**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán ta thấy được ta chỉ giải được phương trình này trên tập số thực dương.

Thật vậy với thì 

Mặt khác ta biến đổi phương trình đã cho trở thành: 

Với phương trình (1) ta lại thấy rằng nếu  thì phương trình vô nghiệm. Do đó ta chỉ cần xét phương trình trong khoảng 

Sử dụng máy tính ta biết được phương trình này có nghiệm duy nhất  Từ đó ta đi đến lời giải cho bài toán như sau.

**Cách giải:** Với thì 

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:



Với phương trình (1) ta thấy rằng nếu  thì phương trình vô nghiệm. Do đó ta chỉ cần xét phương trình trong khoảng 

Lúc đó phương trình (1) được biến đổi thành:

 





Với  thì 

Do đó từ (2) ta có  

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình 

**- Bình luận.** Việc chia khoảng nghiệm chính xác phương trình có thể có là một việc làm hết sức quan trọng trong bài toán này, vì khi đó phần còn lại được đánh giá rất chặt và dễ dàng. Điều này đã làm giảm đi sự khó khăn cho bài toán, một điều đáng lưu ý và cần thiết cần có khi giải bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.

**Ví dụ 5.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Đây là bài toán khá hay để chứng tỏ được sức mạnh của phương pháp nhân lượng liên hợp và kỉ thuật truy ngược dấu biểu thức liên hợp. Thật vậy, sử dụng máy tính ta biết được nghiệm của phương trình đã cho là  Điều này có nghĩa rằng ta cần phải tạo ra nhân tử là một tam thức bậc hai  Tuy nhiên với các hệ số như bài toán đang có ta sẽ sử dụng kỉ thuật truy ngược dấu biểu thức liên hợp để tạo thuận lợi trong việc đánh giá.

Tức là thay vì ta dùng biểu thức liên hợp dạng: 

Ta sẽ dùng ngược lại như sau: 

Với việc sử dụng ngược này tức là ta đã có một động thái đảo dấu rất có lợi trong khi giải quyết phần còn lại khi bắt được nhân tử.

**Cách giải:** Điều kiện 

Với  phương trình đã cho được nghiệm đúng.

Với  ta biến đổi phương trình đã cho thành phương trình:









Với  ta có:  

Lại có:  

Do đó từ (1) ta có:  .

Đối chiếu điều kiện  ta có .

Kết hợp lại ta có nghiệm của phương trình là  

**- Bình luận.** Việc chỉ ra nghiệm  trước lí do như ví dụ trên, việc nhân hệ số 2 trước khi phân tích có được là do trong quá trình tìm các hệ số bất định để tạo biểu thức liên hợp có chứa phân số có mẫu là 2. Sử dụng kỉ thuật truy ngược đặc biệt có lợi cho các bài toán mà hệ số của chúng có cách đặt để như nhân hệ số trước cân bằng một biểu thức chứa biến. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp thì cả “thuận” và “ngược” đều có lời giải tối ưu.

**Ví dụ 6.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán và sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm duy nhất 

Ta để ý thấy rằng: 

Từ đó ta đi đến lời giải cho bài toán như sau:

**Cách giải:** Điều kiện  Lúc đó phương trình đã cho được biến đổi như sau:





Ta có: 

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchuy ta có:

 

Từ các nhận xét này (1) cho ta  

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Bài toán trên không khó về mặt tạo nhân tử nhưng lại có khó khăn trong phần đánh giá. Việc sử dụng các bất đẳng thức cơ bản quen thuộc để đánh giá là một việc hết sức cần thiết trong phương pháp nhân lượng liên hợp khi mà chúng ta không cách nào để tránh đánh giá.

**Ví dụ 7.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát phương trình này, ta để ý thấy được giữa hai đại lượng bậc ba có cùng số 5 nên ta thử ghép chúng lại bằng phép trừ để khử hệ số ta thu được điều gì?

Ta có: 

Đại lượng vừa thu được gần giống biểu thức chứa trong căn vì ta chỉ cần thực hiện phép biến đổi sau: 

Với hai nhận xét này, ta đã biết nhân tử chung cần tìm chính là đại lượng mà cả hai bước phân tích trên đã chỉ ra.

Từ đó ta đi đến lời giải cho bài toán.

**Cách giải:** Điều kiện  

Phương trình đã cho được biến đổi trở thành phương trình sau:







 

Với   (thỏa điều kiện).

Với  





 vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm 

**Tổng kết.** Với bài toán này việc phân tích được nhân tử chung là do một phần bài toán có dấu hiệu quá đặc biệt. Tuy nhiên trên thực tế và qua các bài toán đã biết ở phần phương pháp các bạn đều biết để sử dụng phép liên hợp thành công thì việc sử dụng máy tính để đoán được nghiệm của phương trình trước là điều không thể bỏ qua nên cho dù phương trình có nghiệm chẵn hay lẻ ta đều có thể sử dụng máy tính để tìm nghiệm của phương trình và bắt nhân tử chung. Các bạn hãy xem kỷ phần phụ lục của chúng tôi trong việc tìm nghiệm bằng máy tính.

Kết thúc phần câu hỏi này ở ví dụ 9, hy vọng rằng với những phân tích ở những góc nhìn khác nhau và những bài toán khác nhau đã phần nào giải quyết được câu trả lời là đứng trước một phương trình vô tỷ ta cần giải quyết thế nào? Và vì sao phải chọn phương pháp liên hợp để giải. Ưu và nhược điểm và cách khắc phục đánh giá thì từ các bài toán ở chương I đến lúc này, chắc đã trả lời được phần lớn các câu hỏi mà chúng tôi đã đặt ra. Lưu ý rằng, trong quá trình liên hợp sau khi bắt nhân tử chung không phải lúc nào chúng ta cũng thu được một kết quả vô nghiệm, sự có nghiệm trở lại sau khi liên hợp sẽ được chúng tôi phân tích ở các bài toán sau.

**4. Khi nào nên sử dụng phương pháp đánh giá?**

Có một số lớp bài toán phương trình vô tỷ mà khi sử dụng các phương pháp khác cho lời giải khá dài và rắc rối và cũng có khi với những phương pháp đó cũng không thể giải quyết được bài toán, khi đó phương pháp đánh giá sẽ được tính đến. Những phương trình vô tỷ giải bằng phương pháp đánh giá thường là những phương trình thường có những dấu hiệu đó là nếu chia trên từng khoảng nghiệm của phương trình ta thu được những điều vô lý và phương trình chỉ đúng trên một hoặc hai giá trị nào đó mà thôi. Cũng có khi dấu hiệu nằm ở hình thức phương trình gợi cho ảnh của một trong những hằng đẳng thức cơ bản, cũng có khi cần đến hàm số để đánh giá. Điều đó nhắm đến để sử dụng đánh giá phương trình ta cần có những kỉ năng hết sức khéo léo và đủ mạnh để có thể thành công. Để vén một phần bí mật và giúp cho độc giả có thể hình dung câu hỏi đặt ra được giải quyết thế nào, cộng với các bài toán đã xét trong phương pháp ở chương I, hãy xem xét các ví dụ sau.

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Sử dụng máy tính ta có nghiệm duy nhất của phương trình là  Điều này gợi ý cho chúng ta sẽ liên hợp phương trình này. Tuy nhiên nếu ta để ý xuất phát từ điều kiện của phương trình là 

Khi đó ta có:  và 

Điều này gợi cho chúng ta mạnh dạn đánh giá phương trình này cho lời giải gọn gàng.

**Cách giải:** Điều kiện  Với điều kiện này, ta có hai đánh giá sau:



Dấu  xảy ra khi và chỉ khi 

 Dấu  xảy ra khi và chỉ khi 

Từ hai đánh giá này ta có: 

Do đó đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận 1.** Việc chỉ ra nghiệm  trước lí do như ví dụ trên, việc nhân hệ số 2 trước khi phân tích có được là do trong quá trình tìm các hệ số bất định để tạo biểu thức liên hợp có chứa phân số có mẫu là 2. Sử dụng kỉ thuật truy ngược đặc biệt có lợi cho các bài toán mà hệ số của chúng có cách đặt để như nhân hệ số trước căn bằng một biểu thức chứa biến. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp thì cả “thuận” và “ngược” đều có lời giải tối ưu.

**- Bình luận 2.** Với sự tinh tế khéo léo cách phát hiện từ điều kiện thì hai vế phương trình đều sẽ có dạng đã giúp chúng ta có lời giải bằng đánh giá gọn nhẹ. Đây là một trong những hướng đánh giá rất quan trọng và thường gặp rất nhiều trong phương trình vô tỷ, có thể đó là phương pháp đánh giá trực tiếp để giải phương trình, cũng có khi đó chính là lối đi để xử lí phần còn lại trong phương trình khi ta đã xử lí bằng các phương pháp khác.

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Phương trình này chứa căn bậc cao nên rõ ràng các phương pháp khác đã xét đến không thể triệt phá nỗi phương trình này, dù ta biết phương trình này có nghiệm duy nhất  Do đó ta sẽ chuyển hướng đánh giá phương trình xung quanh nghiệm có được. Tức là ta sẽ siết chặt lại miền nghiệm của phương trình.

**Cách giải:** Nhận xét  thỏa phương trình đã cho.

Với   nên phương trình vô nghiệm.

Với   nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Với phương trình có bậc khá cao thì việc sử dụng đánh giá loại phương trình này có thể là tối ưu nhất. Kỉ thuật siết chặt miền nghiệm ở lời giải trên là một lối đi đáng để chú ý khi giải phương trình bằng phương pháp đánh giá. Cái khó của lối đánh giá này chính là ta cần chỉ ra được quanh vùng nghiệm chỉ ra ta cần so sánh với điều gì? Ở bài toán khi cho  thì hai vế phương trình đều bằng 1, nên chúng tôi đã tập trung quanh vùng của số 0 để so sánh hai vế phương trình với số 1.

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán ta thấy được các đại lượng trong căn thức là một tam thức bậc hai luôn dương, một phương trình trùng phương đưa về tam thức bậc hai cũng luôn dương. Một điều tự nhiên, khi gặp các đại lượng tam thức bậc hai dương là tách chúng về dạng .

Ta có:  

 

Do đó ta có: 

Lại có:  

Với nhận xét này ta đã hình dung được cách giải của bài toán.

**Cách giải:**

Ta có: 

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  Mặt khác ta lại có:



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Với bài toán này ta bắt được sự đánh giá do có sự nhận xét về các đại lượng dương trong căn thức nên cho phép ta tách các hằng đẳng thức dư và dấu bằng xảy ra tại cùng một vị trí, mặt khác kết hợp với vế phải phương trình là một tam thức bậc hai luôn âm và khi thay giá trị để có đẳng thức ở vế trái lại cho đúng bằng giá trị. Đây cũng là một trong những yếu tố đánh giá quen thuộc.

**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Với bài toán hình thức này việc tìm điều kiện trước tiên là ưu tiên hàng đầu.

Điều kiện  

Từ điều kiện này ta có ngay được: 

Vậy vấn đề còn lại ta chỉ cần chỉ ra được: 

Bình phương hai vế, ta thu được: 

Tới nay, đã xem như đánh giá thành công.

**Cách giải:** Điều kiện  

Từ điều kiện này ta có ngay được: 

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Mặt khác từ điều kiện ta luôn có: 

Thật vậy, bình phương hai vế bất phương trình ta có:

  (luôn đúng).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Từ các đánh giá này ta có: 

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Bài toán này từ điều kiện ta có ngay được một đánh giá, do đó bài toán trở nên đánh giá khá đơn giản. Sử dụng phép biến đổi tương đương để hoàn thiện đánh giá là một việc rất thường dùng.

**Ví dụ 5.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán và sử dụng máy tính ta biết được nghiệm duy nhất của phương trình là  Tới nay khả năng có thể nghĩ đến lúc này là phương pháp nhân lượng liên hợp vì hai phương án nâng lũy thừa và ẩn phụ hóa là hoàn toàn không khả thi. Tuy nhiên với cấu tạo của bài toán thì việc sử dụng phương pháp liên hợp cũng khả thi. Mặt khác, ta nhớ rằng với phương trình vô tỷ thì cho dù phương pháp nào thì mục đích chính cũng là thoát căn thức. Với các điều vừa lưu ý thì để giải bài toán này ta sẽ chọn lối đánh giá, cộng với việc cần phải thoát căn thức nên một điều tự nhiên ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức Cauchuy (AM – GM) sao cho dấu đẳng thức phải xảy ra tại 

Để có được điều đó ta phân tích như sau:



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  

Với   Từ đó ta có: 



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:  

Cho   nên ta có: 

**Cách giải:** Điều kiện 

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có các đánh giá:



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:  



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:  

Với hai đánh giá này từ phương trình đã cho ta có:

 .

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:  

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Bài toán có lối đánh giá thoát căn bằng bất đẳng thức Cauchuy, một trong những yếu tố rất được ưa chuộng trong lối đánh giá. Tiếp theo ta xét một bài toán có lối đánh giá giống như vậy.

**Ví dụ 6.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Ta sẽ tập trung đánh giá phương trình này bằng bất đẳng thức AM – GM quen thuộc để tạo được nghiệm của phương trình là 

**Cách giải:** Điều kiện 

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM – GM ta có các đánh giá:

 





Cộng vế theo vế các đánh giá này ta thu được: 

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Kết cấu hình thức của phương trình giúp chúng ta liên tưởng đến phương án chọn để giải quyết là phương án đánh giá.

**Ví dụ 7.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Hình thức bài toán ở vế trái gợi cho chúng ta liên tưởng đến việc ẩn phụ hóa bài toán này, tuy nhiên chúng ta sẽ không đạt được kết quả như mong muốn, vì vế phải phương trình chứa một căn thức có chứa đại lượng tam thức bậc 2. Mặt khác vế trái phương trình có hình thức gợi tả một bất đẳng thức quen thuộc, đó là bất đẳng thức Bunhiacopxki (B.C.S). Bất đẳng thức B.C.S được viết dưới dạng.

 Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: 

Mặt khác khi sử dụng máy tính ta biết được phương trình này vô nghiệm.

Từ đó ta đi vào hướng giải quyết bài toán như sau:

**Cách giải:** Điều kiện:  

Nhận xét với  không thỏa phương trình đã cho.

Với  ta sử dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:  

 



Với (1) ta có: 

Mà với:   



Do đó (1) vô nghiệm nên dấu đẳng thức không xảy ra.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**- Bình luận.** Qua bài toán này, ta thấy được rằng đôi lúc hình thức phương trình có thể gợi lên cho chúng ta một hình ảnh bất đẳng thức nào đó rồi ta sử dụng phép đánh giá phù hợp từ bất đẳng thức đó ta sẽ tạo được lời giải cho bài toán.