Chương

Bài 1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. Lý thuyết

Tam thức bậc hai:

» Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f(x)=ax^2+bx+c$, trong đó a,b,c là những hệ số, $a\neq 0$.

» Nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ được gọi là ***nghiệm của tam thức bậc hai*** $f(x)=ax^2+bx+c$.

» $\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu
$f(x)=ax^2+bx+c$

Dấu của tam thức bậc hai:

Cho $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0),\,\Delta=b^2-4ac$.

» Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

» Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\neq -\dfrac{b}{2a}$.

» Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ luôn:

■ Cùng dấu với hệ số a khi $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

■ Trái dấu với hệ số a khi $x\in(x_1;x_2)$.

Trong đó $x_1 . x_2$ là hai nghiệm của $f(x)$.

Chú ý **Xét dấu tam thức bậc hai ta làm các bước:**

≫ ***Bước* (1):** *Tính và xác định dấu của biệt thức* Δ;

≫ ***Bước* (2):** *Xác định nghiệm của* $f(x)$ *(nếu có);*

≫ ***Bước* (3):** *Xác định dấu của hệ số* a;

≫ ***Bước* (4):** *Xác định dấu của* $f(x)$.

▶ ***Chú ý:*** Khi xét dấu của tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn Δ' thay cho biệt thức Δ.

Nhận xét

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$.

(1) $ax^2+bx+c>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

(2) $ax^2+bx+c<0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

(3) $ax^2+bx+c\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

(4) $ax^2+bx+c\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm nghiệm và biệt thức của tam thức bậc hai

Phương pháp

» Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng , trong đó a,b,c là những hệ số, $a\neq 0$.

» Nghiệm của phương trình $a\neq 0$ được gọi là ***nghiệm của tam thức bậc hai*** $f(x)=ax^2+bx+c$.

» $\Delta = b^2-4ac$ và $\Delta = b^2-4ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của $f(x)=ax^2+bx+c$

Ví dụ 1.1.

Tìm biệt thức và nghiệm của các tam thức bậc hai sau

(1) $f(x)=x^2-3x+2$ (2) $f(x)=2x^2-5x+2$

(3) $f(x)=2x^2-3x$ (4) $f(x)=-x^2-2\sqrt{2}x-4$

(5) $f(x)=-3x^2-2x+2$ (6) $f(x)=-x^2+4$

Lời giải

(1) $f(x)=x^2-3x+2$

Tam thức $f(x)=x^2-3x+2$ có $\Delta=3^2-4.1.2=1$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1=1;x_2=2$.

(2) $f(x)=2x^2-5x+2$

Tam thức $f(x)=2x^2-5x+2$ có $\Delta=5^2-4.2.2=9$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1=\frac{1}{2};x_2=2$.

(3) $f(x)=2x^2-3x$

Tam thức $f(x)=2x^2-3x$ có $\Delta=1$, nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1=\frac{3}{2};x_2=0$.

(4) $f(x)=-x^2-2\sqrt{2}x-4$

Tam thức $f(x)=-x^2-2\sqrt{2}x-4$ có $\Delta=-8$, nên tam thức vô nghiệm.

(5) $f(x)=-3x^2-2x+2$

Tam thức $f(x)=-3x^2-2x+2$ có $\Delta=\sqrt{28}$, Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}; x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$.

(6) $f(x) = -x^2 + 4$

Tam thức $f(x) = -x^2 + 4$ có $\Delta = 16$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2; x_2 = 2$.

Ví dụ 1.2.

Tìm biệt thức và nghiệm (nếu có) của các tam thức bậc hai sau:

(1) $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ (2) $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m$

(3) $f(x) = x^2 + mx - 1$ (4) $f(x) = (m^2+1)x^2 - 3mx - 1$

Lời giải

(1) $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$

Tam thức $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ có $\Delta = 4$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1 - m; x_2 = 1 + m$.

(2) $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m$

Tam thức $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m$ có $\Delta = 1$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m; x_2 = 1 + m$.

(3) $f(x) = x^2 + mx - 1$

Tam thức $f(x) = x^2 + mx - 1$ có $\Delta = m^2 + 4 > 0$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}; x_2 = \frac{-m-\sqrt{m^2+4}}{2}$.

(4) $f(x) = (m^2+1)x^2 - 3mx - 1$

Tam thức $f(x) = (m^2+1)x^2 - 3mx - 1$ có $\Delta = 13m^2 + 4 > 0$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-3m+\sqrt{13m^2+4}}{2(m^2+1)}; x_2 = \frac{-3m-\sqrt{13m^2+4}}{2(m^2+1)}$.

Dạng 2. Xét dấu tam thức bậc hai

Phương

Cho $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0),\ \Delta=b^2-4ac$.

» Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

» Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\neq -\dfrac{b}{2a}$.

» Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ luôn:

■ Cùng dấu với hệ số a khi $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

■ Trái dấu với hệ số a khi $x\in(x_1;x_2)$.

Trong đó x_1, x_2 *là hai nghiệm của* $f(x)$.

Ví dụ 2.1.

Xét dấu của các tam thức sau:

(1) $3x^2-2x+1$ (2) $-x^2+4x+5$

(3) $4x^2+4x+1$ (4) $2x^2-6x+\dfrac{9}{2}$

(5) $3x^2-2x-8$ (6) $-x^2+2x-1$

Lời giải

(1) $3x^2-2x+1$

Ta có $\Delta'=-2<0$ và $a=3>0$. Suy ra $3x^2-2x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(2) $-x^2+4x+5$

Ta có: $-x^2+4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=5\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$-x^2+4x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra: $-x^2+4x+5>0\Leftrightarrow x\in(-1;5)$ và $-x^2+4x+5<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

(3) $4x^2+4x+1$

Tam thức bậc hai $f(x)=4x^2+4x+1$ có $\Delta=0$, nghiệm kép $x_0=-\dfrac{1}{2}$ và hệ số $a=4>0$ nên $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(4) $2x^2-6x+\dfrac{9}{2}$

Ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-6x+\frac{9}{2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Suy ra: $f(x)>0$ với mọi $x\in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(5) $3x^2-2x-8$

Ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{4}{3} \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra: $f(x)>0 \Leftrightarrow \left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup(2;+\infty)$ và $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$.

(6) $-x^2+2x-1$

Ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Suy ra: $f(x)<0$ với mọi $x\in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ví dụ 2.2.

Xét dấu các biểu thức sau:

(1) $f(x)=2x^2+x+6$

(2) $f(x)=4x^2-4x+1$

(3) $f(x)=x^2-\frac{3}{2}x-1$

(4) $f(x)=(4-3x)(x^2-5x+6)$

(5) $f(x)=(1-\sqrt{2})x^2-2x+1+\sqrt{2}$

(6) $f(x)=-0,3x^2+x-1,5$

(7) $f(x)=x^2+(\sqrt{5}-1)x-\sqrt{5}$

(8) $f(x)=\sqrt{3}x^2+(\sqrt{3}+1)x+1$

Lời giải

(1) $f(x)=2x^2+x+6$

$f(x)=2x^2+x+6$ có $\Delta=-47<0$, hệ số $a=2>0$ nên $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

(2) $f(x)=4x^2-4x+1$

$f(x)=4x^2-4x+1$ có $\Delta=0$, hệ số $a=4>0$ nên $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

(3) $f(x)=x^2-\frac{3}{2}x-1$

$f(x)=x^2-\frac{3}{2}x-1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-\frac{1}{2},x_2=2$, hệ số $a=1>0$ nên $f(x)>0,\forall x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$ và $f(x)<0,\forall x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

(4) $f(x)=(4-3x)(x^2-5x+6)$

$$f(x)=(4-3x)(x^2-5x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{4}{3}\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
$4-3x$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
x^2-5x+6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có, bảng xét dấu:

Vậy $f(x)>0,\forall x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\cup(2;3)$ và $f(x)<0,\forall x\in\left(\frac{4}{3};2\right)\cup(3;+\infty)$.

(5) $f(x)=(1-\sqrt{2})x^2-2x+1+\sqrt{2}$

$f(x)=(1-\sqrt{2})x^2-2x+1+\sqrt{2}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1,x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-3-2\sqrt{2}$,

Hệ số $a=1-\sqrt{2}<0$ nên $f(x)<0,\forall x\in(-\infty;-3-2\sqrt{2})\cup(1;+\infty)$

và $f(x)>0,\forall x\in(-3-2\sqrt{2};1)$.

(6) $f(x)=-0,3x^2+x-1,5$

$f(x)=-0,3x^2+x-1,5$ có $\Delta=-\frac{4}{5}<0$, hệ số $a=-0,3<0$ nên $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

(7) $f(x)=x^2+(\sqrt{5}-1)x-\sqrt{5}$

$f(x)=x^2+(\sqrt{5}-1)x-\sqrt{5}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1,x_2=-\sqrt{5}$, hệ số $a=1>0$

Nên $f(x)>0,\forall x\in(-\infty;-\sqrt{5})\cup(1;+\infty)$ và $f(x)<0,\forall x\in(-\sqrt{5};1)$

(8) $f(x)=\sqrt{3}x^2+(\sqrt{3}+1)x+1$

$f(x)=\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1, x_2=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, hệ số $a=\sqrt{3}>0$

Nên $f(x)>0, \forall x\in(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ và $f(x)<0, \forall x\in\left(-1;\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ví dụ 2.3.

Xét dấu các biểu thức sau:

(1) $f(x)=(x+3)\left(2x^2+5x+2\right)$ (2) $f(x)=\left(x^2-7x+12\right)(1-x)$

(3) $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{3+x}$ (4) $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+7}{4-x^2}$

(5) $f(x)=x^2-2x+5.$ (6) $f(x)=x^2-5x-6.$

(7) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x-1}.$ (8) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-4}$

$f(x)=x-\dfrac{x^2-x+6}{x^2+2x+4}$ $f(x)=\dfrac{2x-5}{4x^2-10x+12}$

Lời giải

(1) $f(x)=(x+3)\left(2x^2+5x+2\right)$

Cho $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$; $2x^2+5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=-2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x^2+5x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận:

$f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

$f(x)=0\Leftrightarrow x=-3; x=-2; x=-\dfrac{1}{2}$.

$f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

(2) $f(x)=\left(x^2-7x+12\right)(1-x)$

Cho $x^2-7x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=4\end{array}\right.$; $1-x=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
$1-x$		+	0	−	|	−	|	−	
$x^2-7x+12$		+	|	+	0	−	0	+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Kết luận:

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(1;3)\cup(4;+\infty)$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1;x=3;x=4$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(3;4)$.

(3) $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{3+x}$

Cho $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$; $3+x=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$3+x$		−	0	+	|	+	|	+	
$2x-x^2$		−	|	−	0	+	0	−	
$f(x)$		+	||	−	0	+	0	−	

Kết luận:

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-3;0)\cup(2;+\infty)$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0;x=2$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(0;2)$.

$f(x)$ không xác định khi và chỉ khi $x=-3$.

(4) $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+7}{4-x^2}$

Cho $2x^2-9x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$; $4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x^2-9x+7$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$4-x^2$		−	0	+	|	+	0	−	|	−	
$f(x)$		−	||	+	0	−	||	+	0	−	

Kết luận:

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;2)\cup\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1;x=\dfrac{7}{2}$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-2;1)\cup\left(2;\frac{7}{2}\right)$.

$f(x)$ không xác định khi và chỉ khi $x=-2;x=2$.

(5) $f(x)=x^2-2x+5.$

Ta có $\Delta'=-4<0$ và $a=1>0$ nên $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

(6) $f(x)=x^2-5x-6.$

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=6\end{array}\right.$.

Do $a=1>0$ nên $\begin{cases}f(x)>0, \forall x\in(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)\\f(x)<0, \forall x\in(-1;6)\end{cases}$

(7) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x-1}$.

Ta có $g(x)=x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

$h(x)=x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$h(x)$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $\begin{cases}f(x)>0, \forall x\in(-3;-1)\cup(1;+\infty)\\f(x)<0, \forall x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1)\end{cases}$

(8) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-4}$

Lời giải

Ta có $2x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\x=1\end{array}\right.$; $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

(9) $f(x)=x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$

Ta có $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}=\dfrac{-x^3+2x^2+5x-6}{-x^2+3x+4}=\dfrac{(x-1)(-x^2+x+6)}{-x^2+3x+4}$

Ta có $-x^2+x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.$, $-x^2+3x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$-x^2+3x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Suy ra $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(-2;-1)\cup(1;3)\cup(4;+\infty)$,

$x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(3;4)$.

(10) $f(x)=\dfrac{2x-5}{4x^2-19x+12}$

Điều kiện xác định: $4x^2-19x+12\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 4\\x\neq\dfrac{3}{4}\end{cases}$.

Ta có $2x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$, $4x^2-19x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$2x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x^2-19x+12$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x-5}{4x^2-19x+12}$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Vậy $f(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

$f(x)$ không xác định tại $\left[\begin{array}{l}x=4\\x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$.

$f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{2}\right)\cup(4;+\infty)$.

$f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

Dạng 3. Điều kiện của tham số để tam thức bậc hai có dấu không đổi

Phương pháp

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$. Đặt $\Delta=b^2-4ac$.

» $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$

» $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

» $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$

» $f(x)\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

Ví dụ 3.1.

Cho $f(x)=(m^2+2)x^2-2(m+1)x+1$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)$ luôn dương với mọi x.

Lời giải

Ta có $a=m^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $\Delta'=(m+1)^2-(m^2+2)=2m-1$.

Để $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì $\Delta<0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3.2.

Cho $f(x)=(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)\geq 0$ với mọi giá trị của x.

Lời giải

Với $m=-2\Rightarrow f(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Với $m\neq -2$, để $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases}m+2>0\\ \Delta'=(m+2)^2-(m+2)(m+3)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+2>0\\ -m-2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-2.$$

Vậy với $m\geq -2$ thì $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.3.

Cho $f(x)=mx^2-x-1$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)<0$ với mọi giá trị của x.

Lời giải

Với $m=0\Rightarrow f(x)=-x-1<0\Leftrightarrow x>-1$.

Với $m \neq 0$, để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{4}$.

Vậy với $m < -\dfrac{1}{4}$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3.4.

Cho $f(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m - 5$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \leq 0$ với mọi giá trị của x

Lời giải

Với $m = 4 \Rightarrow f(x) = -1 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m \neq 4$, để $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m - 4 < 0 \\ \Delta' = (m-4)^2 - (m-4)(m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Vậy với $m \leq 4$ thì $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3.5.

Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x

Lời giải

$f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - x + m > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + m - 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(m-1) < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{5}{4}$

Ví dụ 3.6.

Tìm các giá trị của tham số m để

(1) $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với $f(x) = (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1$.

(2) $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với $f(x) = (m+4)x^2 - 2mx + 2m - 3$.

(3) $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$.

Lời giải

(1) $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với $f(x) = (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1$

Trường hợp 1.

Xét $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ m = 2 \end{array}\right.$

Nếu $m=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(x)=-5x-1\le 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{5}$.

Nếu $m=2\Rightarrow f(x)=-1\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 2.

Xét $2m^2-3m-2\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne -\dfrac{1}{2}\\ m\ne 2\end{cases}$, khi đó, điều kiện để $f(x)\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ là.

$\begin{cases}2m^2-3m-2<0\\ \Delta'=(m-2)^2+(2m^2-3m-2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\le m\le 2\\ -\dfrac{1}{2}<m<2\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\le m<2$.

(2) $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ với $f(x)=(m+4)x^2-2mx+2m-3$.

Với $m=-4\Rightarrow f(x)=8x-14<0\Leftrightarrow x<\dfrac{7}{4}$.

Với $m\ne -4$, để $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thì điều kiện là

$\begin{cases}m+4<0\\ \Delta'=m^2-(m+4)(2m-6)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-4\\ m\in(-\infty;-6)\cup(4;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-6)$

Vậy với $m<-6$ thì $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(3) $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ với $f(x)=\dfrac{-x^2+4(m+1)x+1-4m^2}{-4x^2+5x-2}$.

Ta có $-4x^2+5x-2<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Để $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $g(x)=-x^2+4(m+1)x+1-4m^2<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'=4(m+1)^2+(1-4m^2)<0\Leftrightarrow 8m+5<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{8}{5}$.

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Cho tam thức $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, $\Delta=b^2-4ac$. Ta có $f(x)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a\le 0\\ \Delta<0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta\ge 0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có: $f(x)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$

» **Câu 2.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=-2x^2+8x-8$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $f(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **B.** $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

C. $f(x)\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **D.** $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=-2(x^2-4x+4)=-2(x-2)^2\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy: $f(x)\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

» **Câu 3.** Tam thức nào dưới đây luôn dương với mọi giá trị của x?

A. $x^2-10x+2$. **B.** $x^2-2x-10$. **C.** $x^2-2x+10$. **D.** $-x^2+2x+10$.

Lời giải

Chọn C

Tam thức luôn dương với mọi giá trị của x phải có $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$

» **Câu 4.** Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai. **B.** $f(x)=2x-4$ là tam thức bậc hai.

C. $f(x)=3x^3+2x-1$ là tam thức bậc hai. **D.** $f(x)=x^4-x^2+1$ là tam thức bậc hai.

Lời giải

Chọn A

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai.

» **Câu 5.** Cho $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ và $\Delta=b^2-4ac$. Cho biết dấu của Δ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}$.

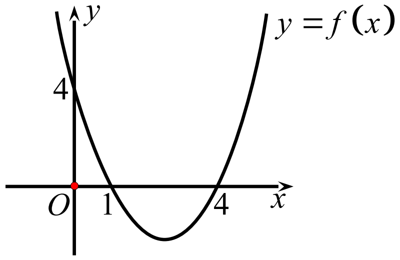
A. $\Delta<0$. **B.** $\Delta=0$. **C.** $\Delta>0$. **D.** $\Delta\ge 0$.

Lời giải

Chọn A

* Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi $\Delta<0$.

» Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta=b^2-4ac$, tìm dấu của a và Δ.



A. $a>0$, $\Delta>0$. **B.** $a<0$, $\Delta>0$. **C.** $a>0$, $\Delta=0$. **D.** $a<0$, , $\Delta=0$.

Lời giải

Chọn A

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a>0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta>0$.

» Câu 7. Cho tam thức $f(x)=x^2-8x+16$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm. **B.** $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

C. $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **D.** $f(x)<0$ khi $x<4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=x^2-8x+16=(x-4)^2$. Suy ra $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

» Câu 8. Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x<2$?

A. x^2-5x+6. **B.** $16-x^2$. **C.** x^2-2x+3. **D.** $-x^2+5x-6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)<0\Leftrightarrow 2<x<3$ (loại A);

$y=16-x^2=(4-x)(4+x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\x>4\end{array}\right.$ (loại B)

$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0,\forall x$ (loại C)

$y=-x^2+5x-6=-(x-2)(x-3)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<2\\x>3\end{array}\right.$ (Chọn D)

» Câu 9. Tam thức $-x^2-3x-4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-4$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<1$ hoặc $x>4$.

C. $-4<x<-4$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: $y=-x^2-3x-4$ nhận giá trị âm khi

$-x^2-3x-4<0 \Leftrightarrow -\left(x^2+2.\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}\right)<0$

$\Leftrightarrow -\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}<0, \forall x\in \mathbb{R}$.

» Câu 10. Tam thức $y=x^2-12x-13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-13$ hoặc $x>1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>13$.
C. $-13<x<1$. **D.** $-1<x<13$.

Lời giải

Chọn D

$y=x^2-12x-13$ nhận giá trị âm tức là $x^2-12x-13<0 \Leftrightarrow (x+1)(x-13)<0$
$\Leftrightarrow -1<x<13$.

» Câu 11. Tam thức $y=x^2-2x-3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x<-3$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>3$.
C. $x<-2$ hoặc $x>6$. **D.** $-1<x<3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^2-2x-3$ nhận giá trị dương tức là $x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1>0\\x-3>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1<0\\x-3<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\x<-1\end{array}\right.$.

» Câu 12. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x)=x^2-6x+8$ không dương?

A. $[2;3]$. **B.** $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$. **C.** $[2;4]$. **D.** $[1;4]$.

Lời giải

Chọn C

Để $f(x)$ không dương thì $x^2-6x+8\le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)\le 0$

Lập bảng xét dấu $f(x)$ ta thấy để $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[2;4]$

» Câu 13. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x)=x^2+9-6x$ luôn dương?

A. $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2+9-6x>0 \Leftrightarrow (x-3)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 3$.

Vậy $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

» Câu 14. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x)=x^2-2x+3$ luôn dương?

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ .Vậy $x \in \mathbb{R}$.

» Câu 15. Bảng xét dấu nào sau đây là bảng xét dấu của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$?

A.

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$f(x)$	$+$ 0 $-$

.

B.

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$

.

C.

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$f(x)$	$+$ 0 $+$

.

D.

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $-$

.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ và $a = -1 < 0$.

» Câu 16. Bảng xét dấu nào sau đây là bảng xét dấu của tam thức $f(x) = -x^2 - x + 6$?

A.

x	$-\infty$ -2 3 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

.

B.

x	$-\infty$ -2 3 $+\infty$
$f(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

.

C.

X	$-\infty$ -3 2 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

.

D.

X	$-\infty$ -3 2 $+\infty$
$f(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$ và $a = -1 < 0$.

» Câu 17. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty)$.

B. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

C. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1)$.

D. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

» Câu 18. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

B. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

D. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số b, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

» Câu 19. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tìm tất cả giá trị của x để $f(x) \geq 0$.

A. $x\in(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$. **B.** $x\in[-1;5]$.

C. $x\in[-5;1]$. **D.** $x\in(-5;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $-x^2-4x+5=0$ $\Leftrightarrow$ $x=1$, $x=-5$.

Mà hệ số $a=-1<0$ nên: $f(x)\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x\in[-5;1]$.

» Câu 20. Biểu thức $(3x^2-10x+3)(4x-5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$. **B.** $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$.

C. $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right)\cup(3;+\infty)$. **D.** $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=(3x^2-10x+3)(4x-5)$

Phương trình $3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ và $4x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3$		+	0	-	|	-	0	+	
$4x-5$		-	|	-	0	+	|	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$.

» Câu 21. Biểu thức $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$ âm khi

A. $x\in(1;2)$. **B.** $x\in(-3;-2)\cup(1;2)$.

C. $x\geq 4$. **D.** $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$

Phương trình $4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Phương trình $x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Ta có $x^2+5x+9=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0 \Rightarrow x^2+5x+9=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$. Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		$+\infty$
$4-x^2$		-	|	-	0	+	0	+	0	-	
x^2+2x-3		+	0	-	|	-	0	+	|	+	
x^2+5x+9		+	|	+	|	+	|	+	|	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ -2<x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

» Câu 22. Cho biểu thức $f(x)=\frac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn $f(x)$ không dương là

A. $x\in(0;3]\cup(4;+\infty)$. **B.** $x\in(-\infty;0]\cup[3;4)$.

C. $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$. **D.** $x\in(-\infty;0)\cup(3;4)$.

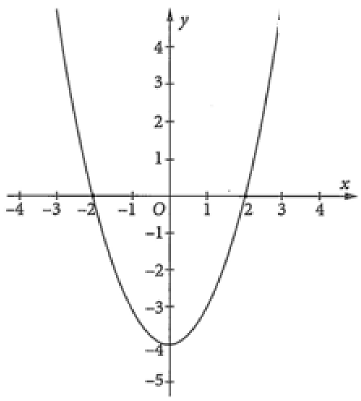
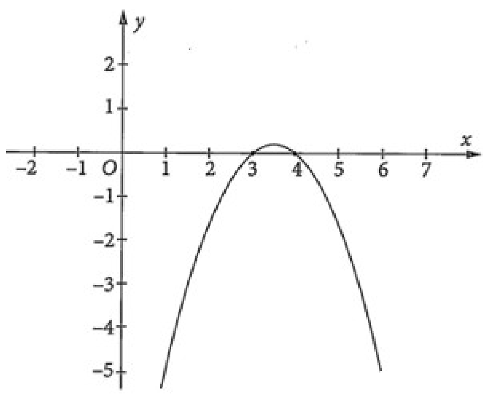
Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{4x-12}{x^2-4x}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 3\le x<4 \end{array}\right.$ hay $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 23. Cho đồ thị hàm số bậc hai $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Khi đó:

	
$y=f(x)$	$y=g(x)$

Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(-2;0)$ và $(2;0)$		
(b)	Đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(3;0)$ và		

	$(4;0)$		
(c)	Tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu: $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -2 & & 2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$		
(d)	$g(x)>0 \Leftrightarrow 3<x<4$		

✍ *Lời giải*

(a) *Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(-2;0)$ và $(2;0)$*

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(-2;0)$ và $(2;0)$

Nên tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=-2, x_2=2$.

Đồ thị có bề lõm quay lên trên nên hệ số $a>0$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(3;0)$ và $(4;0)$*

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(3;0)$ và $(4;0)$

Nên tam thức bậc hai $g(x)$ có hai nghiệm là $x_1=3, x_2=4$.

Đồ thị có bề lõm quay xuống dưới nên hệ số $a<0$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu:*

Do đó, ta có bảng xét dấu $y=f(x)$ sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

» **Chọn** SAI.

(d) $g(x)>0 \Leftrightarrow 3<x<4$

Quan sát đồ thị ta thấy $g(x)>0 \Leftrightarrow 3<x<4$

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 24. Cho biểu thức $f(x)=(3x-1)(3x^2-4x+1)$.
Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$		
(b)	Bảng xét dấu của biểu thức là:		

	x: $-\infty$ … $\frac{1}{3}$ … 1 … $+\infty$ $3x-1$: $-$ 0 $+$ | $+$ $3x^2-4x+1$: $+$ | $-$ 0 $+$ $f(x)$: $-$ 0 $-$ 0 $+$		
(c)	Với $x\in(1;+\infty)$ thì $f(x)<0$.		
(d)	Với $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$ thì $f(x)<0$.		

Lời giải

(a) $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\x=1\end{array}\right.$

Biểu thức $f(x)=(3x-1)(3x^2-4x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-1=0\\3x^2-4x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\x=1.\end{array}\right.$

» **Chọn** SAI.

(b) *Bảng xét dấu của biểu thức là:*

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x^2-4x+1$		$+$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Với* $x\in(1;+\infty)$ *thì* $f(x)<0$.

Từ bảng xét dấu, với $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$ thì $f(x)<0$.

» **Chọn** SAI.

(d) *Với* $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$ *thì* $f(x)<0$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 25.** Cho biểu thức $f(x)=\frac{x-3}{x^2+7x+6}$. Khi đó:

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-6\end{array}\right.$		
(b)	Bảng xét dấu của biểu thức là:		

x	$-\infty$		-6		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2+7x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

(c)			
(d)			

Lời giải

(a) $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$

Ta có: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3, x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$.

» Chọn SAI.

(b) *Bảng xét dấu của biểu thức là:*

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-6		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2+7x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

» Chọn ĐÚNG.

(c) *với* $x\in(-\infty;-6)\cup(-1;3)$ *thì* $f(x)>0$.

Từ bảng xét dấu:

với $x\in(-\infty;-6)\cup(-1;3)$ thì $f(x)<0$,

» Chọn SAI.

(d) *với* $x\in(-6;-1)\cup(3;+\infty)$ *thì* $f(x)<0$.

với $x\in(-6;-1)\cup(3;+\infty)$ thì $f(x)>0$.

» Chọn SAI.

» Câu 26. Cho $f(x)=\dfrac{5x^2+3x-8}{x^2-7x+6}$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điều kiện: $x\neq 6$		
(b)	$f(x)=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-\dfrac{8}{5}$		
(c)	$f(x)>0, \forall x\in\left(-\infty;-\dfrac{8}{5}\right)\cup(6;+\infty)$		

(d)	$f(x)<0,\forall x\in\left(-\frac{8}{5};1\right)\cup(1;6)$		

Lời giải

(a) *Điều kiện:* $x\neq 6$

Điều kiện: $x^2-7x+6\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq 6\end{cases}$.

» Chọn SAI.

(b) $f(x)=0\Rightarrow x=1 \vee x=-\frac{8}{5}$

Xét $f(x)=0\Rightarrow 5x^2+3x-8=0\Rightarrow x=1 \vee x=-\frac{8}{5}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $f(x)>0,\forall x\in\left(-\infty;-\frac{8}{5}\right)\cup(6;+\infty)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		1		6		$+\infty$
$5x^2+3x-8$		+	0	−	0	+	|	+	
x^2-7x+6		+	|	+	0	−	0	+	
f(x)		+	0	−	||	−	||	+	

Kết luận: $f(x)>0,\forall x\in\left(-\infty;-\frac{8}{5}\right)\cup(6;+\infty)$;

» Chọn ĐÚNG.

(d) $f(x)<0,\forall x\in\left(-\frac{8}{5};1\right)\cup(1;6)$

$f(x)<0,\forall x\in\left(-\frac{8}{5};1\right)\cup(1;6)$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 27. Cho $f(x)=\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7}$.

b)

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điều kiện: $x\neq 0$		
(b)	$f(x)=0\Rightarrow x=0$		
(c)	$x^2+5x+7<0\Leftrightarrow 1<x<4$		
(d)	$\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7}=0$ có tập nghiệm $S=(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$		

Lời giải

(a) *Điều kiện:* $x \neq 0$

Điều kiện: $x^2+5x+7 \neq 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \neq 0$ (luôn đúng).

» **Chọn** SAI.

(b) $f(x)=0 \Rightarrow x=0$

Xét $f(x)=0 \Rightarrow 4x^2+3x-1=0 \Rightarrow x=-1 \vee x=\frac{1}{4}$.

» **Chọn** SAI.

(b) $x^2+5x+7<0 \Leftrightarrow 1<x<4$

Xét $x^2+5x+7=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

» **Chọn** SAI.

(d) $\frac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7}=0$ có tập nghiệm $S=(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x^2+3x-1$		+	0	−	0	+	
x^2+5x+7		+		+		+	
f(x)		+	0	−	0	+	

Ta có: $\frac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{4};+\infty\right)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 28. Cho phương trình $mx^2-(4m+1)x+4m+2=0\ (1)$ với m là tham số.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-\frac{1}{4}<m<0$		
(b)	Không tồn tại giá trị m để phương trình (1) có 2 nghiệm âm.		
(c)	Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<1<x_2$ khi $-2<m<0$		
(d)	Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<x_2<3$ khi $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right.$		

Lời giải

Để phương trình có 2 nghiệm (1) phải là phương trình bậc 2.
Do đó $m \neq 0$.
Đặt $f(x) = mx^2 - (4m+1)x + 4m + 2$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (4m+1)^2 - 4m(4m+2) = 1 > 0$.
Do đó (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

(a) *Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-\frac{1}{4} < m < 0$*

Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $f(0).m < 0 \Leftrightarrow (4m+2).m < 0$

Trường hợp 1: $\begin{cases} 4m+2 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 4m+2 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases}$

Kết hợp ta được $-\frac{1}{2} < m < 0$

Vậy để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu nhau thì $-\frac{1}{4} < m < 0$.
» Chọn ĐÚNG.

(b) *Không tồn tại giá trị m để phương trình (1) có 2 nghiệm âm.*

Phương trình (1) có 2 nghiệm âm khi và chỉ khi $\begin{cases} f(0) \cdot m > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4m+2) \cdot m > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Với $(4m+2) \cdot m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4m+2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4m+2 < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{array} \right.$.

Với $S < 0 \Leftrightarrow \frac{4m+1}{m} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4m+1 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4m+1 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{4} \\ m > 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0$

Suy ra không tồn tại giá trị m để phương trình (1) có 2 nghiệm âm.
» Chọn ĐÚNG.

(c) *Phương trình* (1) *có 2 nghiệm* x_1, x_2 *thỏa* $x_1 < 1 < x_2$ *khi* $-2 < m < 0$

Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$ khi và chỉ khi

$$f(1)\cdot m < 0 \Leftrightarrow (m+1)\cdot m < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+1>0\\ m<0\end{cases}\\ \begin{cases}m+1<0\\ m>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>-1\\ m<0\end{cases}\\ \begin{cases}m<-1\\ m>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

» Chọn SAI.

(d) *Phương trình* (1) *có 2 nghiệm* x_1, x_2 *thỏa* $x_1 < x_2 < 3$ *khi* $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < 3$ $\Leftrightarrow \begin{cases}f(3)\cdot m>0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)\cdot m>0\\ S<6\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+1>0\\ m>0\end{cases}\\ \begin{cases}m+1<0\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.\\ \dfrac{4m+1}{m}<6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>-1\\ m>0\end{cases}\\ \begin{cases}m<-1\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.\\ \dfrac{1-2m}{m}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-2m>0\\ m<0\end{cases}\\ \begin{cases}1-2m<0\\ m>0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

» Chọn SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho: $-x^2+2(m+1)x-m^2+m<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

✓ Trả lời: 0

Xét tam thức bậc hai $f(x)=-x^2+2(m+1)x-m^2+m$ có:

$\Delta'=(m+1)^2-(-1).(-m^2+m)=3m+1$ và $a=-1<0$.

Để $f(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\Delta'=3m+1<0$ suy ra $m<\dfrac{-1}{3}$

» Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình: $(x^2-3x+2)(-x^2+5x-6)\geq 0$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

✓ Trả lời: 3

Tam thức bậc hai $f(x)=x^2-3x+2$ có $\Delta=1>0, a=1>0$ và có hai nghiệm $x_1=1; x_2=2$.

Tam thức bậc hai $g(x)=-x^2+5x-6$ có $\Delta=1>0, a=-1<0$ và có hai nghiệm $x_1=2; x_2=3$

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	|	+	
$g(x)$		−	|	−	0	+	0	−	
$f(x)\cdot g(x)$		−	0	+	0	+	0	−	

Suy ra $f(x)\cdot g(x)\geq 0$ khi $x\in[1;3]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;3]$.

» Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in[0;10]$ để phương trình $x^2-(m+1)x+3m-5=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

✓Trả lời: 5

Ta có: $\Delta=[-(m+1)]^2-4\cdot1\cdot(3m-5)=m^2-10m+21$.

Để phương trình $x^2-(m+1)x+3m-5=0$ có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta>0$ hay $m^2-10m+21>0$.

Tam thức bậc hai $m^2-10m+21$ có $a=1>0$ và có hai nghiệm $m_1=3, m_2=7$.

Do đó, $m^2-10m+21>0$ khi $m\in(-\infty;3)\cup(7;+\infty)$.

Vậy $x^2-(m+1)x+3m-5=0$ có hai nghiệm phân biệt khi $m\in(-\infty;3)\cup(7;+\infty)$.

Khi đó với $m\in[0;10]$ có 2 + 3 =5 giá trị nguyên dương của tham số *m*.

» Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để phương trình $-x^2+x+4m^2-5m+1=0$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

✓Trả lời: 20

Để phương trình $-x^2+x+4m^2-5m+1=0$ có hai nghiệm trái dấu thì

$$x_1\cdot x_2<0\Leftrightarrow -4m^2+5m-1<0.$$

Tam thức $-4m^2+5m-1$ có hai nghiệm $m=1$ và $m=\frac{1}{4}$ và hệ số của m^2 bằng -4 nhỏ hơn 0 nên $-4m^2+5m-1<0$ khi $m<\frac{1}{4}$ hoặc $m>1$.

Vậy để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Khi đó với $m\in[-10;10]$ có 11 + 9 =20 giá trị nguyên của tham số *m*.

» Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2x^2-(2m-1)x+1}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải

✓Trả lời: 2

Để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-(2m-1)x+1}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $2x^2-(2m-1)x+1>0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

Ta có: $a=2>0$ và $\Delta=(2m-1)^2-4.2.1<0 \Leftrightarrow 4m^2-4m-7<0$.

Tam thức $4m^2-4m-7$ có hai nghiệm $m=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}$ và $m=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$ và hệ số của m^2 bằng 4 lớn hơn 0 nên $4m^2-4m-7<0$ khi $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-(2m-1)x+1}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $m\in\left[\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2};\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}\right]$.

Khi đó $m\in\{0;1\}$

» Câu 34. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2+300Q+200000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng. Gọi *a;b* lần lượt là số sản phẩm tối thiểu và tối đa mà xí nghiệp cần sản xuất để không bị lỗ. Tính $S=a+b$

✍ *Lời giải*

✓Trả lời: 900

Lợi nhuận của xí nghiệp khi bán hết Q sản phẩm là:

$$1200Q-\left(Q^2+300Q+200000\right)=-Q^2+900Q-200000.$$

Để xí nghiệp không bị lỗ thì $-Q^2+900Q-200000\geq 0 \Leftrightarrow 400\leq Q\leq 500$.

Vậy để không bị lỗ, xí nghiệp cần sản xuất nhiều hơn hoặc bằng 400 sản phẩm và ít hơn hoặc bằng 500 sản phẩm.

Khi đó $\begin{cases} a=400 \\ b=500 \end{cases} \Rightarrow S=a+b=900$

» Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để: $f(x)=(m-1)x^2+2(m-1)x+m-3$ không dương với mọi $x\in\mathbb{R}$.

✍ *Lời giải*

✓Trả lời:

Ta có: $a=m-1, b=2(m-1), b'=m-1, c=m-3$.

Theo giả thiết: $(m-1)x^2+2(m-1)x+m-3\leq 0, \forall x\in\mathbb{R} \quad (*)$.

Trường hợp 1: $a=m-1=0\Rightarrow m=1$. Thay vào (*): $1-3\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ (đúng).

Suy ra $m=1$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a=m-1\neq 0\Rightarrow m\neq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ (m-1)^2-(m-1)(m-3)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m^2-2m+1-(m^2-4m+3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 2m-2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m<1.$$

Hợp hai kết quả trên, ta được $m\le 1$ thỏa mãn đề bài.

» Câu 36. Một quả bóng được đá lên từ mặt đất, biết rằng chiều cao y (mét) của quả bóng so với mặt đất được biểu diễn bởi một hàm số bậc hai theo thời gian t (giây). Sau 3 giây kể từ lúc được đá lên, quả bóng đạt chiều cao tối đa là $21m$ và bắt đầu rơi xuống. Hỏi thời điểm t lớn nhất là bao nhiêu (t nguyên) để quả bóng vẫn đang ở độ cao trên $10m$ so với mặt đất?

Lời giải

✓Trả lời: 5

Xét hàm số bậc hai $y=at^2+bt+c\,(a\ne 0)$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=3 \\ 9a+3b+c=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 6a+b=0 \\ 9a+3b=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{7}{3} \\ b=14 \\ c=0 \end{cases}$.

Vì vậy $y=-\dfrac{7}{3}t^2+14t$.

Ta cần xét: $y=-\dfrac{7}{3}t^2+14t>10$ hay $-\dfrac{7}{3}t^2+14t-10>0$.

Đặt $f(t)=-\dfrac{7}{3}t^2+14t-10;$ cho $f(t)=0 \Rightarrow t_1=\dfrac{21-\sqrt{231}}{7}, t_2=\dfrac{21+\sqrt{231}}{7}$.

Bảng xét dấu $f(t)$

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: $f(t)>0$ khi $t_1<t<t_2$ hay $\underbrace{\dfrac{21-\sqrt{231}}{7}}_{\approx 0,83}<t<\underbrace{\dfrac{21+\sqrt{231}}{7}}_{\approx 5,17}$.

Vì t nguyên nên $t\in[1;5]$. Do vậy giá trị $t=5$ thỏa mãn đề bài.

» Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2+2x-15<0 \\ (m+1)x\ge 3 \end{cases}$

Lời giải

✓Trả lời: 19

Xét bất phương trình (1): $x^2+2x-15<0$. Đặt $f(x)=x^2+2x-15$;
$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-5 \vee x=3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(1) có tập nghiệm $S_1=(-5;3)$.

Xét bất phương trình $(2):(m+1)x\ge 3$.

Trường hợp 1: $m+1=0\Rightarrow m=-1$.

Thay vào (2): $0\ge 3$ (vô lí). Khi đó (2) vô nghiệm, suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm. Loại $m=-1$.

Trường hợp 2: $m+1>0\Rightarrow m>-1$. Khi đó: (2) trở thành $x\ge\dfrac{3}{m+1}$, nên có tập nghiệm là $S_2=\left[\dfrac{3}{m+1};+\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi: $S_1\cap S_2\ne\varnothing\Leftrightarrow\dfrac{3}{m+1}<3\Leftrightarrow 3<3m+3($ do $m+1>0$) $\Leftrightarrow m>0$.

So điều kiện, ta thấy $m>0$ thỏa mãn.

Trường hợp 3: $m+1<0\Rightarrow m<-1$. Khi đó: (2) trở thành: $x\le\dfrac{3}{m+1}$, nên có tập nghiệm $S_3=\left(-\infty;\dfrac{3}{m+1}\right]$.

Hệ có nghiệm khi: $S_1\cap S_3\ne\varnothing\Leftrightarrow\dfrac{3}{m+1}>-5\Leftrightarrow 3<-5(m+1)$ (do $m+1<0)$

$\Leftrightarrow 5m<-8\Leftrightarrow m<-\dfrac{8}{5}$.

So điều kiện, ta thấy $m<-\dfrac{8}{5}$ thỏa mãn.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m<-\dfrac{8}{5}$ hoặc $m>0$.

Khi đó với $m\in[-10;10]$ có 9 + 10 = 19 giá trị nguyên của tham số *m*.

» Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để phương trình $x^2+(m-2)x-8m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

✓ Trả lời:

Ta có: $a=1\ne 0, b=m-2, c=-8m+1$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\Delta=(m-2)^2-4(-8m+1)>0\Leftrightarrow m^2+28m>0$.

Xét $m^2+28m=0\Leftrightarrow m=0 \vee m=-28$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-28		0		$+\infty$
m^2+28m		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $m^2+28m>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;-28)\cup(0;+\infty)$.

Vậy với $m\in(-\infty;-28)\cup(0;+\infty)$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó với $m\in[-10;10]$ có 11 giá trị nguyên của tham số *m*.

» Câu 39. Tổng chi phí P (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm được cho bởi biểu thức $P=x^2+30x+3300$; giá bán một sản phẩm là 170 nghìn đồng. Gọi *a;b* lần lượt là số sản phẩm tối thiểu và tối đa mà nhà sản xuất cần sản xuất để không bị lỗ. Tính $S=a+b$ (giả sử các sản phẩm được bán hết)?

Lời giải

✓Trả lời: 140

Khi bán hết x sản phẩm thì số tiền thu được là: $170x$ (nghìn đồng).
Điều kiện để nhà sản xuất không bị lỗ là
$170x\ge x^2+30x+3300\Leftrightarrow x^2-140x+3300\le 0$.

Xét $x^2-140x+3300=0\Rightarrow x=30 \vee x=110$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		30		110		$+\infty$
$x^2-140x+3300$		+	0	−	0	+	

Ta có: $x^2-140x+3300\le 0\Leftrightarrow x\in[30;110]$.
Vậy nếu nhà sản xuất làm ra từ 30 đến 110 sản phẩm thì họ sẽ không bị lỗ.

Khi đó $\begin{cases}a=30\\b=110\end{cases}\Rightarrow S=a+b=140$

» Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để phương trình $(m+1)x^2-2(m+1)x-m+2=0$ vô nghiệm.

Lời giải

✓Trả lời: 2

Trường hợp 1: $a=m+1=0\Rightarrow m=-1$.
Thay vào phương trình: $3=0$ (vô nghiệm), nhận $m=-1$.
Trường hợp 2: $a=m+1\neq 0\Rightarrow m\neq -1$. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi
$\Delta'=(m+1)^2-(m+1)(-m+2)<0\Leftrightarrow m^2+2m+1+m^2-m-2<0\Leftrightarrow 2m^2+m-1<0$.

Xét $2m^2+m-1=0\Leftrightarrow m=-1 \vee m=\frac{1}{2}$.
Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2m^2+m-1$		+	0	−	0	+	

Ta có: $2m^2+m-1<0\Leftrightarrow -1<m<\frac{1}{2}$.

Kết hợp hai kết quả trên, ta thu được $m\in\left[-1;\frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn đề bài.

Khi đó với $m\in[-10;10]$ có 2 giá trị nguyên của tham số *m*.

» Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ để phương trình $\frac{1}{m}x^2+2(m-2)x+m^2=0$ vô nghiệm.

Lời giải

✓ Trả lời: 196

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{m}\neq 0 \\ \Delta'=(m-2)^2-\dfrac{1}{m}\cdot m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2-5m+4>0 \end{cases} (*)$$

Xét $m^2-5m+4=0 \Leftrightarrow m=1 \vee m=4$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		1		4		$+\infty$
m^2-5m+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $m^2-5m+4>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

Từ $(*)$, ta có $m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$ thỏa mãn đề bài.

Khi đó với $m\in[-100;100]$ có 101 + 96 = 196 giá trị nguyên của tham số *m*.

» Câu 42. Một khung dây thép hình chữ nhật với chiều dài $30\,cm$ và chiều rộng $20\,cm$ được uốn lại thành hình chữ nhật mới với kích thước $(30-x)\ cm$ và $(20+x)cm$. Với $x\in(a;b)$ thì diện tích của khung sau khi uốn tăng lên. Khi đó trong khoảng $(a;b)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

✓ Trả lời: 9

Ta có điều kiện: $-20<x<30$

Diện tích hình chữ nhật lúc sau là: $S=(30-x)\cdot(20+x)=-x^2+10x+600\,cm^2$.

Diện tích hình chữ nhật lúc đầu là $600\,cm^2$

Đặt $f(x)=-x^2+10x+600-600=-x^2+10x$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=10 \end{array}\right.$. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$		0		10		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Diện tích của khung sau khi uốn tăng lên khi $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0;10)$.

Khi đó trong $(0;10)$ có 9 giá trị nguyên.

» Câu 43. Cho phương trình $x^4-2x^2-2-m=0\ (1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình (1) phương trình có đúng 2 nghiệm

Lời giải

✓ Trả lời: 2

Đặt: $x^2=t(t\geq 0)$. Khi đó (1) trở thành: $t^2-2t-2-m=0\ (2)$

Phương trình (1) có 2 nghiệm khi (2) phải có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} t_1=t_2>0 \\ t_1<0<t_2 \end{array}\right.$

» **TH1:** $t_1 = t_2 > 0$. Khi đó $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m+3=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Với $m=-3$ thì phương trình (2) nghiệm $t_1 = t_2 = 1$ thỏa mãn.

» **TH2:** $t_1 < 0 < t_2$. Khi đó: $-2-m<0 \Leftrightarrow m>-2$.

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm khi $m=-3$ hoặc $m>-2$.

Khi đó có 2 giá trị nguyên âm của tham số m

» Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\dfrac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1} \le 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

✓Trả lời: 5

Ta có $-x^2+2x-5 = -(x-1)^2-4<0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên $\dfrac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1} \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-mx+1>0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = m^2-4 \le 0 \Leftrightarrow m \in [-2;2]$.

Khi đó có 5 giá trị nguyên của tham số m

» Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20;20)$ để $x^2-2x+1-m^2 \le 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$.

Lời giải

✓Trả lời: 38

Ta có $\Delta' = m^2 \ge 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1-m$ và $x_2 = 1+m$

» Nếu $m=0$ thì bpt trở thành $x^2-2x+1 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn.

» Nếu $m>0$ thì $x_1 = 1-m < x_2 = 1+m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=[1-m;1+m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$ khi và chỉ khi $[1;2] \subset [1-m;1+m]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ge 1-m \\ 2 \ge 1+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1$

» Nếu $m<0$ thì $x_1 = 1-m > x_2 = 1+m$.

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=[1+m;1-m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$ khi và chỉ khi $[1;2] \subset [1+m;1-m]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ge 1+m \\ 2 \ge 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ m \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1$.

Vậy $m \le -1 \vee m \ge 1$ thỏa mãn.

Khi đó $m \in (-20;20)$ có 19 + 19 = 38 giá trị nguyên của tham số m

» Câu 46. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{(m+10)x^2-2(m-2)x+1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

✓Trả lời: 20

Hàm số xác định $\Leftrightarrow (m+10)x^2-2(m-2)x+1 \ge 0 (*)$.

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi (*) đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

» $m=-10$ (*) trở thành: $24x+1\geq 0$ không đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra $m=-10$ loại.

» $m\neq -10$ (*) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+10>0\\ (m-2)^2-(m+10)\leq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-5m-6\leq 0\\ m>-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq m\leq 6\\ m>-10\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m\leq 6.$

Vậy với $-1\leq m\leq 6$ thì hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}$.
Khi đó tổng các giá trị nguyên = 20

----------------------------------- Hết -----------------------------------