBN)) = \frac{1}{9} V_{ABCD}$$

$$V_{BMNPQD} = \frac{23}{36} V_{ABCD} = \frac{23}{36} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{23\sqrt{2}}{432}.$$

Câu 46: Chọn D



$$\text{Ta có } \overrightarrow{ADBC} = \overrightarrow{ADAC} - \overrightarrow{ADAB} = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$$

Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD) ; $M = DH \cap BC$ suy ra M nằm giữa BC .

$$\text{Do } \left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp DM.$$

Trong (ADM) dựng $MN \perp AD$ tại N suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AD, BC

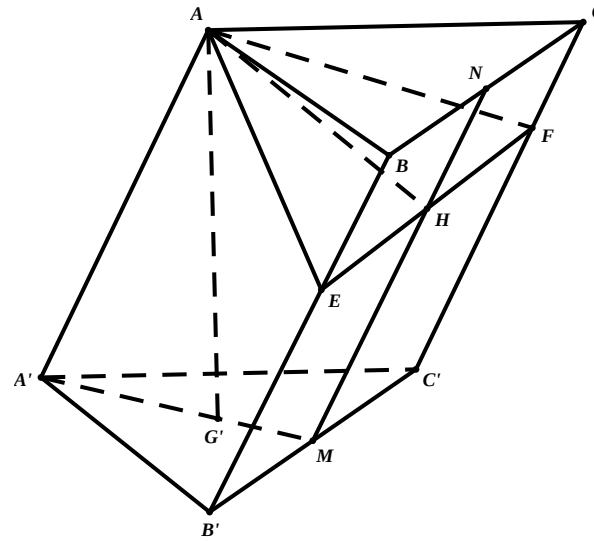
$$\Rightarrow MN = \frac{5a}{4}. \text{ Ta thấy góc giữa } AD \text{ và } (BCD) \text{ là } \angle ADH = 45^\circ.$$

$$\text{Ta có } DM = MN\sqrt{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \frac{a\sqrt{110}}{4}.$$

$$\Rightarrow AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{AB^2 - (BM^2 + MN^2)} = \frac{3a}{4}; DN = MN = \frac{5a}{4}.$$

$$\text{Do đó } AD = AN + DN = 2a.$$

Câu 47: Chọn D



Kẻ $AE \perp BB'$, $AF \perp CC' \Rightarrow (AEF) \perp AA' \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{AEF}$.

Ta có $AE = d(A, BB') = 1$, $AF = d(A, CC') = \sqrt{3}$, $EF = d(C, BB') = 2$.

Vì tam giác AEF vuông tại A và $S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M , N lần lượt là trung điểm các cạnh $B'C'$, BC và $H = MN \cap EF \Rightarrow AH \perp MN$ (do $MN \parallel AA'$) và H là trung điểm $EF \Rightarrow AH = \frac{EF}{2} = 1$.

Ta có $A'G' = \frac{4}{3} \Rightarrow A'M = \frac{3}{2} A'G' = 2$.

Hình bình hành $AA'MN$ có $S_{AA'MN} = AG' \cdot A'M = AH \cdot MN \Leftrightarrow 2 \sqrt{AA'^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1 \cdot AA'$

$\Leftrightarrow AA' = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{9} = \frac{4}{3}$.

Câu 48: Chọn D

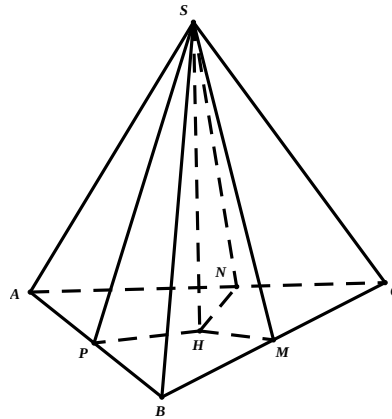
Ta có $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{4}$ và $S_{ABA'} = \frac{1}{2} S_{ABB'A'} = \frac{1}{2} BB' \cdot d(A, BB') = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$.

Và $S_{ACA'} = \frac{1}{2} S_{ACC'A'} = \frac{1}{2} CC' \cdot d(A, CC') = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\sin((ABB'A'), (ACC'A')) = \frac{3AA' \cdot S_{A'.ABC}}{2 \cdot S_{ABA'} \cdot S_{ACA'}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $\cos((ABB'A'), (ACC'A')) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Câu 49: Chọn B



Diện tích mặt đáy $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$; diện tích các mặt bên (SBC) ; (SCA) , (SAB) kí hiệu lần lượt là S_1 , S_2 , S_3 . Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) và M , N , P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên BC , CA , AB . Khi đó các góc SMH , SNH , SPH lần lượt là góc giữa các mặt bên (SBC) ; (SCA) , (SAB) và đáy (ABC) .

Theo định lý diện tích hình chiếu vuông góc, ta có: $S_1 = \frac{S_{HBC}}{\cos SMC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot HM}{\frac{HM}{SM}} = \frac{1}{2} BC \cdot SM$

$$= \frac{1}{2} SM = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + HM^2}. \text{ Tương tự có } S_2 = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + HN^2}, S_3 = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + HP^2}.$$

Mặt khác $3V = S \cdot d(S, (ABC)) = S_1 \cdot d(A, (SBC)) = S_2 \cdot d(B, (SCA)) = S_3 \cdot d(C, (SAB))$.

$$\text{Suy ra } \frac{\sqrt{3}}{4} h = \frac{\sqrt{6}}{8} \sqrt{h^2 + HM^2} = \frac{\sqrt{15}}{20} \sqrt{h^2 + HN^2} = \frac{\sqrt{30}}{40} \sqrt{h^2 + HP^2} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } HM + HN + HP = \frac{2S_{HBC}}{BC} + \frac{2S_{HCA}}{CA} + \frac{2S_{HAB}}{AB} = 2(S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}) = 2S = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2).$$

$$\text{Kết hợp (1), (2) suy ra } h = \frac{\sqrt{3}}{12} \text{ và } V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{48}.$$

Câu 50: Chọn D

$$\text{Diện tích đáy } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Chiều cao khối lăng trụ xác định bởi: } \cos \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - \frac{h^2}{\sin^2 \alpha}} \cdot \sqrt{d^2 - \frac{h^2}{\sin^2 \beta}} - h^2 \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta}{d^2 - h^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{1-2h^2} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{3}h^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}h^2}{1-h^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{3}{31}}. \text{ Vậy } V = S \cdot h = \frac{\sqrt{93}}{124}.$$

Câu 51: Chọn A

$$\text{Diện tích đáy } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{35}{4}.$$

Chiều cao khối chóp xác định bởi: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - \frac{h^2}{\sin^2 \alpha}} \cdot \sqrt{d^2 - \frac{h^2}{\sin^2 \beta}} - h^2 \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta}{d^2 - h^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{9-2h^2} \cdot \sqrt{9-4h^2} - \sqrt{3}h^2}{9-h^2} \Leftrightarrow h = \frac{3}{\sqrt{29}}. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{35\sqrt{29}}{116}.$$

Câu 52: Chọn A.

Diện tích đáy $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{21}}{2}.$

Chiều cao khối chóp xác định bởi: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - \frac{h^2}{\sin^2 \alpha}} \cdot \sqrt{d^2 - \frac{h^2}{\sin^2 \beta}} - h^2 \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta}{d^2 - h^2}$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\sqrt{1-2h^2} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{3}h^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}h^2}{1-h^2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{21}}{7}. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{2}.$$

Câu 53: Chọn D

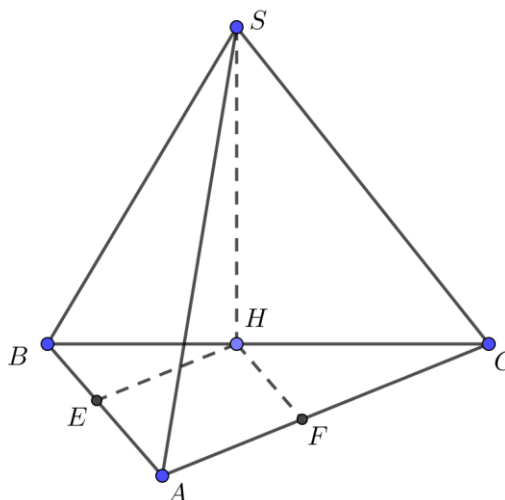
Có $V = \frac{2S^2}{3(a \cdot \cot \alpha + b \cdot \cot \beta + c \cdot \cot \gamma)} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3(2 \cdot \cot 30^\circ + \sqrt{3} \cdot \cot 45^\circ + 1 \cdot \cot 60^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{20}$

Câu 54: Chọn A

Có $V = \frac{2S^2}{3(a \cdot \cot \alpha + b \cdot \cot \beta + c \cdot \cot \gamma)} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3\left(2 \cdot \cot \alpha + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Câu 55: Chọn B



Kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$, kẻ $HE \perp AB, HF \perp AC$

Ta có: $\angle SEH = \angle SFH = 60^\circ$ và $HE = SH \cdot \cot 60^\circ = h \cdot \cot 60^\circ$, $HF = SH \cdot \cot 60^\circ = h \cdot \cot 60^\circ$

$$\text{Diện tích đáy bằng } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = a^2$$

$$\Rightarrow S = S_{HAB} + S_{HAC} = \frac{1}{2} (AB \cdot HE + AC \cdot HF) = \frac{1}{2} (a \cdot h \cdot \cot 60^\circ + 2a \cdot h \cdot \cot 60^\circ)$$

$$\text{Vậy } h = \frac{2S}{\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$$

Cách 2.

$$\text{Có } V = \frac{2S^2}{3(a \cdot \cot \alpha + b \cdot \cot \beta + c \cdot \cot \gamma)} = \frac{2a^4}{3\left(a\sqrt{5} \cdot 0 + 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$$

Câu 56: Chọn A

$$\text{Có } V = \frac{2S^2}{3(a \cdot \cot \alpha + b \cdot \cot \beta + c \cdot \cot \gamma + d \cdot \cot \delta)} = \frac{2\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3\left(a \cdot 0 + a \cdot \sqrt{3} + a \cdot 1 + a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{(4\sqrt{3} - 3)a^3}{26}$$

Câu 57: Chọn A

$$\text{Khối tứ diện vuông } AMNP \text{ có } V_{AMNP} = \frac{1}{6} \cdot AM \cdot AN \cdot AP$$

$$\text{Theo quy tắc hình hộp, có: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = \frac{AB}{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{AD}{AN} \cdot \overrightarrow{AN} + \frac{AA'}{AP} \cdot \overrightarrow{AP}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{AM} \overrightarrow{AM} + \frac{2}{AN} \overrightarrow{AN} + \frac{3}{AP} \overrightarrow{AP}$$

$$\text{Vì bốn điểm } M, N, P, C' \text{ đồng phẳng nên } \frac{1}{AM} + \frac{2}{AN} + \frac{3}{AP} = 1$$

Vì vậy theo bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$1 = \frac{1}{AM} + \frac{2}{AN} + \frac{3}{AP} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{AM} \cdot \frac{1}{AN} \cdot \frac{1}{AP}} \Rightarrow AM \cdot AN \cdot AP \geq 6 \cdot 27 \Rightarrow V_{AMNP} \geq 27$$

Câu 58: Chọn C

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{6} AD \cdot BC \cdot d(AD, BC) \cdot \sin(AD, BC) = \frac{1}{6} \cdot AD \cdot BC \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} AD$$

Ta đi tính độ dài đoạn thẳng AD dựa trên giả thiết $CD \perp AD$, $(AD, BC) = 60^\circ$, $AB \perp AD, AB \perp BC$

$$\text{Có: } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2} = \frac{AC^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2}{2}$$

$$= \frac{(AB^2 + BC^2) + (AB^2 + AD^2) - (AC^2 - AD^2) - AB^2}{2} = \frac{AB^2 + 2AD^2 + BC^2 - AC^2}{2} = AD^2$$

$$\text{Và } |\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}| = |AD \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})| = \frac{a \cdot AD}{2}. \text{ Vậy } \frac{a \cdot AD}{2} = AD^2 \Leftrightarrow AD = \frac{a}{2}$$

$$\text{Do đó: } V_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$$

Câu 59: Chọn B

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh BC, AD . Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp DE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADE) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp EF \\ BC \perp AD \end{cases}.$$

$$\Delta ABC = \Delta DCB \Rightarrow AE = DE \Rightarrow EF \perp AD \Rightarrow EF = d(AD, BC).$$

Vậy

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AD \cdot BC \cdot d(AD, BC) \cdot \sin(AD, BC) = \frac{1}{6} AD \cdot BC \cdot FE.$$

Ta

có

$$FE = \sqrt{AE^2 - \frac{AD^2}{4}} = \sqrt{\left(AB^2 - \frac{BC^2}{4}\right) - \frac{AD^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{BC^2}{4} - \frac{AD^2}{4}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{ABCD} &= \frac{1}{6} AD \cdot BC \cdot \sqrt{1 - \frac{BC^2}{4} - \frac{AD^2}{4}} = \frac{1}{12} \sqrt{AD^2 \cdot BC^2 \cdot (4 - AD^2 - BC^2)} \\ &\leq \frac{1}{12} \sqrt{\left(\frac{AD^2 + BC^2 + 4 - AD^2 - BC^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}. \end{aligned}$$

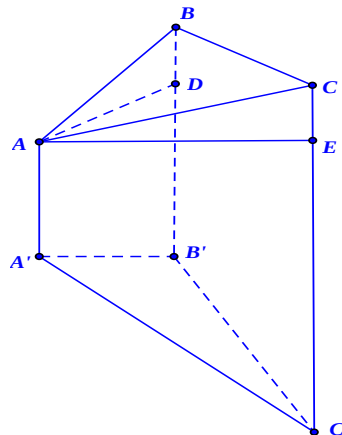
$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow AD^2 = BC^2 = 4 - AD^2 - BC^2 \Leftrightarrow AD = BC = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow FE = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 60: Chọn C

$$\text{Ta có } d(O, (ABC)) = \frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{4} = \frac{1}{d^2(O, (ABC))} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \geq 3\sqrt{\frac{1}{OA^2} \cdot \frac{1}{OB^2} \cdot \frac{1}{OC^2}}.$$

$$\text{Suy ra } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC \geq \frac{\sqrt{12^3}}{6} = 4\sqrt{3}.$$

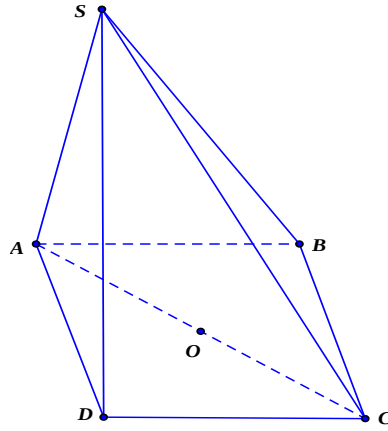
Câu 61: Chọn D

Hạ $AD \perp BB'$ và $AE \perp CC'$ suy ra $(ADE) \perp AA' // BB' // CC'$ và $AD = 1, AE = \sqrt{3}, DE = 2$.

$$\text{Ta có } S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ADE} \cdot \frac{AA' + BB' + CC'}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1+2+3}{3} = \sqrt{3}.$$

Câu 62: Chọn A

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) . Ta có



$$\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD) \Rightarrow BA \perp AD \text{ và } \begin{cases} BC \perp CS \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp CD.$$

$$\text{Vậy } ABCD \text{ là hình chữ nhật tâm } O \text{ và } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SD = \frac{1}{6} \cdot BA \cdot BC \cdot SD = \frac{\sqrt{2}a^2}{6} SD.$$

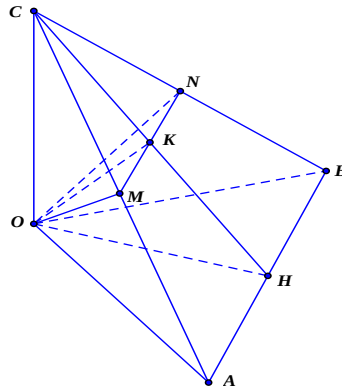
Đặt $SD = x$ ta có $d(B, (SAC)) = d(D, (SAC))$ và tứ diện $DSAC$ vuông tại D nên

$$\frac{1}{d^2(D, (SAC))} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow d(D, (SAC)) = \frac{\sqrt{2}xa}{\sqrt{3x^2 + 2a^2}} \text{ và}$$

$$\sin(SB, (SAC)) = \frac{d(B, (SAC))}{SB} = \frac{d(D, (SAC))}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{2}xa}{\sqrt{3x^2 + 2a^2}}}{\sqrt{x^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{11}}{11} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}a \ (x > a).$$

$$\text{Do đó } V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}.$$

Câu 63: Chọn A



Kẻ $OH \perp AB, OK \perp CH$ suy ra

$$OK \perp (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (OMN) \Rightarrow OK \subset (OMN) \Rightarrow K \in MN.$$

Ta có $\begin{cases} OA = OB = \sqrt{2} \\ OC = OH = 1 \end{cases} \Rightarrow H, K$ lần lượt là trung điểm của AB, CH .

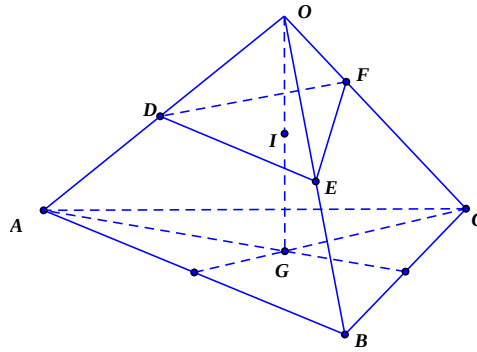
Ta có $2\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{CK} = \frac{CA}{CM}\overrightarrow{CM} + \frac{CB}{CN}\overrightarrow{CN}$.

Do M, K, N thẳng hàng nên $\frac{CA}{CM} + \frac{CB}{CN} = 4$.

Vậy $4 = \frac{CA}{CM} + \frac{CB}{CN} \geq 2\sqrt{\frac{CA}{CM} \cdot \frac{CB}{CN}} \Leftrightarrow \frac{CA}{CM} \cdot \frac{CB}{CN} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} \geq \frac{1}{4}$.

Vì vậy $\frac{V_{OAMNB}}{V_{OABC}} = \frac{S_{AMNB}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{CMN}}{S_{CAB}} = 1 - \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow V_{OAMNB} \leq \frac{3}{4}V_{OABC} = \frac{1}{4}$.

Câu 64: Chọn A



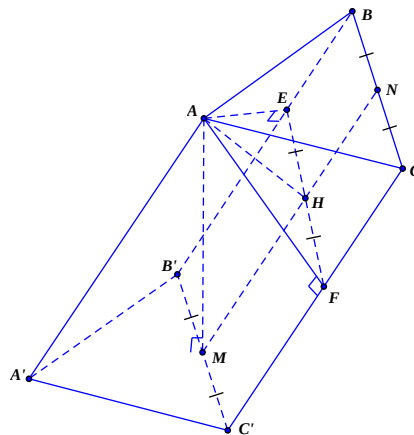
Ta có $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{OI} = \frac{OA}{OD}\overrightarrow{OD} + \frac{OB}{OE}\overrightarrow{OE} + \frac{OC}{OF}\overrightarrow{OF}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{OI} = \frac{1}{OD}\overrightarrow{OD} + \frac{2}{OE}\overrightarrow{OE} + \frac{3}{OF}\overrightarrow{OF}$.

Do D, E, F, I đồng phẳng nên ta có $\frac{1}{OD} + \frac{2}{OE} + \frac{3}{OF} = 6$.

Vậy $6 = \frac{1}{OD} + \frac{2}{OE} + \frac{3}{OF} \geq 3\sqrt{\frac{1}{OD} \cdot \frac{2}{OE} \cdot \frac{3}{OF}} \Rightarrow OD \cdot OE \cdot OF \leq \frac{4}{3} \Rightarrow V_{ODEF} \leq \frac{2}{9}$.

Câu 65: Chọn D



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB', CC' .

Ta có $AE = 1, AF = 2$ và $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ nên

$AE \perp AA', AF \perp AA' \Rightarrow (EFA) \perp AA' \Rightarrow EF \perp AA'$. Do đó $FE = d(C, BB') = \sqrt{5}$.

Gọi N là trung điểm của BC , $H = FE \cap MN \Rightarrow AH \perp MN$ ($MN \parallel AA'$).

Ta có H là trung điểm của FE và $AE^2 + AF^2 = EF^2 = 5$ nên $AH = \frac{FE}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông AMN có $AN = A'M$ và :

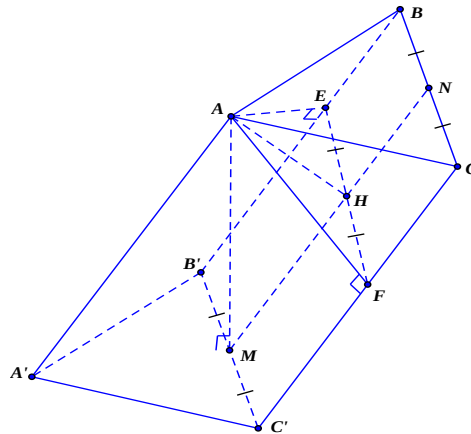
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{5 + \frac{15}{9}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Mặt khác do $\begin{cases} AM \perp (A'B'C') \\ AA' \perp (AEF) \end{cases} \Rightarrow ((A'B'C'), (AEF)) = (AM, AA') = MAA' = 60^\circ$.

Tam giác AEF là hình chiếu vuông góc của tam giác $A'B'C'$ lên mặt phẳng (AEF) . Vì vậy theo định lý hình chiếu ta có:

$$S_{A'B'C'} = \frac{S_{AEF}}{\cos MAA'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1.2}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = 2 \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'} \cdot AM = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 66: Chọn A



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB', CC' .

Ta có $AE = 1, AF = 2$ và $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ nên $AE \perp AA', AF \perp AA' \Rightarrow (EFA) \perp AA'$.

Do đó $EAF = ((ABB'A'), (ACC'A')) = 90^\circ \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

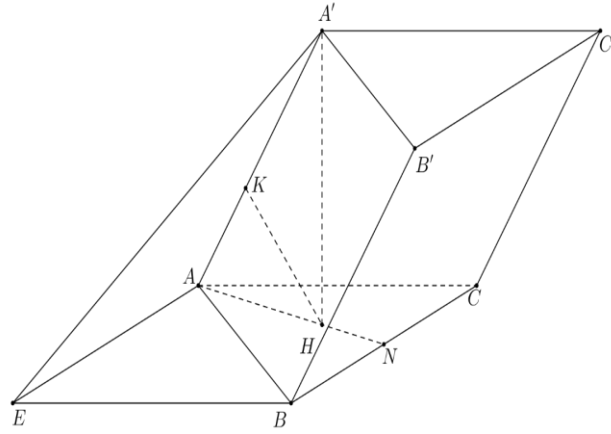
Gọi N là trung điểm của BC , $H = FE \cap MN \Rightarrow AH \perp MN$ ($MN \parallel AA'$).

Ta có H là trung điểm của FE và $AH = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{AE^2 + AF^2}}{2} = 1$.

Tam giác vuông AMN có $AN = A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ và

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AM = 2 \Rightarrow AA' = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{AEF} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2.$$

Câu 67: Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A' lên $(ABC) \Rightarrow H$ là trọng tâm tam giác ABC .

N là trung điểm BC , dựng hình bình hành $ACBE$.

$$\text{Ta có } d(AA'; BC) = d(BC; (A'AE)) = d(N; (A'AE)) = \frac{3}{2}d(H; (A'AE)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

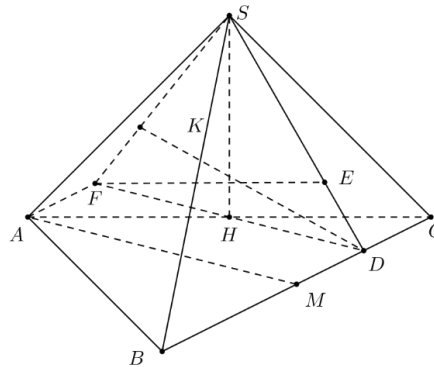
$$\Rightarrow d(H; (A'AE)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Kẻ $HK \perp A'A$, khi đó ta chứng minh được $HK \perp (A'AE)$ nên $d(H; A'AE) = HK$.

$$\text{Xét } \triangle A'AH \text{ có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HA'^2} \Rightarrow A'H = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Do đó } V_{A'.BB'C'C} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.A'H.S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}.$$

Câu 68: Chọn B



Gọi M là trung điểm BC , D là hình chiếu của S lên BC . Dựng hình chữ nhật $AMDF$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} DF \perp BC \\ SD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SDF).$$

Từ D , F lần lượt kẻ $DK \perp SF$ ($K \in SF$), $FE \perp SD$ ($E \in SD$).

Ta cso $BC \perp (SDF) \Rightarrow BC \perp EF$. Mặt khác $EF \perp SD \Rightarrow d(A; (SBC)) = d(E; (SBC)) = EF$.

$$\text{Tương tự, ta có } d(SA; BC) = d(D; (SAF)) = DK \text{ do } \begin{cases} AF \perp (SDF) \\ DK \perp SF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DK \perp SF \\ DK \perp AF \end{cases}.$$

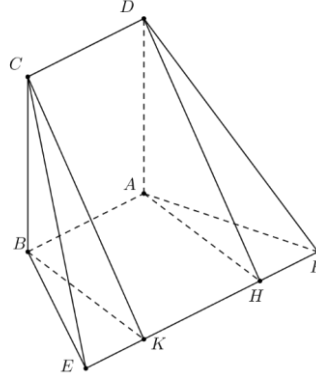
Theo giả thiết, ta có $EF = DK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. Do đó $\triangle SDF$ cân tại S .

Khi đó hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm H của DF hay trung điểm AC .

Xét hai tam giác đồng dạng ΔSDF và ΔFDE có $\frac{SH}{EF} = \frac{DH}{DE} = \frac{\frac{1}{2}AM}{\sqrt{DF^2 - EF^2}} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}.$$

Câu 69: Chọn A

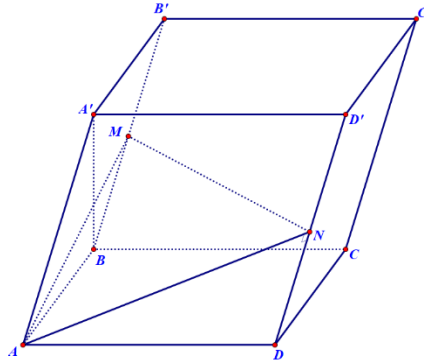


Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên EF .

Khi đó $FH = EK = a \Rightarrow AH = BK = a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{ABCDEF} &= V_{D.AHF} + V_{C.CEK} + V_{DAH.CAK} = \frac{1}{3} \cdot DA \cdot S_{\Delta AFH} + \frac{1}{3} \cdot BC \cdot S_{\Delta CEK} + AB \cdot S_{\Delta BCK} \\ &= \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a + a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{5a^3\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

Câu 70: Chọn C



Hạ $AM \perp BB'$ và $AN \perp DD' \Rightarrow (AMN) \perp AA'$

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{ABD.A'B'D'} = 2S_{\Delta AMN} \cdot AA'$

$$\text{Vì } \begin{cases} (BB'C'C) \parallel (ADD'A') \\ (C'CDD') \parallel (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow [(ABB'A'), (ADD'A')] = [(BB'C'C), (C'CDD')] = 60^\circ.$$

$$\text{Khi đó } \angle MAN = 60^\circ \text{ hoặc } \angle MAN = 120^\circ \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Hình bình hành } ABB'A' \text{ có } S_{ABB'A'} = AM \cdot BB' = A'B \cdot AB \Leftrightarrow 1 \cdot AA' = \frac{AA'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{AA'}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AA' = 2.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = \sqrt{3}.$$

