**HSG 9 Tỉnh BÌNH ĐỊNH 2023-2024**

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho a>0 thỏa mãn điều kiện 4$a^{2}+\sqrt{2}(a-1)$ = 0 . Tính T = $\frac{a+1}{\sqrt{a^{4}+a+1-a^{2}}}$

2. Giải phương trình: ($\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^{2}+7x+10}$ = 3 .

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Cho các số thực a≥2;b≥5;c≥5 thỏa mãn 2$a^{2}$ + $b^{2}$+ $c^{2}$= 69. Chứng minh rằng12a+13b+11c ≥155.

2. Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x^{3}+x}{xy-1} $là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyễn dương z sao cho x+y+z=xyz.

Câu 3. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có ba đường cao AD, BE,CF đồng quy tại H. Các đường thẳng CH,BH cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm thứ hai là G và P.Đường thẳng GD cắt (O) tại điểm K khác G.

a) Chứng minh EF//GP

b) Chứng minh đường thẳng AK đi qua trung điểm M của DE.

c) Gọi M là trung điểm DF, AN cắt (O) tại điểm L khác A. Chứng minh bốn điểm M,L,N, K cùng thuộc một đường tròn,

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho 2022 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằngnhững điểm này có thể phân thành 1011 cặp (mỗi cặp gồm 2 điểm) sao cho các đoạn thẳng nối hai điểm của mỗi cặp điểm này không cắt nhau.

HẾT

ĐÁP ÁN

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho a>0 thỏa mãn điều kiện 4$a^{2}+\sqrt{2}(a-1)$ = 0 . Tính T = $\frac{a+1}{\sqrt{a^{4}+a+1-a^{2}}}$

2. Giải phương trình: ($\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^{2}+7x+10}$ = 3 .

1) Từ 4$a^{2}+\sqrt{2}(a-1)$ = 0=>$a^{2}=\frac{\sqrt{2}(1-a)}{4}$⬄$a^{4}=\frac{a^{2}-2a+1}{8}$ ( với 0<a≤1)

Ta có T=$\frac{a+1}{\sqrt{a^{4}+a+1-a^{2}}}=\sqrt{a^{4}+a+1}+a^{2}=\sqrt{\frac{a^{2}-2a+1}{8}+a+1}+\frac{\sqrt{2}(1-a)}{4}$

=$\sqrt{\frac{a^{2}+6a+9}{8}}+\frac{1-a}{2\sqrt{2}}=\frac{a+3}{2\sqrt{2}}+\frac{1-a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Vậy T =$\sqrt{2}$

2. cách 1

Điều kiện$\left\{\begin{array}{c}x+5\geq 0\\x+2\geq 0\\x^{2}+7x+10\geq 0\end{array}\right.$⬄$\left\{\begin{array}{c}x\geq -5\\x\geq -2\\x\leq 1-5 v x\geq -2\end{array}\right.$⬄x≥-2

Khi đó $\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\right)>0$

Nhân hai vế của phương trình đa cho với $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2},$ ta được:

$\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)$(1+$\sqrt{x^{2}+7x+10})=3\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\right)$

⬄3(1+$\sqrt{x^{2}+7x+10})=3\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\right)$

⬄1+$\sqrt{\left(x+5\right)\left(x+2\right)}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}$

⬄(1-$\sqrt{x+5}$+$\sqrt{x+2})\left( \sqrt{x+5}-1\right)=0$

⬄(1-$\sqrt{x+5})-\sqrt{x+2}\left(-\sqrt{x+5}\right)=0$

⬄($\sqrt{x+5})\left(1-\sqrt{x+2}\right)=0$

⬄$\left\{\begin{array}{c}1-\sqrt{x+5}=0\\1-\sqrt{x+2}=0\end{array}\right.$⬄$\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x+5}=1\\\sqrt{x+2}=1\end{array}\right.$⬄$\left\{\begin{array}{c}x+5=1\\x+2=1\end{array}\right.$⬄$\left\{\begin{array}{c}x=-4 (KTMĐK)\\x=-1\left( TMĐK\right)\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là x=-1

Cách 2

Điều kiện$\left\{\begin{array}{c}x+5\geq 0\\x+2\geq 0\\x^{2}+7x+10\geq 0\end{array}\right.$⬄$\left\{\begin{array}{c}x\geq -5\\x\geq -2\\x\leq 1-5 v x\geq -2\end{array}\right.$⬄x≥-2

Đặt a=$\sqrt{x+5};b=\sqrt{x+2}\left(a>b\geq 0 và a\geq \sqrt{3}\right)$

Ta có $a^{2}-b^{2}=\left(\sqrt{x+5}\right)^{2}-\left(\sqrt{x+2}\right)^{2}=3 $và a.b = $\sqrt{x+5}.\sqrt{x+2}=\sqrt{x^{2}+7x+10}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

(a-b)(1+ab)=$ a^{2}-b^{2}$⬄a+$a^{2}b-b-ab^{2}=a^{2}-b^{2}$⬄(a-b)+ab(a-b)=(a-b)(a+b)

⬄(a-b)(1+ab)=(a-b)(a+b)⬄(a-b)(1+ab-a-b)=0⬄(a-b)(b-1)(a-1)=0

⬄b-1=0( do a>0≥b và a≥$\sqrt{3})$

⬄b=1 hay $\sqrt{x+2}=1$⬄x=-1(TMDK)

Vậy nghiệm của phương trình là x=-1

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Cho các số thực a≥2;b≥5;c≥5 thỏa mãn 2$a^{2}$ + $b^{2}$+ $c^{2}$= 69. Chứng minh rằng12a+13b+11c ≥155.

2. Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x^{3}+x}{xy-1} $là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyễn dương z sao cho x+y+z=xyz.

1 đặt a=x+2;b=y+5;c=z+5 (x;y;z≥0) thay vào 2$a^{2}+b^{2}+c^{2}=69$, ta được

2$(x+2)^{2}+(y+5)^{2}+(x+5)^{2}=69$⬄2$x^{2}+y^{2}+z^{2}+8x+10y+10z=11(\*)$

Nếu một trong hai số y;z tồn tại một số lớn hơn 1 thì VT >11 ( vô lí)

Do đó 0≤y;z≤1

Ta lại có 2$a^{2}+b^{2}+c^{2}=69$⬄2$a^{2}=69-b^{2}-c^{2}$

=>$^{}\leq 19 \left( với a\geq 2;b\geq 5;c\geq 5\right)=>a<4=>x<2 hay 0\leq x<2$

Khi đó 12a+13b+11c=12x+13y+11z+144=144+(8x+10y+10z)+4x+3y+z

=144+(11-2$x^{2}-y^{2}-z^{2})+4x+3y+z=155+2x(2-x)+y(3-y)+z(1-z)\geq 155$

Đẳng thức xảy ra khi $\left\{\begin{array}{c}2x\left(2-x\right)=0\\y\left(3-y\right)=0\\x\left(1-z\right)=0\end{array}=>\left\{\begin{array}{c}x=0\\y=0\\z=1\end{array} \left( do \right)\leq x<2;0\leq y;z\leq 1)\right.\right.$

Thử lại với x=0;y=0;z=1 thì a=2;b=5;c=6 thỏa mãn 2$a^{2}+b^{2}+c^{2}=69$

Khi đó 12a+13b+11c=12.2+23.5+11.6=155

Vậy 12a+13b+11c≥155, với a≥2,b≥5,c≥5 thỏa mãn 2$a^{2}+b^{2}+c^{2}=69$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=2;b=5;c=6

Cách 2

Từ 2$a^{2}+b^{2}+c^{2}=69=>\left\{\begin{array}{c}2a^{2}=69-b^{2}-c^{2}\\b^{2}=69-2a^{2}-c^{2}\\c^{2}=69-2a^{2}-b^{2}\end{array}\right.=>\left\{\begin{array}{c}a<4\\b\leq 6\\c\leq 6\end{array}\right.=>\left\{\begin{array}{c}a<4\\b<8\\a\leq 6\end{array}\right.$

Ta có $\left\{\begin{array}{c}\left(a-2\right)\left(a-4\right)\leq 0\\\left(b-5\right)\left(b-8\right)\leq 0\\\left(c-5\right)\left(c-6\right)\leq 0\end{array}\right.$⬄$\left\{\begin{array}{c}2a^{2}-12a+16\leq 0\\b^{2}-13b+40\leq 0\\c^{2}-11a+30\leq 0\end{array}\right.$

Cộng vế theo vế ta được

2$a^{2}+b^{2}+c^{2}-\left(12a+13b+11c\right)+86\leq 0$

⬄12a+13b+11c≥2$a^{2}+b^{2}+c^{2}+86\geq 155( với 2\leq a<4;5\leq b<8;5\leq c\leq 6)$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi a=2;b=5;c=6

Thử lại với a=2;b=5;c=6 thỏa mãn 2$a^{2}+b^{2}+c^{2}=69$

Khi đó 12a+13b+11c=12.2+13.5+11.6=155

Vậy bài toán đã được chứng minh

2

Cách 1 ta có x;y là các số nguyên dương thoa mãn $\frac{x^{3}+x}{xy-1}$ là số nguyên dương

Nên $\frac{(x^{3}+x)y^{2}}{xy-1}\in N\*=>\frac{x^{2}y\left(xy-1\right)+x^{2}y+xy^{2}}{xy-1}\in N\*$

=>$x^{2}y+\frac{x\left(xy-1\right)+y\left(xy-1\right)+x+y}{xy-1}\in N\*$

=>$x^{2}y+x+y+\frac{x+y}{xy-1}\in N\*$

Từ giả thiết x,y là các số nguyên dương, suy ra $\frac{x+y}{xy-1}\in N\*$

Do đó tồn tại số nguyên dương z sao cho z=$\frac{x+y}{xy-1}$

Suy a z(xy-1)=z+y hay xyz=x+y+z

Vậy bài toán được chứng minh

Cách 2

Vì $\frac{x^{3}+x}{xy-1}$ vã,y đều là số nguyên dương nên $\left(x^{3}+x\right)\vdots \left(xy-1\right)$⬄x($\left(x^{2}+1\right)\vdots \left(xy-1\right)$

Ta lại có (x;xy-1)=1 nên

$$x^{2}+1\vdots xy-1=>x^{2}++xy-1\vdots xy-1=>x\left(x+y\right)\vdots xy-1=>x+y\vdots xy-1$$

Mà x+y và xy-1 là các số nguyên dương

Do đó tồn tại số nguyên dương z sao cho x+y=z(xy-1)⬄x+y+z=xyz

Vậy bài toán được chứng minh

Câu 3. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có ba đường cao AD, BE,CF đồng quy tại H. Các đường thẳng CH,BH cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm thứ hai là G và P.Đường thẳng GD cắt (O) tại điểm K khác G.

a) Chứng minh EF//GP

b) Chứng minh đường thẳng AK đi qua trung điểm M của DE.

c) Gọi M là trung điểm DF, AN cắt (O) tại điểm L khác A. Chứng minh bốn điểm M,L,N, K cùng thuộc một đường tròn,.



a) Chứng mình EF // GP.

Xét tứ giác BCEF có: $\hat{BEC}$=$\hat{BFC}$=90°giả thiết), mà hai góc này cùng nhìn cạnh BC

→ Tứ giác BCEF nội tiếp

$=>\hat{BCG}$= $\hat{BEF}$( (góc nội tiếp cùng chắn cung BF )

mà $\hat{BCG}$=$\hat{BPG}$( (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BG của đường tròn (O))

Suy ra $\hat{BEF}$=$\hat{BPG}$

=>EF//GP (dpcm)

b) Chứng minh đường thẳng AK đi qua trung điểm M của DE.

Xét tứ giác CDHE, có: $\hat{HEC}$= 90°;$\hat{HDC}$= 90 °

=>$\hat{HEC}+\hat{HDC}=90°+90°=180°$

→ Tứ giác CDHE nội tiếp

→HED = HCD(1)

Ta có $\left\{\begin{array}{c}\hat{AEM}=\hat{AEB}+\hat{HED}=90°+\hat{HED}\\\hat{GHD}=\hat{CDH}+\hat{HCD}=90+\hat{HCD}\end{array}\right.$(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{AEM}$ =$\hat{GHD}$ (3)

Tứ giác BFHD nội tiếp (vì $\hat{BFH}+\hat{BDH}=90°+90°=180°$

=>$\hat{FDH}=\hat{FBH}$

mà $\hat{FBH}=\hat{FCE}$(vì tứ giác BCEF nội tiếp)

$\hat{HDE}$ =$\hat{FCE}$ (vì tứ giác DCEH nội tiếp)

Suy ra $\hat{FDH}$ =$\hat{HDE}$ (4)

Lại có, tứ giác ACDF nội tiếp (vì $\hat{AFC}=\hat{ADC}=90°$, hai góc này cùng nhìn cạnh AC)

→$\hat{HFD}$ =$\hat{EAD}$ (5)

Tử (4) và (5) suy ra ∆AED≠∆FHD =>$\frac{HF}{HD}=\frac{EA}{ED}=\frac{EA}{2MD}=>\frac{2HF}{HD}=\frac{EA}{MD}$(6)

Vì $\hat{BAG}=\hat{BCG}=\hat{BAD}$=> AF là đường phân giác của $\hat{HAG}$; mà AF là đường cao của tam giác HAG nên AF là đường trung tuyển tam giác HAG=>FH=FG hay HG = 2HF (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{HG}{HD}=\frac{EA}{MD}$(8)

Từ (3) và (8) suy ra ∆AEM ≠ ∆GHD (c.g.c)

→$\hat{MAC}=\hat{KGC}$

mà $\hat{KGC}=\hat{KAC}$ (cùng chẳn cung KC của đường tròn (O))

→ AM = AK hay đường thẳng AK đi qua trung điểm M của DE.

c) Chứng minh bồn điểm M,L, N, K cũng thuộc một đường tròn.

Gọi I là giao điểm của GP và AL

Ta có MN là đường trung bình của ∆FED => MN // EF // GP

=>$\hat{ANM}$ =$\hat{AIP}$ =$\frac{1}{2}$(sd $\hat{AP}$+sd$\hat{GBL}$) (9)

Vì $\hat{AKL}$ là góc nội tiếp đường tròn (O) nên $\hat{AKL}=\frac{1}{2}sd\hat{AGL}=\frac{1}{2}(sd\hat{AG}+sd\hat{GBL})$ (10)

Vì $\hat{EBF}=\hat{ECF}$ (do tứ giác BCEF nội tiếp) => $\hat{PBA}=\hat{ACG}=>\hat{AP}=\hat{AG}$ (11)

Từ (9). (10) và (11) suy ra $\hat{ANM}=\hat{AKL}$→ Tứ giác MNLK nội tiếp hay bốn điểm M,L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho 2022 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằngnhững điểm này có thể phân thành 1011 cặp (mỗi cặp gồm 2 điểm) sao cho các đoạn thẳng nối hai điểm của mỗi cặp điểm này không cắt nhau.

Ta chia 2022 điểm đã cho thành 011 cặp điểm tùy ý nối chúng lại với nhau ta được 1011 đoạn thẳng

Gọi S là tổng độ dài các đoạn thẳng đã được nối ( chú ý rằng do chúng tta có hữu hạn cách phân cặp nên tập giá trị của S là hữu hạn). Nếu có hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại (O) thì ta thay AB,CD bằng AC,BD và khi đó

AB+CD=(AO+OB)+(CO+OD)

=(AO+OC)+(BO+OD)

>AC+BD ( do bất đẳng thức tam giác)

Vậy nếu có cặp đoạn thẳng nào đó cắt nhau thì ta có thể nối cách khác để tổng S giảm đi . Vì S hữu hạn nên một lúc nào đo quá trình này phải dừng lại và khi đó không có hai đoạn thẳng nào cắt nhau, Vậy bài toán đước chứng minh