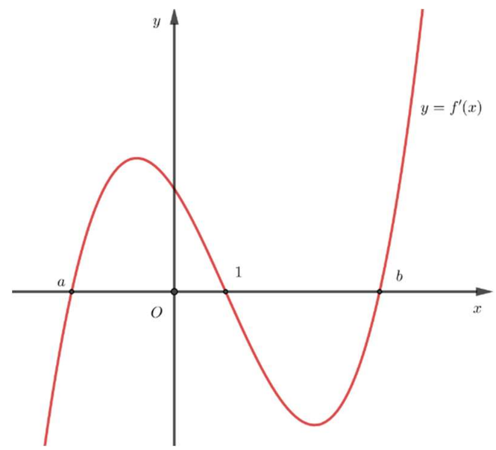
ĐỀ VDC SỐ 09 Cực trị chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m\in[-21;21]$ để hàm số $f\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên R và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)=x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|2x+1|-1\right)$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R và có biểu thức đạo hàm $y=f'(x)=x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|2x+m|-m\right)$ có đúng ba điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

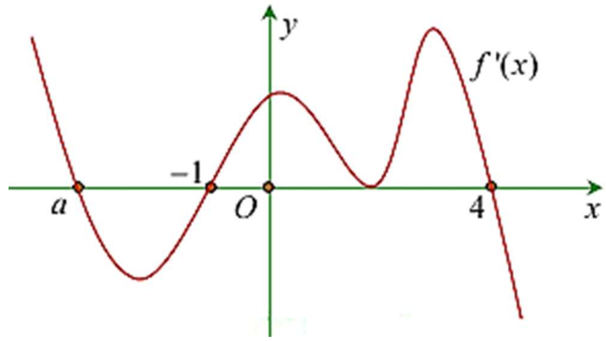
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x)=x(x-m)(x-6+m)$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(|3x-2|+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x)=x\left(x^2-2mx+12+m\right)$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(\left|2x-m^2\right|+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

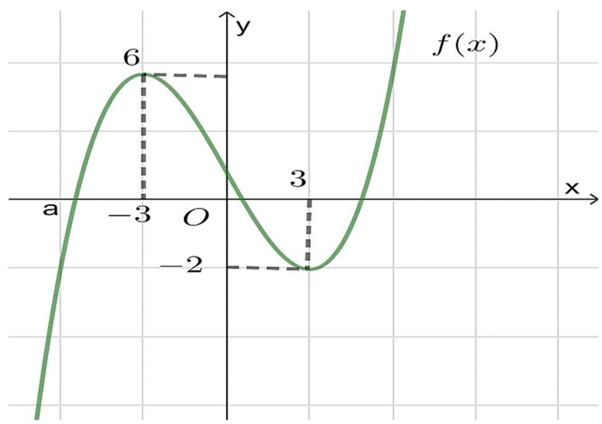
A. 27. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 29

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(\left|x^3-3m^2x\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 29. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 22

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f(x) - m|)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 2(m-4)x - 1 & neu \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 3 \end{array}\right. \\ 4x^2 - 2(m-a)x + b & neu\, 1 < x < 3 \end{cases}$, với a và b là những số thực xác định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx + n & neu\ x < -1 \\ x^2 + nx + m - 9 & neu\ x \ge -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 36. **C.** 11. **D.** 5

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|x^2 - 4x + 3| + mx)$ có 9 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 31

Câu 11: Cho hàm số $y = |x-1| + |x+1| + |x-2| - 2x + 1$. Hàm số đạt cực tiểu tại

A. $x = 2$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = -1$ **D.** $x = 0$

Câu 12: Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|-m^2x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=|x-1|+3|x-2|+5|x-3|+mx$; với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** vô số.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-n|$. với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?

A. 1010. **B.** 1011. **C.** 1009. **D.** 2020.

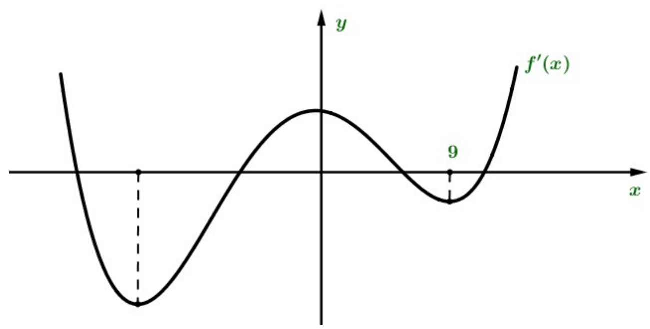
Câu 15: Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=|x^2-4x+3|+|x+1|$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 16: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=|x^2-2mx+1|+4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Số phần tử của tập S là

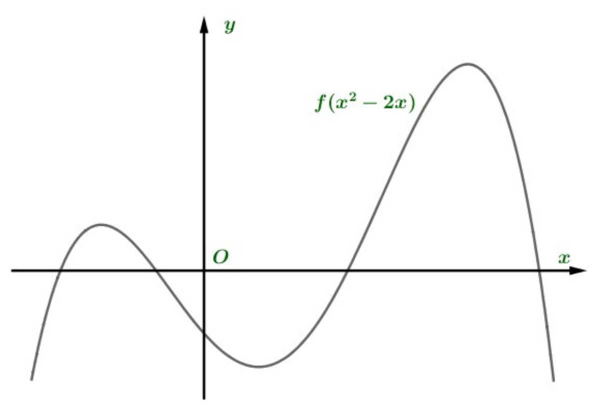
A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(6|x|-x^2)$ có số điểm cực trị là.



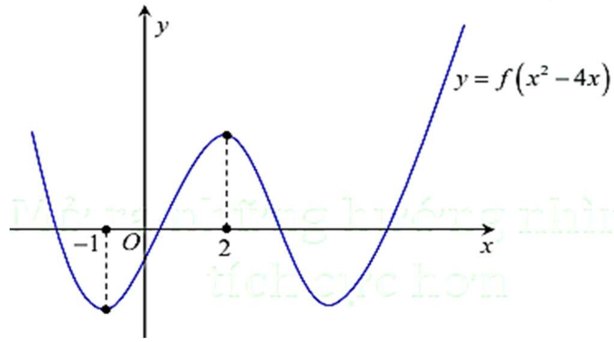
A. 9. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 11

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x^2-x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2mx-|x-m|+m^2)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



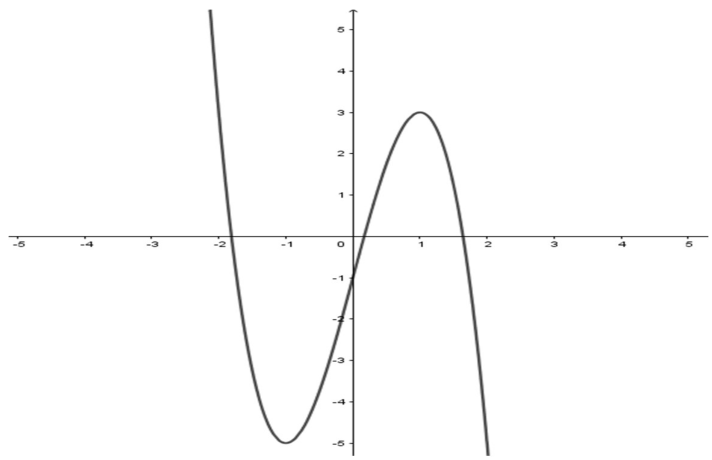
A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-8|x|+12\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f(|x|+|x-1|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

BẢNG ĐÁP ÁN

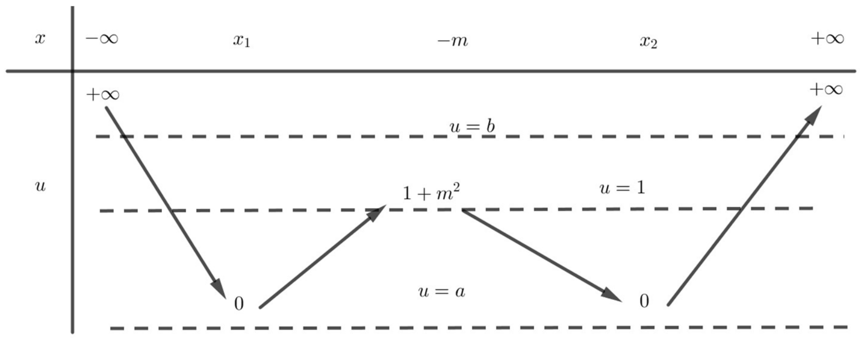
1. A	2. B	3. C	4.D	5.B	6.A	7. C	8. D	9.D	10.B
11.A	12.C	13.B	14.B	15.B	16.C	17.D	18.C	19.D	20.B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là: $x = a < 0; x = 1; x = b > 1$

Xét hàm số $f\left(\left|x^2 + 2mx - 1\right|\right) = f(u)$. Ta có bảng biến thiên của $u = \left|x^2 + 2mx - 1\right|$ như sau:



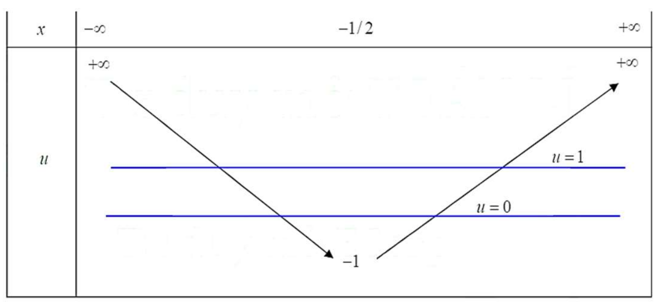
Do SĐCT$\{u\} = 3$ nên để hàm số $f(u)$ có 7 điểm cực trị thì SNBL$\left\{\begin{bmatrix} u = a \\ u = b \\ u = 1 \end{bmatrix}\right\} = 4 \Rightarrow 1 \geq 1 + m^2$

$\Rightarrow m = 0$. Vậy có 1 giá trị của tham số m.

Câu 2: **Chọn B**

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x = 0; x = 1$.

Xét hàm số $y = f\left(|2x+1| - 1\right) = f(u)$. Bảng biến thiên của $u = |2x+1| - 1$ như sau:

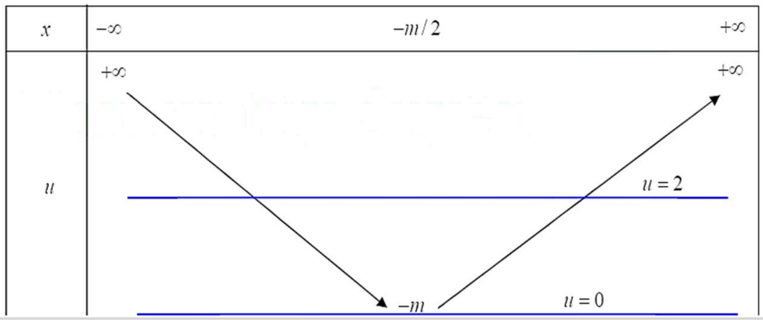


Ta có SĐCT $f(u) =$ SĐCT$\{u\}$ + SNBL $\left\{\begin{bmatrix} u = 0 \\ u = 1 \end{bmatrix}\right\} = 4 + 1 = 5$.

Câu 3: **Chọn C**

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x = 0; x = 2$.

Xét hàm số $y = f\left(|2x+m| - m\right) = f(u)$. Bảng biến thiên của $u = |2x+m| - m$ như sau:



Ta có SĐCT $f(u)=$ SĐCT $\{u\}+$ SNBL $\left\{\begin{bmatrix} u=0 \\ u=2 \end{bmatrix}\right\}$

$\Leftrightarrow 3=1+SNBL\left\{\begin{bmatrix} u=1 \\ u=2 \end{bmatrix}\right\} \Leftrightarrow SNBL\left\{\begin{bmatrix} u=1 \\ u=2 \end{bmatrix}\right\}=2$

Suy ra $0 \le -m < 2$ hay $-2 < m \le 0 \to m \in \{-1;0\}$.

Câu 4: Chọn D

Nhận xét: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi đó $y=f(|ax+b|+c)$ luôn có cực trị tại điểm $x=-\dfrac{b}{a}$.

$y=f(|3x-2|+1)=\begin{cases} f(3x-1) \ \ khi\, x>\dfrac{2}{3} \\ f(-3x+3) \ \ khi\, x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$, tại $x=\dfrac{2}{3}$ là một điểm cực trị của hàm số.

$$y'=\begin{cases} 3f'(3x-1) \ \ khi\, x>\dfrac{2}{3} \\ -3f'(-3x+3) \ \ khi\, x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y'=\begin{cases} 3(3x-1)(3x-1-m)(3x-7+m) \quad khi\ x>\dfrac{2}{3} \\ -3(-3x+3)(-3x+3-m)(-3x-3+m) \ \ khi\ x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Hàm số có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác $\dfrac{2}{3}$

Khi:

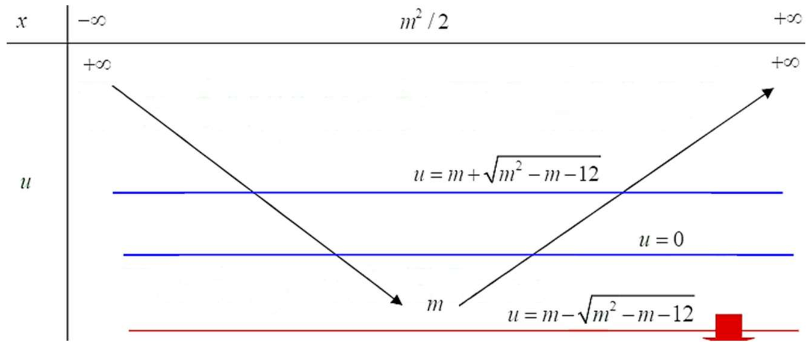
$$x>\frac{2}{3} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1+m}{3}>\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{7-m}{3}>\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 1<m<5 \\ x_1 \ne x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<m<5 \\ \dfrac{1+m}{3} \ne \dfrac{7-m}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<m<5 \\ m \ne 3 \end{cases}$$

Khi $x<\dfrac{2}{3} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=\dfrac{3-m}{3}<\dfrac{2}{3} \\ x_4=\dfrac{m-3}{3}<\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 1<m<5 \\ x_3 \ne x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<m<5 \\ m \ne 3 \end{cases}$

Vậy $m \in (1;5) \setminus \{3\}$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 5: Xét hàm số $f\left(\left|2x-m^2\right|+m\right)=f\left(u\right)$

Bảng biến thiên của hàm số $u=\left|2x-m^2\right|+m$ như sau



Ta có số điểm cực trị của hàm số u là 1 điểm.

Nhận xét, nếu hàm số $f\left(x\right)$ có đúng 1 điểm cực trị thì cùng lắm hàm số $f\left(u\right)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, xét trường hợp $m^2-m-12>0\Leftrightarrow m<-3\vee m>4$ thì hàm số $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị là $x=0;x=m\pm\sqrt{m^2-m-12}$

Áp dụng công thức:

Số điểm cực trị $f\left(u\right)=$ số điểm cực trị u + số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l}u=0\\u=m-\sqrt{m^2-m-12}\\u=m+\sqrt{m^2-m-12}\end{array}\right.$ suy ra $\begin{cases}m<0\\m\neq-12\end{cases}$ kết hợp với điều kiện $m<-3\vee m>4$ suy ra $\begin{cases}m<-3\\m\neq12\end{cases}$ và $\begin{cases}m\in\left[-30;30\right]\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}$ suy ra có 26 giá trị nguyên.

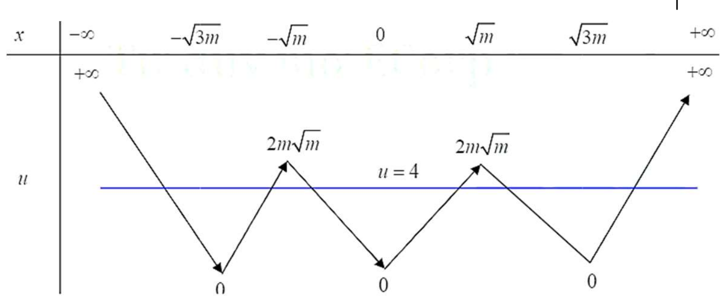
Câu 6: Hàm số đạt cực trị tại $x=a<-1;x=-1;x=4$

Xét hàm số $f\left(\left|x^3-3mx\right|\right)=f\left(u\right)$

Bảng biến thiên của hàm số $u=\left|x^3-3mx\right|\geq0$ suy ra chỉ có phương trình $u=\left|x^3-3mx\right|=4$ cho ta nghiệm bội lẻ.

Nếu $m\leq0$ suy ra số điểm cực trị u là 1, suy ra số nghiệm bội lẻ của phương trình $u=4$ tối đa 2 nghiệm bội lẻ. Không thỏa yêu cầu.

Khi $m>0$ số điểm cực trị u là 5, ta có bảng biến thiên của hàm số $u=\left|x^3-3mx\right|$



Áp dụng công thức:

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(u\right)$ = Số nghiệm bội lẻ của phương trình $u=4$ + số điểm cực trị của u.

Suy ra $\begin{cases} m>0 \\ 2m\sqrt{m}>4 \end{cases} \Leftrightarrow m>\sqrt[3]{4}$ kết hợp $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in\left[-30;30\right] \end{cases}$ suy ra có 29 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 7: Chọn C

Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Ta lại có: $g'\left(x\right)=f\left(\left|f\left(x\right)-m\right|\right)=\dfrac{f(x)-m}{\left|f\left(x\right)-m\right|}.f'\left(x\right).f'\left(\left|f\left(x\right)-m\right|\right)$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=0 \\ \left|f\left(x\right)-m\right|=0 \\ \left|f\left(x\right)-m\right|=3 \\ \left|f\left(x\right)-m\right|=-3\ \left(ptvn\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=\pm3 & \\ f\left(x\right)=m & (1) \\ f\left(x\right)=m+3 & (2) \\ f\left(x\right)=m-3 & (3) \end{array}\right..$$

Để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|f\left(x\right)-m\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị thì các phương trình $\left(1\right);\left(2\right);\left(3\right)$ mỗi phương trình phải có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases} -2<m<6 \\ -2<m+3<6 \\ -2<m-3<6 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2<m<6 \\ -5<m<3 \\ 1<m<9 \end{cases}\Leftrightarrow 1<m<3.$$

Vì m nguyên nên $m=2$.

Câu 8: Chọn D

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Khi đó:

+) $\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=f\left(1\right)=-2m+8;\ \lim\limits_{x\to3^+}f\left(x\right)=f\left(3\right)=-6m+32$

+) $\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=2a+b-2m+4;\ \lim\limits_{x\to3^-}f\left(x\right)=6a+b-6m+36$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1;x=3$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=f\left(1\right) \\ \lim\limits_{x\to3^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to3^-}f\left(x\right)=f3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a+b-2m+4=-2m+8 \\ 6a+b-6m+36=-6m+32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2a+b=4 \\ 6a+b=-4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases}.$$

Từ đó $y=f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-2\left(m-4\right)x-1 \quad neu\left[\begin{array}{l} x\le1 \\ x\ge3 \end{array}\right. \\ 4x^2-2\left(m+2\right)x+8\ neu 1<x<3 \end{cases}$.

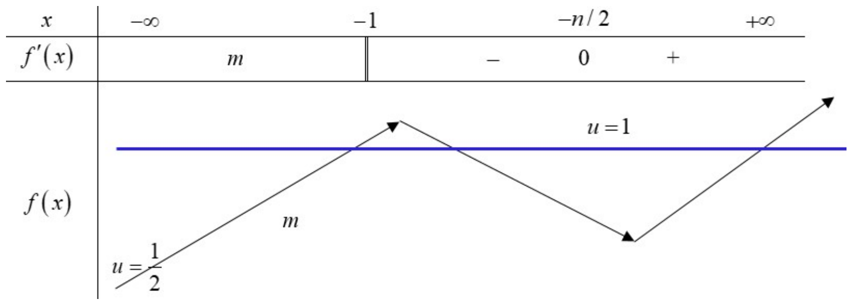
Để hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì hoành độ đỉnh của các parabol phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m-4<1\\ m-4>3\end{array}\right.\\ 1<\dfrac{m+2}{4}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<5\\ m>7\end{array}\right.\\ 2<m<10\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<m<5\\ 7<m<10\end{array}\right..$$

Vì m nguyên nên $m\in\{3;4;8;9\}$.

Câu 9: Đạo hàm: $f'(x)=\begin{cases}m & neu\ x<-1\\ 2x+n & neu\ x>-1\end{cases}$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:



Hàm số $f(x)$ phải liên tục và xác định tại $x=-1$. Suy ra $\begin{cases}m>0\\ f(-1)=-m+n=-n+m-8\\ -\dfrac{n}{2}>-1\end{cases}$.

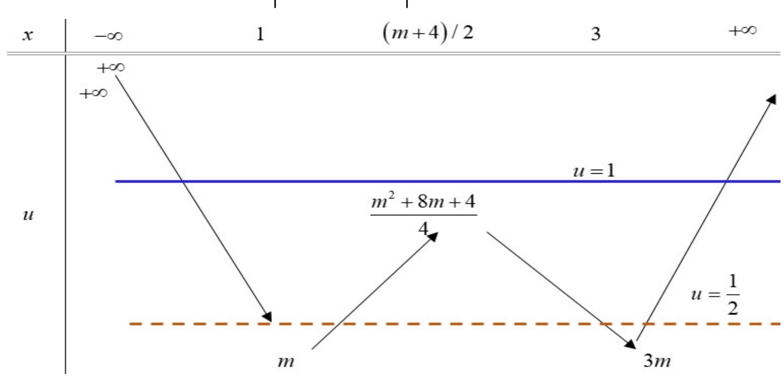
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ n=m-4\\ -\dfrac{n}{2}=-\dfrac{m}{2}+2>-1\end{cases}\Rightarrow 0<m<6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}1\le m\le 5.$$

Vậy có tất cả 5 giá trị tự nhiên m thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Ta có: $\begin{cases}SDCT\{u\}=1\\ SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=4\\ u=2\end{array}\right.\right\}\le 4\end{cases}\Rightarrow SDCT\{u\}+SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\ u=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\right\}\le 5$ {Không thỏa mãn}

Như vậy, bắt buộc u phải có 3 điểm cực trị. Khi đó phải có: $-2<m<\sqrt{4^2-4.3}=2$ (*)

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $u=\left|x^2-4x+3\right|$ như sau:



Suy ra $SDCT\left\{u\right\}=3\Rightarrow SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\u=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\right\}=6$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $\begin{cases}\dfrac{1}{2}>m\\\dfrac{1}{2}>3m\\\dfrac{1}{2}<\dfrac{m^2+8m+4}{4}\\1\ge\dfrac{m^2+8m+4}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4+\sqrt{14}<m\le0\\m<-4-\sqrt{14}\end{array}\right.$ (**)

Kết hợp (*) và (**), suy ra: $-4+\sqrt{14}<m\le0\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},m\in[-30;30]}m=\left\{0\right\}$.

Vậy có đúng 1 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Chọn A

Với $x<-1\Leftrightarrow y=|x-1|+|x+1|+|x-2|-2x+1=1-x-x-1+2-x-2x+1=-5x+3$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-5x+3$	$-3x+5$	$-x+3$	$x-1$
$f'(x)$	-5	-3	-1	1
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 12: Chọn C

Với $x<-1\Leftrightarrow y=1-x+2-x+3-x+4-x+5-x-m^2x+1=\left(-5-m^2\right)x+16$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\qquad$ 1	2	3	4	5	$+\infty$
$f(x)$	$\left(-5-m^2\right)x+16$	$\left(-3-m^2\right)x+14$	$\left(-1-m^2\right)x+10$	$\left(1-m^2\right)x+4$	$\left(3-m^2\right)x-4$	$\left(5-m^2\right)x-14$
$f'(x)$	$-5-m^2$	$-3-m^2$	$-1-m^2$	$1-m^2$	$3-m^2$	$5-m^2$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$			

Để hàm số có cực trị thì ít nhất phải có 1 đoạn $f'(x)$ phải đổi dấu từ âm sang dương:

$\Leftrightarrow 5-m^2\Leftrightarrow-\sqrt{5}\le m\le\sqrt{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{0;\pm1;2\right\}$

Thử lại $m=\pm1$ thì $f(x)$ là hàm hằng (Loại)

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn

Câu 13: Chọn B

Ta có bảng xét hàm và bảng biến thiên ghép làm một như sau:

x	$-\infty$	1	2	3 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$(-9+m)x+22$	$(-7+m)x+20$	$(-1+m)x+8$	$(9+m)x-22$
$f'(x)$	$-9+m$	$-7+m$	$-1+m$	$9+m$
$f'(x)$	$-$	$\neq 0$	$\neq 0$	$+$

Để hàm số có cực trị thì đạo hàm phải đổi dấu ít nhất một lần. Mà ta lại có : $-9+m<-7+m<-1+m<9+m$. Suy ra số nhỏ nhất phải âm và số lớn nhất phải dương, đồng thời trên các khoảng $(1;2)$, $(2;3)$ đạo hàm phải khác 0. Tức là :

$$\Rightarrow \begin{cases} -9+m<0 \\ 9+m>0 \\ -7+m\neq 0 \\ -1+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9<m<9 \\ m\neq 7 \\ m\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} \text{vậy có tất cả 15 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn.}$$

Câu 14: Chọn B

Dạng bài toán này chúng ta xét một số giá trị cụ thể của số nguyên dương n rồi rút ra quy luật về những giá trị của tham số n để hàm số có cực trị như sau:

Trường hợp 1:

Xét $n=2$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|$

x	$-\infty$	1	2 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-2x+3$	1	$2x-3$
$f'(x)$	-2	0	2
$f'(x)$	$\searrow$	1 $\longrightarrow$ 1	$\nearrow$

Hàm số không có cực trị.

Trường hợp 2:

Xét $n=3$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$

x	$-\infty$	1	2	3 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-3x+6$	$-x+4$	x	$3x-6$
$f'(x)$	-3	-1	1	3
$f'(x)$	$\searrow$	$\searrow$	2 $\nearrow$	$\nearrow$

Hàm số có cực trị.

Nhận xét thấy khi n là số nguyên dương lẻ thì hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-n|$ có điểm cực trị. Khi n là số nguyên dương chẵn thì không tồn tại điểm cực trị.

Suy ra $1\le n\le 2021$ và n lẻ nên có 1011 giá trị n nguyên dương thỏa mãn.

Câu 15: Chọn B

Những hàm trị tuyệt đối cụ thể luôn được tối ưu bằng bảng xét hàm như sau :

x	$-\infty$ -1 1 $5/2$ 3 $+\infty$			
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$\|x^2+2x-3\|$	x^2-4x+3	x^2-4x+3	$-x^2+4x-3$	x^2-4x+3
$f(x)$	x^2-5x+2	x^2-3x+4	$-x^2+5x-2$	x^2-3x+4
$f'(x)$	$2x-5$	$2x-3$	$-2x+5$	$2x-3$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$ 0 $-$	$+$

Suy ra hàm số có một điểm cực tiểu tại $x=1$; $x=3$ và một điểm cực đại tại $x=\dfrac{5}{2}$.

Câu 16: Chọn C

Xét phương trình $x^2-2mx+1=0\ (*)$, có $\Delta'=m^2-1$.

Nếu $\Delta'=m^2-1\le 0$ thì hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$ không có điểm cực đại.

Nếu $\Delta'=m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=m-\sqrt{m^2-1}$ và $x_2=m+\sqrt{m^2-1}$.

Với $\left[\begin{array}{l}x\le x_1\\x\ge x_2\end{array}\right.$ thì $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$ không có điểm cực đại.

Với $x_1<x<x_2$ thì $y=-x^2+2mx-1+4x=-x^2+2(m+2)x-1$.

Hàm số này đạt cực đại tại $x=m+2$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=m^2+4m+3$.

Vậy điều kiện để hàm số có cực đại là

$$\begin{cases}x_1<x=m+2<x_2\\3<m^2+4m+3<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-\sqrt{m^2-1}<m+2<m+\sqrt{m^2-1}\\0<m^2+4m<1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{m^2-1}>2\\m^2+4m-1<0\\m^2+4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{5}\\m>\sqrt{5}\end{array}\right.\\-2-\sqrt{5}<m<-2+\sqrt{5}\\\left[\begin{array}{l}m<-4\\m>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -2-\sqrt{5}<m<-4.$$

Do $10m$ là số nguyên nên có hai giá trị thỏa mãn là $m=-\dfrac{42}{10}$ và $m=-\dfrac{41}{10}$.

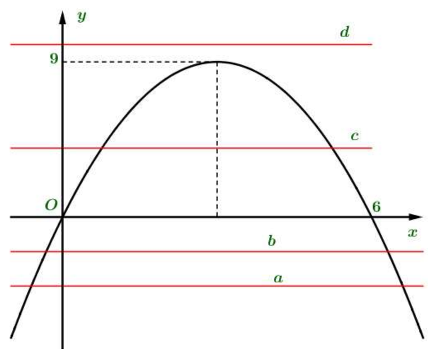
Câu 17: Chọn D

Từ đồ thị $f'(x)$, ta suy ra hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Đặt $g(x)=f\left(6x-x^2\right)$. Ta suy ra $y=g(|x|)$. Do đó số điểm cực trị của hàm y sẽ bằng số điểm cực trị dương của hàm số $g(x)$ cộng thêm 1.

Ta có $g'(x)=(6-2x)f'\left(6x-x^2\right)$, cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 6x-x^2=a<0 \\ 6x-x^2=b<0 \\ 6x-x^2=c\ (0<c<9) \\ 6x-x^2=d>9 \end{array}\right.$

Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả là 5 nghiệm dương phân biệt.



Suy ra số điểm cực trị của $g(x)$ là 5. Do đó số điểm cực trị của $y=g(|x|)$ là 11.

Câu 18: Chọn C

Ta có $y=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$

Đặt $g(x)=f\left(x^2-x\right)$. Suy ra $g(|x|)=f\left(x^2-|x|\right)$. Suy ra $g(|x-m|)=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(|x|)$ và $g(|x-m|)$ là như nhau.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g(|x-m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Câu 19: Chọn D

Ta có $y=f\left(x^2-8|x|+12\right)=f\left(x^2-4|x|+4-4|x|+8\right)=f\left((|x|-2)^2-4(|x|-2)\right)=g(|x|-2)$.

Ta thấy hàm số $y=g(x)$ có các điểm cực trị $x=-1, x=2, x=c>2$. Suy ra hàm số $y=g(x-2)$ có các điểm cực trị là $x=1, x=4, x=c+2$ (3 điểm cực trị dương).

Vậy hàm số $y=g(|x|-2)=f\left(x^2-8|x|+12\right)$ có 7 điểm cực trị.

Lí giải: $y=f\left(x^2-4x\right)\to g(|x|-2)$, với $(|x|+\alpha)^2-4(|x|+\alpha)=x^2-8|x|+12 \Rightarrow \alpha=-2$.

Câu 20: **Chọn B**

Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại 3 điểm là $x=a<0; x=b\in(0;1); x=c>1$

Xét hàm số $f(u)=f(|x|+|x-1|)$ với $u=|x|+|x-1|$

Ta có bảng khảo sát hàm số $u=|x|+|x-1|$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$	0	x		x	
$\lvert x-1\rvert$		$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$	
u		$-2x+1$		1		$2x-1$	
u'		-2		0		2	
u'		-		0		+	
u		$\searrow$	1	—	1	$\nearrow$	

Ta có: $(f(u))'=u'.f'(u)$ nên số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ là: số điểm cực trị của u cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(u)=0$ hay $\left[\begin{array}{l} u=a \\ u=b \\ u=c \end{array}\right.$

Hàm u không có điểm cực trị

$u=a$ vô nghiệm; $u=b$ vô nghiệm; $u=c$ có 2 nghiệm; Vậy: $f(u)$ có hai điểm cực trị.