**ĐỀ KHẢO SÁT HSG TOÁN 8 NĂM HỌC 2022 – 2023**

**( Thời gian 150 phút)**

**Câu 1(4,0 điểm) :**

1. Cho biểu thức  với .

Rút gọn biểu thức A. Tìm giá trị lớn nhất của A biết x, y thỏa mãn đẳng thức :

.

2.Cho a, b, c, d là các số dương thỏa mãn đẳng thức : . Chứng minh rằng a = b = c = d.

**Câu 2(4,0 điểm) :**

1. Phân tích đa thức thành nhân tử :

2.Tìm a, b sao cho chia hết cho đa thức .

3.Cho .

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có : xn + yn  = an + bn.

**Câu 3(4,0 điểm) :**

1.Cho a, b, c là 3 số nguyên thỏa mãn : .

Chứng minh rằng 2023 ( a + b + c ) chia hết cho 27.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn : 

**Câu 4 (6 điểm):**

Cho hình vuông ABCD . E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hạ .

1. Chứng minh 
2. Gọi N là giao điểm của AK và BM . Tính số đo góc ANB.
3. Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F . Chứng minh DF + BE = CE .
4. Chứng minh rằng .

**Câu 5 (2,0 điểm):** Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a + b + c = 1.

Chứng minh rằng : 

………………………….. Hết …………………………..

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung cần đạt** | **Điểm** |
| **Câu 1**  **(4,0đ)** | 1(3đ).  =      Vậy A =  với  Ta có :      A = 2 khi  Vậy GTLN của A = 2 Khi ; | 0,5đ  0,5đ  0,5đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ |
| 2(1đ).      Từ đó lập luận để suy ra được :  ( Do a, b, c, d là các số dương)  Vậy a = b = c = d. | 0,25đ  0,25đ  0,5đ |
| **Câu 2**  **(4,0đ)** | **1)( 1,5 điểm** )  1. phân tích đa thức thành nhân tử :  Ta có : x4 + 6x3 + 7x2 – 6x + 1= (x4 + 6x3 + 9x2) – 2x2 – 6x + 1  = (x2 +3x)2 – 2(x2 + 3x) + 1  = (x2 +3x - 1)2 | 0,5đ  0,5đ  0,5đ |
| **2)( 1,5 điểm** )  Ta có :  Vì chia hết cho đa thức  Nên tồn tại một đa thức q(x) sao cho f(x)=g(x).q(x)    Với  Với  Thay (1) vào (2) . Ta có : 2a – (- a – 6) + 6 = 02a + a + 6 + 6 = 0  3a = -12  a = - 4  Vậy a = - 4; b = - 2 | 0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ |
| **3)( 1,0điểm** )  Từ:  Vì  thay vào trên ta có :    -Nếu y = b kết hợp với x + y = a + b x = a xn + yn = an + bn  -Nếu x + a = y + b  x – y = a – b kết hợp với x + y = a + b  x = a, y = bxn + yn = an + bn  Vậy nếu x + y = a + b và x2 + y2 = a2 + b2 thì xn + yn = an + bn với mọi n nguyên dương. | 0,5đ  0,25đ  0,25đ |
| **Câu 3**  **(4,0đ)** | **1(2đ).**Theo đề bài :  Biến đổi được về :  Xét 3 số dư của a, b, c khi chia cho 3.  - Nếu cả 3 số a, b, c có số dư khác nhau ( 0; 1; 2) thì  nhưng khi đó các hiệu  a – b ; b – c; c – a không chia hết cho 3  không chia hết cho 3 ( vô lí ) vì  -Nếu có 2 số dư bằng nhau thì a + b + c không chia hết cho 3 còn một trong các hiệu a – b ; b – c; c – a chia hết cho 3 ( vô lí ) vì  Suy ra chỉ còn trường hợp cả 3 số a, b, c có cùng số dư khi chia cho 3  Mà( ĐPCM)  **2(2 điểm)**  Ta có:    -Nếu x – 1= 0x = 1 ta có 1 + y2 = 1 + y2 đúng với mọi y nguyên  Các cặp (x,y) nguyên thỏa mãn là (1 ; y ) với  -Nếu x4 + x3 + x2 +x +1 = y2  4x4 + 4x3 + 4x2 + 4x + 4 = ( 2y) 2  (⁎)  Ta có : ( 2y )2 – ( 2x2 +x )2 = 4x4 + 4x3 + 4x2 + 4x + 4 - 4x4 - 4x3 - x2  = 3x2 +4x + 4 = với mọi x  Suy ra ( 2x2 +x )2 < ( 2y )2 (1)  Lại có : ( 2x2 + x + 2)2 – (2y)2 = 4x4 + x2 + 4 + 4x3+8x2 + 4x - 4x4 - 4x3 - 4x2 - 4x - 4  (2)  Từ (1) và (2) suy ra :hoặc    + Với : ( 2y )2 = ( 2x2 + x + 1)2 thay vào (⁎) ta có :  4x4 + 4x3 + 4x2 + 4x + 4 = ( 2x2 + x + 1)2 = 4x4+x2 +1+4x3 + 4x2 +2x  x2 -2x - 3 = 0 (x + 1)(x – 3) = 0x = -1 hoặc x = 3  Nếu x = -1 y2  = 1  Nếu x = 3  y2 = 1211  + Với : ( 2y )2 = ( 2x2 + x + 2)2 thay vào (⁎) ta có :  4x4 + 4x3 + 4x2 + 4x + 4 = ( 2x2 + x + 2)2 = 4x4+x2 +4 + 4x3 + 8x2 +4x  5x2 = 0 x2 = 0 x = 0y2 =1  Vậy các cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn là :  (1 ; y ) với ;(-1 ;1) ;(-1 ;-1) ;(3 ;11) ; (3 ;-11) ; (0 ;1) ; (0 ;-1) | 0,5đ  0,5đ  0,5đ  0,5đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ |
| **Câu4**  **(6,0đ)** | A  B  C  D  E  K  F  M  N  O  Q  H  1  2  3  P  4 |  |
|  |
| 1. 1(1,5 đ). Chứng minh được AEKD là hình chữ nhật. Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo. Từ đó suy ra:   vuông tại K  (ĐPCM) | 0,5 đ  1,0 đ |
| 1. 2( 1,5 đ). Gọi H là giao điểm của AK và DM   Chứng minh được AECK là hình bình hành . Từ đó suy ra AK // CE  mà KD = KC  kết hợp với  cân tại A cân tại A  Do  cân tại A  Do  cân tại A  = =  Lại có là góc ngoài của tam giác vuông HMN từ đó tính được  Vậy | 0,5đ  0,5 đ  0,5đ |
| 3(1,5đ).Trên tia đối của tia BA lấy điểm P sao cho BP = DF từ đó chứng minh được  mà  nên  Mà vuông tại B nên .Kết hợp với  ( gt). Suy ra  cân tại E  (ĐPCM) | 0,5đ  0,5đ  0,5đ |
|  | 4(1,5đ) Qua E vẽ đường vuông góc với CF cắt CD tại Q  Xêt hình vuông ABCD có EK là đường trung bình .  Suy ra EK = AD = CD, EK //AD  Xét  và  có :  ( cùng phụ với góc EQC); CD = EK;  ( Hai cạnh tương ứng)  Xét  có CF là đường phân giác đồng thời là đường cao. Suy ra  cân tại C CF cũng là đường trung trực FE = FQ ( tính chất đường trung trực)  EF + FQ = 2EF   * Nếu 3 điểm E, F, Q thẳng hàng thì EQ = EF + FQ * Nếu 3 điểm E, F, Q không thẳng hang thì:   Xét có EQ < EF + FQ  . Mà EQ = FC  ( ĐPCM) | 0,5đ  0,5đ  0,25đ  0,25đ |
| **Câu 5**  **(2,0đ)** | Ta có a + b2 =a (a + b + c) + b2 = a2 + ab + ac + b2= ( a2 + b2) + ab + ac 2ab + ab + ac = 3ab + ac    Áp dụng bất đẳng thức :( với x, y là các số dương ) . Dấu bằng xảy ra khi x = y ta có :  . Chứng minh tương tự ta cũng có :  ;  Cộng theo vế của 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có:    (ĐPCM).  Dấu “=” xảy ra khi . | 0,5đ  1đ  0,25đ  0,25đ |

* Học sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa
* Bài hình nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm điểm.