

ĐỀ 06**ĐỀ HSG 9 ĐẶNG THAI MAI – TP VINH Năm 2023-2024****Câu 1. (5 điểm)**

a) Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

2. $B = \sqrt{2-\sqrt{2}\sqrt{5}-2}-\sqrt{2+\sqrt{2}\sqrt{5}-2}$

3. $C = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{1+\cot\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

b) Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x+5}\sqrt{x-12}}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+3}}{3-\sqrt{x}}$

1. Tìm ĐKXD và rút gọn P

2. Tìm GTNN của P

Câu 2. (3 điểm)a) Chứng minh rằng biểu thức $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ có giá trị là số vô tỷ.b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^2 - (y+2)x^2 = 1$ c) Tìm các số tự nhiên n để $n^5 + n^4 + 1$ là số nguyên tố**Câu 3. (4,5 điểm)**

a) Giải các phương trình:

1. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$

2. $\sqrt{x^2+x+2} = \frac{3x^2+3x+2}{3x+1}$

b) Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+2c)(b+2c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(b+2a)(c+2a)}} + \sqrt{\frac{ca}{(c+2b)(a+2b)}} \geq 1$$

Câu 4. (6 điểm)Cho ΔABC nhọn, có ba đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Gọi chân các đường vuông góc hạ từ D xuống AB, AC lần lượt tại E và F.a) Chứng minh rằng: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ b) Giả sử $HD = \frac{1}{3}AD$. Chứng minh rằng: $\tan B \cdot \tan C = 3$

c) Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BI và CK. Chứng minh rằng: 4 điểm E, M, N, F thẳng hàng.

Câu 5. (1,5 điểm)

Trên bảng đang có hai số 2 và 8. Thực hiện ghi thêm số lên bảng theo qui tắc sau: Mỗi lần viết lên bảng một số $c = ab + a + b$ với hai số a và b đã có trên bảng. Hỏi với cách viết số như trên thì có thể viết được số 2022^{2023} lên bảng không? Tại sao?

--- Hết ---

LỜI GIẢI

Câu 1. (5 điểm)

a) Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2-\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+1)\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$$
$$= (\sqrt{3}+1)|\sqrt{3}-1| = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 3 - 1 = 2$$

$$2. B^2 = (\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}} - \sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}})^2 = 4 - 2\sqrt{4-2\sqrt{5}+2}$$
$$= 4 - 2(\sqrt{5}-1) = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2$$

$$\text{Vì } B < 0 \text{ nên } B = 1 - \sqrt{5}$$

$$3. C = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{1+\cot\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} + \frac{\cos^2\alpha}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha}$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + 1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1$$

b) Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

1. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 9$, ta có:

$$P = \frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x}-3)+12(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} =$$

$$\frac{(\sqrt{x}-3)(x+12)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2}$$

2. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 9$, ta có:

$$P = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} - 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} - 4$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số không âm $\sqrt{x} + 2$ và $\frac{16}{\sqrt{x}+2}$ ta có:

$$P = \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x+2}} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x+2}) \cdot \frac{16}{\sqrt{x+2}}} = 8$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{16}{\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow (\sqrt{x+2})^2 = 4^2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (tm)}$$

Vậy GTNN của $P = 4 \Leftrightarrow x = 4$

Câu 2. (3 điểm)

a) Giả sử $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số hữu tỷ.

$$\text{Suy ra } \sqrt{2} + \sqrt{3} = x - \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + 5 - 2x\sqrt{5} = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6} + x\sqrt{5} = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow 6 + 5x^2 + 2x\sqrt{30} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow \sqrt{30} = \frac{x^2 - 6 - 5x^2}{2x} \text{ (hiển nhiên } x \neq 0)$$

Do x là số hữu tỷ nên $\frac{x^2 - 6 - 5x^2}{2x}$ là số hữu tỷ. Mà $\sqrt{30}$ là số vô tỷ (vô lý)

Suy ra $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.

$$\text{b) Ta có: } y^2 - (y+2)x^2 = 1 \Rightarrow (y-2)(x^2 - y + 2) = 3$$

Nên $y+2$ và $x^2 - y + 2 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Giải ra ta có: $(x, y) \in \{(0; 1); (0, -1)\}$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} n^5 + n^4 + 1 &= n^5 - n^2 + n^4 - n + n^2 + n + 1 \\ &= n^2(n^3 - 1) + n(n^3 - 1) + n^2 + n + 1 \\ &= (n^3 - 1)(n^2 + n) + n^2 + n + 1 \\ &= (n - 1)(n^2 + n + 1)(n^2 + n) + n^2 + n + 1 \\ &= (n^2 + n + 1)(n^3 - n) + n^2 + n + 1 \\ &= (n^2 + n + 1)(n^3 - n + 1) \end{aligned}$$

Do $n^5 + n^4 + 1$ là số nguyên tố

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 + n + 1 = 1 \\ n^2 - n + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + n = 0 \\ n^2 - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(n+1) = 0 \\ n(n-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

(vì n là số nguyên)

Thử lại: $n = 1$ (tm). Vậy $n = 1$

Câu 3. (4,5 điểm)

a) Giải các phương trình:

1. ĐKXD: ≥ 0

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x}\right)^2 \leq [(2\sqrt{2})^2 + x + 1] \left[\frac{1}{x+1} + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right] = x + 9$$

$$\text{Dấu bằng} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \quad (\text{tm ĐKXD})$$

Vậy PT có nghiệm là $x = \frac{1}{7}$

2. ĐKXD: $x \neq -\frac{1}{3}$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2+x+2} = \frac{3x^2+3x+2}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)\sqrt{x^2+x+2} = x^2+x+2 + 2(x^2+x)$$

Đặt: $\sqrt{x^2+x+2} = t$ ($t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$). Ta có phương trình:

$$t^2 - (3x+1)t + 2(x^2+x) = 0 \Leftrightarrow (t-2x)(t-x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2x \\ t=x+1 \end{cases}$$

$$* \text{ Với } t = 2x \Rightarrow \sqrt{x^2+x+2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=1; x=\frac{-2}{3} \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ (TM)}$$

$$* \text{ Với } t = x + 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+x+2} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ (TM)}$$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 1$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+2c)(b+2c)}} = \frac{2ab}{2\sqrt{(ab+2bc)(ab+2ac)}} \geq \frac{2ab}{(ab+2bc)(ab+2ac)} = \frac{ab}{ab+bc+ca}$$

$$\text{Chúng minh tương tự: } \sqrt{\frac{bc}{(b+2a)(c+2a)}} \geq \frac{bc}{bc+ca+ab};$$

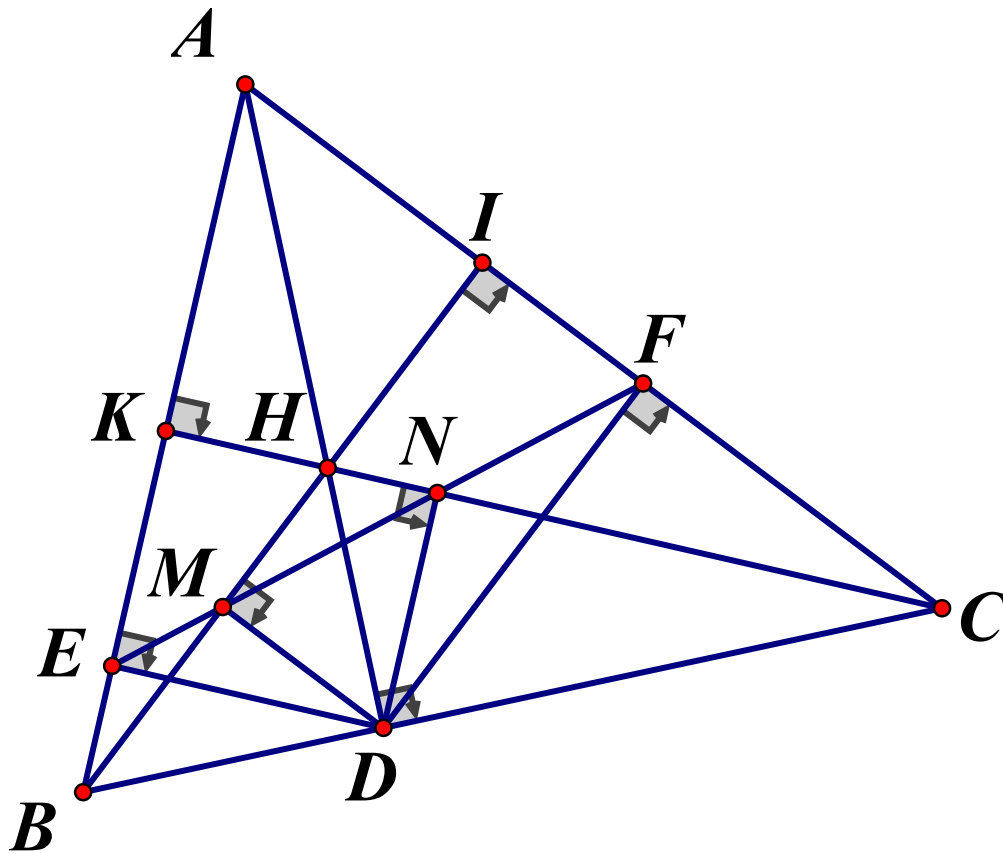
$$\sqrt{\frac{ca}{(c+2b)(a+2b)}} \geq \frac{ca}{ca+ab+bc}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+2c)(b+2c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(b+2a)(c+2a)}} + \sqrt{\frac{ca}{(c+2b)(a+2b)}} \geq \frac{ab+bc+ca}{ab+bc+ca} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

Câu 4. (6 điểm)



a) Chứng minh được: $AE \cdot AB = AD^2$

Chứng minh được: $AF \cdot AC = AD^2$

Suy ra: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$

b) Biểu thị được: $\tan B = \frac{AD}{BD}$; $\tan C = \frac{AD}{CD}$; $\tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD}$

Biểu thị được: $\tan B = \tan DHC = \frac{CD}{HD}$; $\tan C = \tan DHB = \frac{BD}{HD}$; $\tan B \cdot \tan C = \frac{BD \cdot CD}{HD^2}$

Suy ra: $(\tan B \cdot \tan C)^2 = \frac{AD^2}{HD^2} \Rightarrow \tan B \cdot \tan C = \frac{AD}{HD} = 3$

c) CM được: $\frac{AE \cdot AB}{AK \cdot AB} = \frac{AF \cdot AC}{AI \cdot AC} \Rightarrow EF \parallel IK$

CM được: $\frac{BM}{MI} = \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EK} \Rightarrow ME \parallel IK \Rightarrow M \in EF$

Tương tự CM được $N \in EF$ và suy ra 4 điểm E, M, N, F thẳng hàng

Câu 5. (1,5 điểm)

Ta sẽ CM nếu hai số tự nhiên a, b chia 3 đều dư 2 thì $c = ab + a + b$ chia 3 cũng dư 2

Đặt $a = 3k + 2; b = 3n + 2$ ($m, n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}c &= ab + a + b = (3m + 2)(3n + 2) + 3m + 2 + 3n + 2 \\ &= 3(3mn + 3m + 3n + 2) + 2\end{aligned}$$

Suy ra c chia cho 3 dư 2

Trên bảng đang có 2 số 2 và 8 chia cho 3 đều dư 2, nên theo quy tắc viết trên thì trên bảng toàn là các số chia cho 3 dư 2

Mà số 2022^{2023} chia hết cho 3 nên không thể viết 2022^{2023} lên bảng.