



Chương

Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH

A

Lý thuyết

1. Diện tích hình thang cong



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành, $x=a$ và

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

■ **Trường hợp** $f(x) > 0$ **trên** $[a; b]$,

Khi đó diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, Ox và hai

đường thẳng $x=a$, $x=b$:

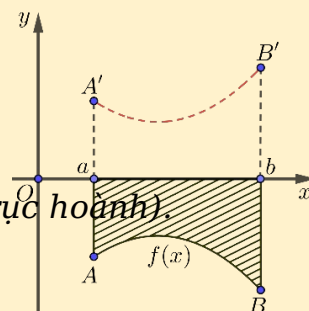
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

■ **Trường hợp** $f(x) \leq 0$ **trên** $[a; b]$, ta có $-f(x) \geq 0$

S hình thang cong $aABb = S$ hình thang cong $aA'B'b$.

($aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành).

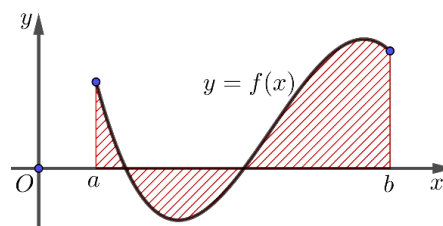
$$S = S_{aABb} = S_{aA'B'b} = \int_a^b (-f(x)) dx$$



Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



Chú ý

» Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad \text{hoặc} \quad S = -\int_a^b f(x) dx$$



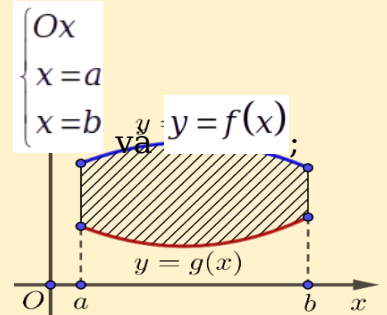
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, $x=a$ và $x=b$

Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $x=a$, $x=b$.

■ **Xét trường hợp** $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a;b]$

Gọi S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y=g(x)$.

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ và hai đường

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

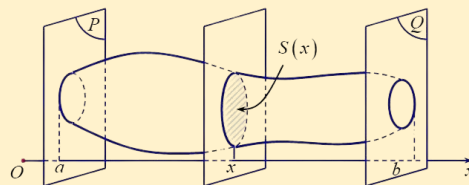
thẳng $x=a$, $x=b$ được tính:

2. Thể tích hình khối:



Định nghĩa

■ Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , $(a \leq x \leq b)$



Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Khi đó thể tích của vật thể B được xác định:

3. Thể tích khối tròn xoay:

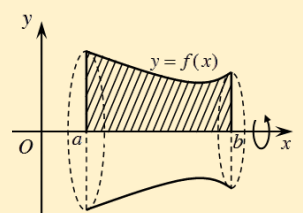


Định nghĩa

■ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox , và hai đường thẳng

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$x=a$, $x=b$ quanh trục Ox :





Các dạng bài tập

Dạng 1. Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ



Phương

■ **Xác định công thức diện tích hình phẳng:**

» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích

» **Bước 4:** Phá trị tuyệt đối: Lấy công thức hàm số của đồ thị nằm trên trừ công thức hàm số của đồ thị nằm dưới

■ **Xác định công thức thể tích khối tròn xoay:**

» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

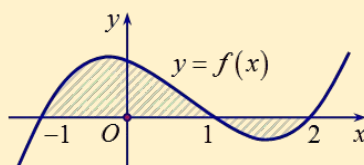
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích



Ví dụ 1.1.

Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Xây dựng công thức tính S ?



Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm $x = -1; x = 1; x = 2$.

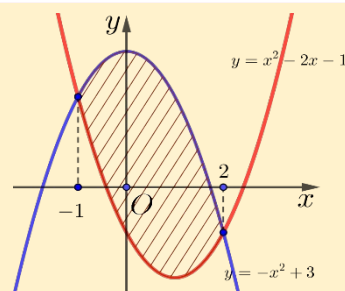
$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 [f(x) - 0] dx + \int_1^2 [0 - f(x)] dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

Do đó



Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Xác định công thức diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.





Lời giải

$$(H): \begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ y = x^2 - 2x - 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases}$$

Ta có:

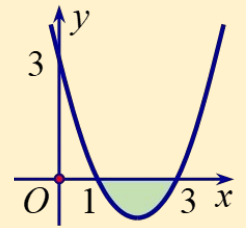
$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

Ta có: (do trên đoạn $[-1; 2]$ phần đồ thị $y = -x^2 + 3$ nằm trên đồ thị $y = x^2 - 2x - 1$).



Ví dụ 1.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức gì?



Lời giải

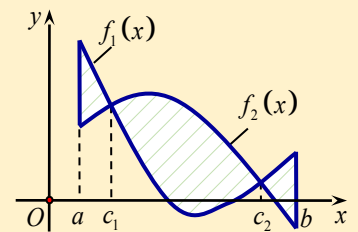
Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$$



Ví dụ 1.4.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và đường thẳng $x = a$, $x = b$. Công thức tính diện tích của hình (H) là?



Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y = f_1(x)$ cắt $y = f_2(x)$ tại hai điểm $x = c_1; x = c_2$.

Xét trong $[a; c_1] : f_1(x) \geq f_2(x)$;

Xét trong $[c_1; c_2] : f_1(x) \leq f_2(x)$ và

Xét trong $[c_2; b] : f_1(x) \geq f_2(x)$

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_a^{c_1} (f_1(x) - f_2(x)) dx + \int_{c_1}^{c_2} (f_2(x) - f_1(x)) dx + \int_{c_2}^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

Vậy



▮ Dạng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox và $x=a$, $x=b$



Phương pháp

$$\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=a; x=b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b f(x) dx$$

✚ Diện tích hình phẳng giới hạn:

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» **Bước 1:** Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b) (a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b)$.

» **Bước 2:** Tính
$$S = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_n}^b f(x) dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

✚ **Chú ý:** Ngoài cách trên ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối



Ví dụ 2.1.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x=1$, $x=2$ bằng bao nhiêu?

✚ Lời giải

Diện tích hình phẳng là
$$S = \int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$



Ví dụ 2.2.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

✚ Lời giải

Xét phương trình
$$(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}.$$

Ta có:
$$S = \int_1^2 |(x-2)^2 - 1| dx = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{2}{3}.$$



Ví dụ 2.3.

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2 - 2x$, $y=0$, $x=-4$, $x=1$

✚ Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:
$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}.$$



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
VT		+	0	-	0	+

Diện tích:
$$S = \int_{-4}^1 |x^2 - 2x| dx = \int_{-4}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-4}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = 38.$$



Ví dụ 2.4.

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	2
$x^3 - 1$	-	0	+

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1| dx = \int_0^1 |x^3 - 1| dx + \int_1^2 |x^3 - 1| dx = \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx = \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$



Ví dụ 2.5.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục Ox , $x = 1$ và

$$x = 4 \text{ được tính bởi công thức } V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx.$$



▮ Dạng 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$ và $x=a$, $x=b$



Phương pháp

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a; x=b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

⌘ Diện tích hình phẳng giới hạn:

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» **Bước 1:** Giải $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b) (a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b)$

» **Bước 2:** Tính
$$S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

⌘ **Chú ý:** Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.



Ví dụ 3.1.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^4 - 4x^2 + 4$, $y=x^2$, đường thẳng $x=0$ và $x=1$.

⌘ Lời giải

$$S = \int_0^1 |x^4 - 4x^2 + 4 - x^2| dx = \int_0^1 |x^4 - 5x^2 + 4| dx$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\text{Vì } x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1]$$

$$\text{Nên } S = \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 = \frac{38}{15}.$$



Ví dụ 3.2.

Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$ có diện tích

⌘ Lời giải

$$x(1-x) = x^3 - x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$.

$$\text{Khi đó } S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$



$$= \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \quad (\text{đvdt}).$$



Ví dụ 3.3.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$;

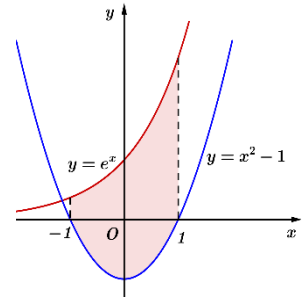
(2) $y = \sin x, y = x, x = \frac{\rho}{2}, x = \rho$.

Lời giải

(1) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$;

Xét $x \in [-1; 1]$: $\begin{cases} e^x > 0 \\ -(x^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow e^x - (x^2 - 1) > 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow |e^x - (x^2 - 1)| = e^x - x^2 + 1$

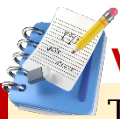
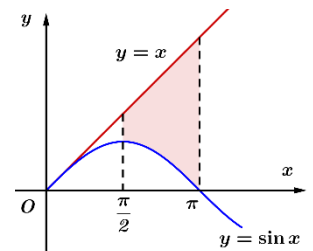
Diện tích $S = \int_{-1}^1 |e^x - (x^2 - 1)| dx$
 $= \int_{-1}^1 (e^x - x^2 + 1) dx = \left(e^x - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{3e^2 + 4e - 3}{3e}$



(2) $y = \sin x, y = x, x = \frac{\rho}{2}, x = \rho$.

Xét $x \in \left[\frac{\rho}{2}; \rho \right]$: $\sin x \leq 1 < x \Rightarrow \sin x - x < 0 \Rightarrow |\sin x - x| = x - \sin x$

Diện tích $S = \int_{\frac{\rho}{2}}^{\rho} |\sin x - x| dx = \int_{\frac{\rho}{2}}^{\rho} (x - \sin x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \cos x \right) \Big|_{\frac{\rho}{2}}^{\rho} = \frac{3\rho^2}{8} - 1$



Ví dụ 3.4.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y = e^x, y = x^2, x = 0, x = 1$;

(2) $y = \cos x, y = x + 1, x = \frac{\rho}{2}, x = \rho$.

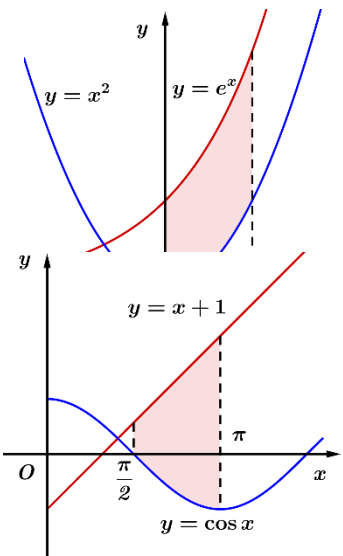
Lời giải

(1) $y = e^x, y = x^2, x = 0, x = 1$;

Xét $x \in [0; 1]$: $\begin{cases} e^x \geq 1 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} e^x \geq 1 \\ -x^2 \geq -1 \Rightarrow e^x - x^2 \geq 0 \Rightarrow |e^x - x^2| = e^x - x^2 \end{cases}$

Diện tích $S = \int_0^1 |e^x - x^2| dx = \int_0^1 (e^x - x^2) dx = \left(e^x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = e - \frac{4}{3}$

(2) $y = \cos x, y = x + 1, x = \frac{\rho}{2}, x = \rho$.





Xét $x \in \left[\frac{p}{2}; p\right]$: $\cos x \leq 1 < x+1 \Rightarrow \cos x - (x+1) < 0 \Rightarrow |\cos x - (x+1)| = x+1 - \cos x$

$$S = \int_{\frac{p}{2}}^p |\cos x - (x+1)| dx = \int_{\frac{p}{2}}^p (x+1 - \cos x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x - \sin x \right) \Big|_{\frac{p}{2}}^p = \frac{3p^2 + 4p + 8}{8}$$

Diện tích



Ví dụ 3.5.

Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường $(P): y = \frac{x^2 - 2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y = x-1$ và $x=a, x=2a$ ($a>1$) bằng $\ln 3$?

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P): y = \frac{x^2 - 2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y = x-1$ và $x=a, x=2a$ ($a>1$) là

$$S = \int_a^{2a} \left| \frac{x^2 - 2x}{x-1} - (x-1) \right| dx = \int_a^{2a} \left| -\frac{1}{x-1} \right| dx = \left| \ln|x-1| \right|_a^{2a} = \left| \ln \frac{2a-1}{a-1} \right| = \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=\frac{4}{5} \end{cases}$$

Do $a>1$ nên $a=2$.

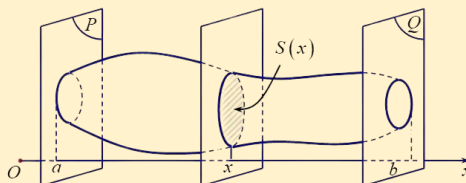


▮ Dạng 4. Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành



Phương

- Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , $(a \leq x \leq b)$



Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Khi đó thể tích của vật thể B được xác định:



Ví dụ 4.1.

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có

👉 Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = 3x \cdot x^2 = 3x^3$.

$$V = \int_1^3 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_1^3 = 60$$

Khi đó



Ví dụ 4.2.

Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=p$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq p$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$

👉 Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = (2\sqrt{\sin x})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \sin x$.

$$V = \int_0^p S(x) dx = \int_0^p \sqrt{3} \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^p = 2\sqrt{3}$$



Ví dụ 4.3.

Cho phần vật thể $(\mathfrak{V})$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\mathfrak{V})$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$), ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện:

$$S(x) = \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$$

$$V_{\mathfrak{V}} = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 x^2(2-x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Ví dụ 4.4.

Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000p$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là:

$$\sqrt{m^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = p \int_{-|m|}^{|m|} (m^2 - x^2) dx = p \left(m^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-|m|}^{|m|} = \frac{4pm^2|m|}{3}$$

$$\text{Ta có: } V < 1000p \Leftrightarrow \frac{4pm^2|m|}{3} < 1000p \Leftrightarrow |m|^3 < 750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750} < m < \sqrt[3]{750}$$

Ta có $\sqrt[3]{750} \approx 9,08$ và $m \neq 0$.

Suy ra, các giá trị m nguyên là $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của m .



▮ Dạng 5. Thể tích khối tròn xoay



Phương

✚ Xoay miền hình phẳng giới hạn:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ Ox; x = a; x = b \end{cases}$$

quanh trục Ox .

» Bước 1:

Giải

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Ví dụ 5.1.

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox : $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 2$.

👉 Lời giải

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$$

Thể tích khối tròn xoay



Ví dụ 5.2.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ quanh

👉 Lời giải

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\pi \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{2}$$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là



Ví dụ 5.3.

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong quay quanh trục hoành

(1) $y = \sqrt{2 + \sin x}$ Ox và $x = 0, x = p$.

(2) $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$

👉 Lời giải

(1) $y = \sqrt{2 + \sin x}, Ox$ và $x = 0, x = p$;

$$V = \pi \int_0^p (\sqrt{2 + \sin x})^2 dx = \pi \int_0^p (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^p = 2\pi(p + 1)$$

Ta có:

(2) $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$.



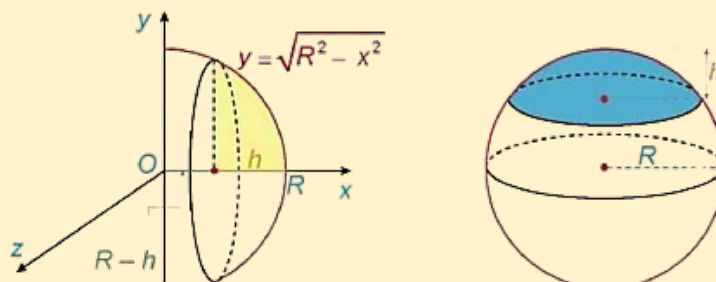
$$V = \rho \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx = \rho \int_0^2 (x^4 + 6x^2 + 9) dx = \frac{202}{5} \rho$$

Ta có:



Ví dụ 5.4.

Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h ($0 < h \leq R$) sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h$, $x = R$ xung quanh trục Ox . Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



Lời giải

Ta có thể tích của khối chỏm cầu là

$$V = \rho \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx = \rho \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{R-h}^R = \rho \left[R^2 \cdot h - Rh(R-h) - \frac{h^3}{3} \right] = \rho \left(Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$$



▮ Dạng 6. Từ đồ thị tính diện tích hình phẳng



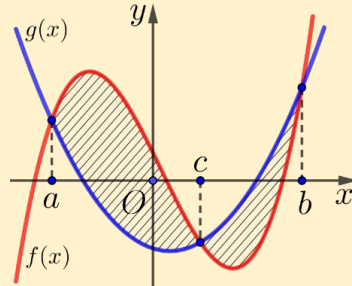
Phương

● Trường hợp 1:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow$$

diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



» **Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$$

» **Bước 2:** Xét hiệu

$$f(x) - g(x)$$

trên các đoạn

$$[a; c]; [c; b]$$

$$\begin{cases} [a; c] : f(x) - g(x) > 0 \\ [c; b] : f(x) - g(x) < 0 \end{cases}$$

Giả sử trên

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

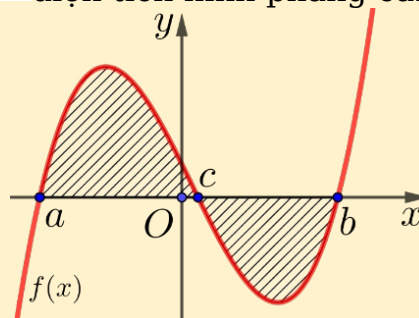
» **Bước 3:** Khi đó

$$\begin{cases} y = f(x) \\ Ox : y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

● Trường hợp 2:

diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_a^b |f(x) - 0| dx$$



» **Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy

$$f(x) - 0 = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$$

» **Bước 2:** Xét hiệu

$$f(x) - 0$$

trên các đoạn

$$[a; c]; [c; b]$$

$$\begin{cases} [a; c] : f(x) - 0 > 0 \\ [c; b] : f(x) - 0 < 0 \end{cases}$$

Giả sử trên

$$S = \int_a^b |f(x) - 0| dx = \int_a^c (f(x) - 0) dx + \int_c^b (0 - f(x)) dx$$

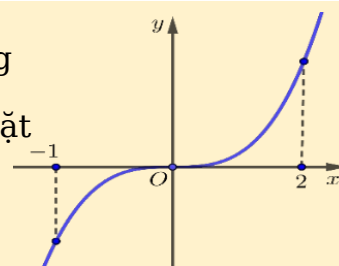


Ví dụ 6.1.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt

$$a = \int_{-1}^0 f(x) dx, \quad b = \int_0^2 f(x) dx$$

, Khi đó tính S theo $a; b$.



Lời giải

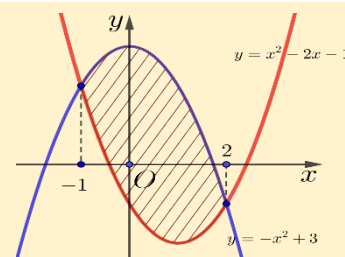
Ta có:
$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx$$

Ta thấy $f(x) \geq 0 \forall x \in [0; 2]; f(x) \leq 0 \forall x \in [-1; 0] \rightarrow S = - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b$



Ví dụ 6.2.

Cho các hàm số $y=x^2 - 2x - 1$ và $y=-x^2 + 3$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định công thức và tính diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.



Lời giải

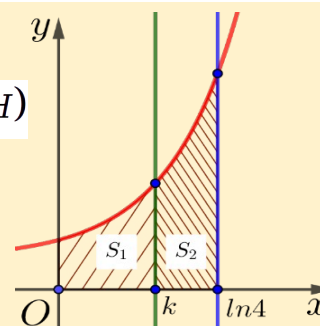
Ta có: $(H): \begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$ và $-x^2 + 3 = x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có:
$$S = \int_{-1}^2 |(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)| dx = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = 9$$



Ví dụ 6.3.

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



Lời giải

Ta có
$$S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1 \quad \text{và} \quad S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$$

Ta có
$$S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow k = \ln 3$$





▮ Dạng 7. Từ diện tích hình phẳng tính giá trị hàm

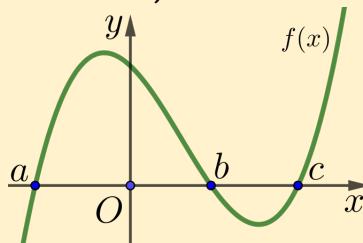


Phương

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Áp dụng định nghĩa tích phân:

Thì lúc này đề bài yêu cầu so sánh $F(b)$; $F(a)$.



Bài toán:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục có đồ thị như hình. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; c]$

So sánh $F(a); F(c); F(x), x \in [a; c]$.

» **Bước 1:** So sánh $F(a); F(b)$.

Trên $[a; b] : f(x) > 0 \rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Mà $\int_a^b f(x) dx > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) > 0 \Leftrightarrow F(b) > F(a)$

» **Bước 2:** Tương tự so sánh $F(b); F(c)$.

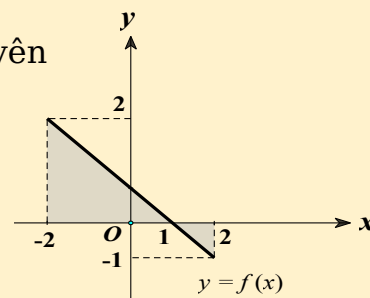
$$\begin{cases} y = f(x) \\ O x \\ x = a; x = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ O x \\ x = b; x = c \end{cases}$$



Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có một nguyên hàm là $F(x)$ trên $[-2; 1]$ đồng thời $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi các số sau: $F(2) - F(-2)$; $F(-2) - F(1)$; $F(2) - F(1)$; $F(2) - F(0)$ có bao nhiêu số dương?



👉 **Lời giải**



$$S_{\text{DCIB}} = \int_{-2}^1 f(x) dx = F(1) - F(-2) > 0$$

$$S_{\text{DIDA}} = \int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) > 0$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx$$

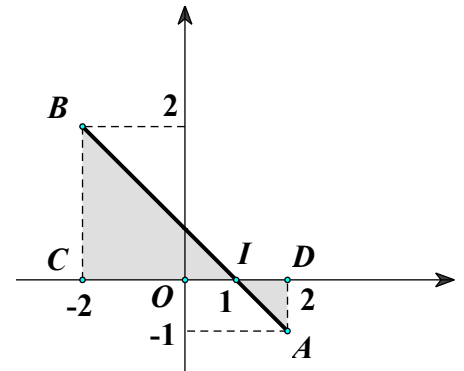
$$\Leftrightarrow F(1) - F(0) = F(1) - F(2) \Leftrightarrow F(0) = F(2)$$

$$S_{\text{DCIB}} > S_{\text{DIDA}} \Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx > \int_1^2 f(x) dx$$

Mặt khác ta có

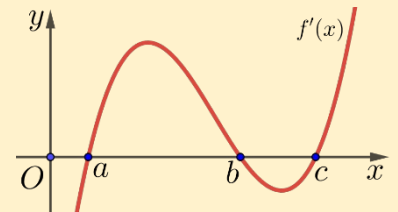
$$\Leftrightarrow F(1) - F(-2) > F(1) - F(2) \Leftrightarrow F(-2) < F(2) \Leftrightarrow F(2) - F(-2) > 0$$

Vậy $F(2) - F(-2)$ là số dương.



Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hãy so sánh các số $f(a); f(b); f(c)$



Lời giải

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$	$f(a)$		$f(b)$	$f(c)$		$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(b) > f(c)$, $f(a) < f(b)$ nên loại phương án **B**, **C**

$$\int_a^b |f'(x)| dx > \int_b^c |f'(x)| dx$$

Mặt khác

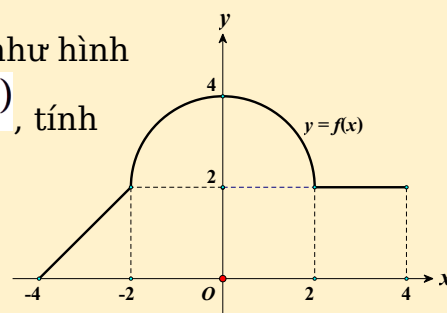
$$\Rightarrow f(x) \Big|_a^b > - f(x) \Big|_b^c \Leftrightarrow f(b) - f(a) > - f(c) + f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$$

Vậy $f(a) < f(c) < f(b)$.



Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4; 4]$ như hình vẽ. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tính giá trị của $S = F(4) - F(-4)$



Lời giải

$$S = F(4) - F(-4) = \int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$$

$$\int_{-4}^{-2} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2; \quad \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 8 + 2\pi; \quad \int_2^4 f(x) dx = 2 \cdot 2 = 4$$

Vậy $S = 14 + 2\pi$.



Chương

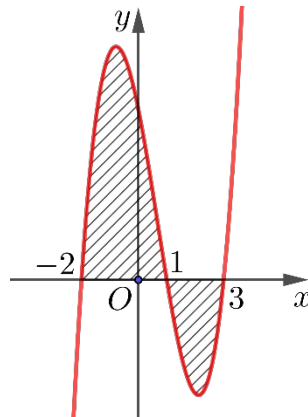
Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



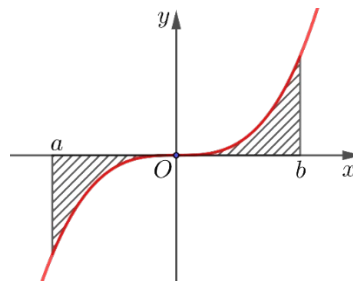
A. $S = - \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = - \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

» Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?

A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$

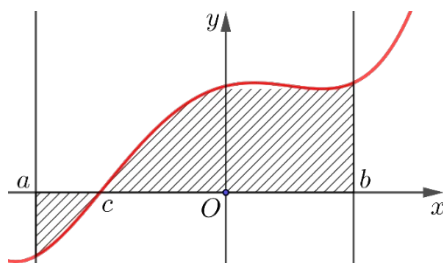
B. $S_D = - \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$



C. $S_D = \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$

D. $S_D = - \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$

» Câu 3. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ ($a < b$) tính theo công thức nào dưới đây ?



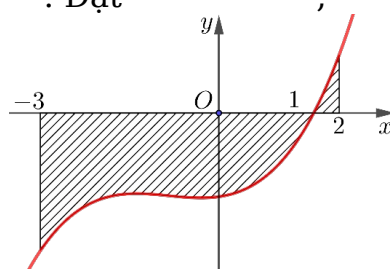
A. $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

B. $S = \int_a^b f(x)dx$

C. $S = - \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

D. $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

» Câu 4. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3, x=2$. Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x)dx$, $b = \int_1^2 f(x)dx$.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng**.

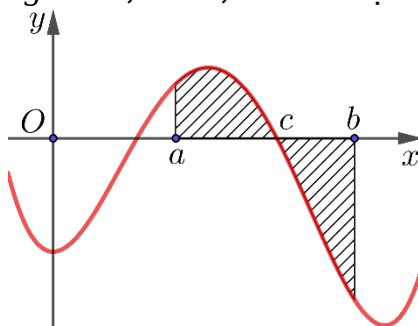
A. $S = a + b$

B. $S = a - b$

C. $S = -a - b$

D. $S = b - a$

» Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ có đồ thị như hình bên và $c \in [a; b]$. Gọi S là diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường thẳng $y=0, x=a, x=b$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

B. $S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$



C. $S = \int_a^b |f(x)| dx$

D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

» Câu 6. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=8$ là

A. $\frac{45}{2}$

B. $\frac{45}{4}$

C. $\frac{45}{7}$

D. $\frac{45}{8}$

» Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{7}{3}$

» Câu 8. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1, x = -1, x = 2$ và trục hoành.

A. $S = 16$

B. $S = 6$

C. $S = \frac{13}{6}$

D. $S = 13$

» Câu 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x, y = 1, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $S = \int_0^2 |2^x - 1| dx$

B. $S = \int_0^2 |1 - 2^x| dx$

C. $S = \int_0^2 (1 - 2^x) dx$

D. $S = \int_0^2 (2^x - 1) dx$

» Câu 10. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 4 + 2x - x^2, y = x^2, x = -1, x = 2$ có diện tích là

A. 9 đvdt.

B. 12 đvdt.

C. 15 đvdt.

D. 6 đvdt.

» Câu 11. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 3$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng

A. $V = 12\pi$

B. $V = \frac{348\pi}{5}$

C. $V = 32\pi$

D. $V = 9\pi$

» Câu 12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

A. 1 .

B. 3 .

C. 2 .

D. 4 .

» Câu 13. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1, x = 2$ là

A. $S = 8$

B. $S = \frac{7}{3}$

C. $S = \frac{8}{3}$

D. $S = 7$

» Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) < 0 < f(-1)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 1$. Xét các mệnh đề sau

(1) $S = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 |f(x)| dx$

(2) $S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$



$$(3) \quad S = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Số mệnh đề đúng là

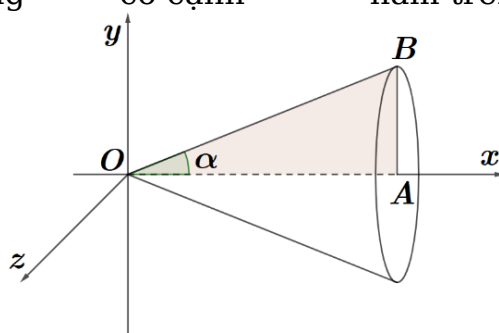
- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

$$(4) \quad S = \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right|$$

» Câu 15. Khối chỏm cầu có bán kính $R=3$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{9-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$, $x=3$ xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối chỏm cầu này.

- A. $\frac{8p}{3}$. B. $2p$. C. $\frac{10p}{3}$. D. p .

» Câu 16. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên trục Ox và $\angle AOB = \frac{p}{3}$.



Gọi b là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox .

- A. $3pa^3$. B. pa^3 . C. $\frac{pa^3}{3}$. D. $\frac{pa^3}{9}$.

» Câu 17. Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích hình vuông cạnh bằng 1 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S_1=S_2$. B. $S_1>S_2$. C. $2S_1=S_2$. D. $6S_1=S_2$.

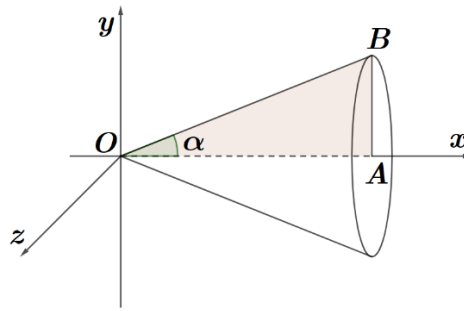
» Câu 18. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-2$, $y=2x+4$, $x=1$ và $x=4$. Cho diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{a}{b}$ (đvdt), với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T=a+b$ bằng:

- A. $T=67$. B. $T=25$. C. $T=76$. D. $T=23$.

» Câu 19. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên trục Ox và

$$\angle AOB = a \left(0 < a \leq \frac{p}{4} \right)$$

Gọi b là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox . Tính thể tích V của b theo a và a .



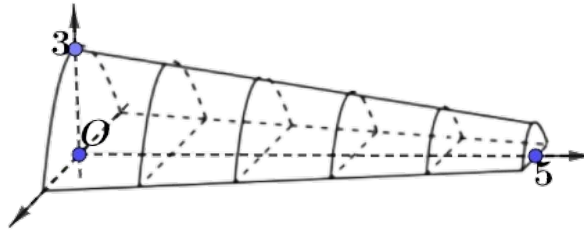
A. $\frac{p \tan^2 a \cdot a^3}{3}$

B. $\frac{3p \tan^2 a \cdot a^3}{2}$

C. $\frac{p \sin^2 a \cdot a^3}{3}$

D. $\frac{2p \cos^2 a \cdot a^3}{3}$

» Câu 20. Cho một mô hình $3D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên.



Chiều dài của đường hầm mô hình là 5cm , mặt phẳng vuông góc với mặt đáy của đường hầm tạo được thiết diện là một hình parabol, thiết diện có độ dài cạnh đáy gấp đôi chiều cao. Tính thể tích không gian bên trong đường hầm mô

hình, biết chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (đơn vị là cm), với x là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

A. 29.

B. 30.

C. 28.

D. 31.

» Câu 21. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x^2$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị “sự bất bình đẳng về thu nhập” của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = (0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666)^2, 0 \leq x \leq 100$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2009 có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

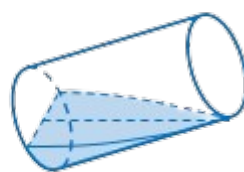
A. 7922,9.

B. 2922,9.

C. 2085,5.

D. 2077,1.

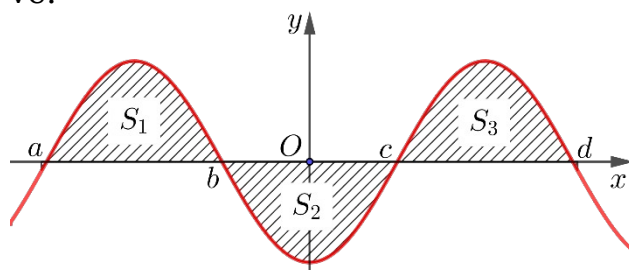
» Câu 22. Cho một cái cốc thủy tinh hình trụ bán kính đáy là 6cm , chiều cao là 10cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy?



A. 240 cm^3 . **B.** 250 cm^3 . **C.** 245 cm^3 . **D.** 249 cm^3 .

B. Câu hỏi - Trả lời Đúng/sai

» **Câu 23.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a, b, c, d , đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=a, x=d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của 4 mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	$S_1 = \int_a^b f(x) dx$		
(b)	$S_2 = - \int_c^b f(x) dx$		
(c)	$S_3 = - \int_c^d f(x) dx$		
(d)	$S_{(H)} = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$		

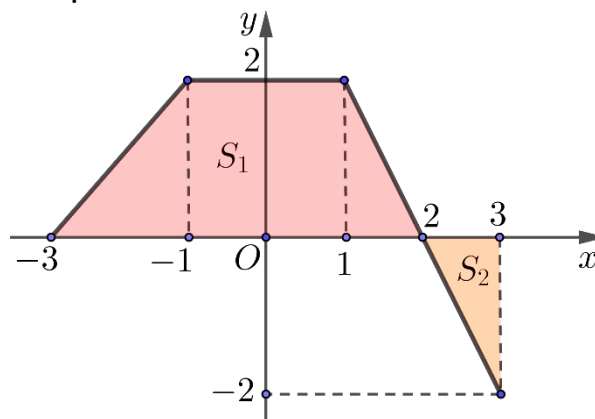
» **Câu 24.** Cho hai hàm số $f(x) = -x^2 + 4$ và $g(x) = x - 1$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Diện tích hình phẳng (H_1) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x = -3, x = 3$ là $S_{(H_1)} = \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{46}{3}$		
(b)	Diện tích hình phẳng (H_2) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x = -2, x = 2$ là $S_{(H_2)} = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{32}{3}$		



(c)	Diện tích hình phẳng (H_3) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x = -3, x = 3$ là $S_{(H_3)} = \left \int_{-3}^1 g(x) dx + \int_1^3 g(x) dx \right = 6$		
(d)	Diện tích hình phẳng (H_4) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x = -3, x = 3$ là $S_{(H_4)} = - \int_{-3}^1 g(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 10$		

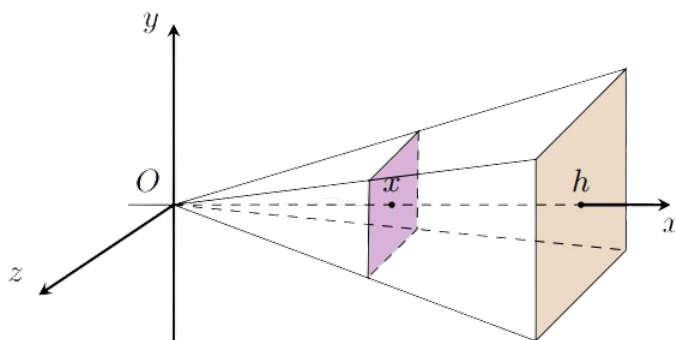
» Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x = -3, x = 3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2 .



Xét tính đúng, sai của 4 mệnh đề sau:

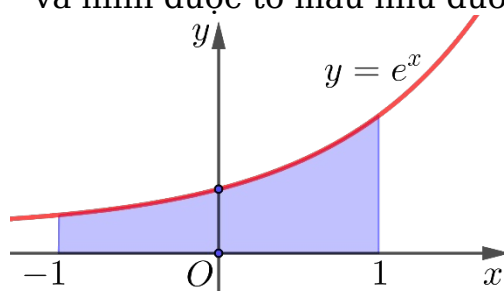
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$S_{(H)} = \int_{-3}^3 f(x) dx$		
(b)	$S_2 = \left \int_2^3 (-2x + 4) dx \right = 1$		
(c)	$S_1 = \int_{-3}^{-1} (x+3) dx + \int_{-1}^1 2 dx + \int_1^2 (-2x+4) dx$		
(d)	$S_{(H)} = S_1 - \int_2^3 (-2x+4) dx$		

» Câu 26. Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h . Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. (như hình dưới).



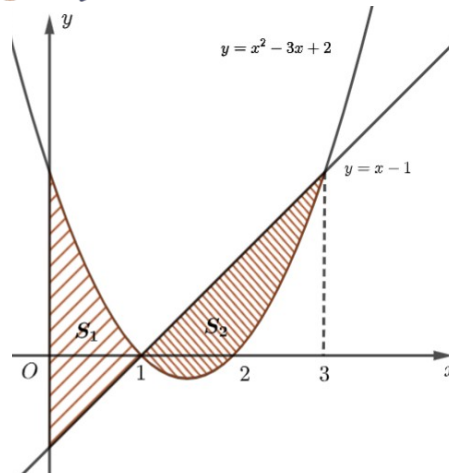
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox .		
(b)	Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x ($0 \leq x \leq h$), cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a .		
(c)	Diện tích mặt cắt là $S(x) = \frac{L}{h} x^2$.		
(d)	Thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3} L^2 h$.		

» Câu 27. Cho đồ thị hàm số $y = e^x$ và hình được tô màu như dưới.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình phẳng được tô màu giới hạn bởi 3 đường		
(b)	Diện tích hình phẳng được tính bởi công thức $S = \int_{-1}^1 (e^x)^2 dx$		
(c)	Diện tích hình phẳng $S = e - \frac{1}{e}$		
(d)	Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox là $V = \frac{1}{2} \rho \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$		

» Câu 28. Cho đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và $y = x - 1$ và $S_1; S_2$ là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a))	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và $y = x - 1$ là $\int_0^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$		
(b))	$S_1 = \frac{4}{3}$		
(c))	$S_1 = S_2$		
(d))	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$; $y = x - 1$; $x = 0$; $x = 3$ là $\int_0^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = 1$.		

» Câu 29. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -\sin x$, $y = 1$, $x = a$ ($0 \leq a \leq p$), $x = p$.

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a))	Nếu $a = p$ thì diện tích của (H) bằng 0.		
(b))	Nếu $a = 0$ thì diện tích của (H) bằng $p + 2$.		
(c))	Nếu diện tích của hình (H) là $S = p - a + \frac{3}{2}$ thì $\frac{p}{a}$ là số nguyên chia hết cho 9.		
(d))	Nếu diện tích của hình (H) là S' thì $\int_a^p \sin x dx = S' - p - a$.		

» Câu 30. Trong mặt phẳng Oxy , cho hàm số $y = x + \sqrt{x}$ và $y = x + x^2$.

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a))	Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x = 0$ hoặc $x = -1$		
(b))	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và		



	$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$ $x=0, x=1$ được tính theo công thức		
(c)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0, x=1$ được tính theo công thức $S = \int_0^1 (x + x^2) dx - \int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx$		
(d)	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0, x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ đvdt		

» Câu 31. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là: $S_{(H)} = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.		
(b)	Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{26}{3}$.		
(c)	Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là: $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.		
(d)	Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\frac{202}{5}$.		

» Câu 32. Khối chỏm cầu có bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4, x=5$ xung quanh trục Ox .

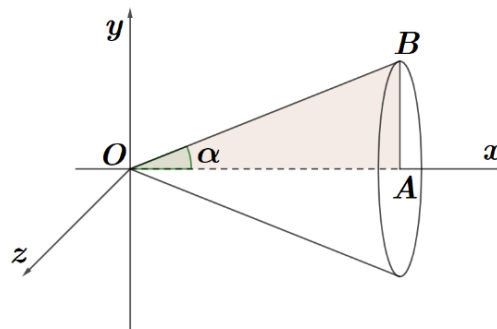
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.		
(b)	Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1 = p \int_4^5 (25 - x^2) dx$.		
(c)	Thể tích của khối chỏm cầu $V_1 = \frac{14p}{3}$.		
(d)	Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỷ số thể tích $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{125}$.		



» **Câu 33.** Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên trục Ox và

$$\angle AOB = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

Gọi b là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox .



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $a = \frac{p}{4}$ thì thể tích V của khối b là $\frac{pa^3}{3}$ (đvtt).		
(b)	Khi $a = \frac{p}{6}$ thì thể tích V của khối b là $\frac{pa^3}{9}$ (đvtt).		
(c)	Khi thể tích V của khối b là $\frac{4pa^3}{3}$ thì giá trị $\cos \alpha < \frac{1}{2}$.		
(d)	Khi $\tan \alpha = \cot \alpha$ thì thể tích V của khối b là $\frac{pa^3}{3}$.		

» **Câu 34.** Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x^2$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị “sự bất bình đẳng về thu nhập” của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2, 0 \leq x \leq 100$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất (Theo R.Larson, *Brief Calculus: An Applied Approach*, 8th edition, Cengage Learning, 2009)

Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau:

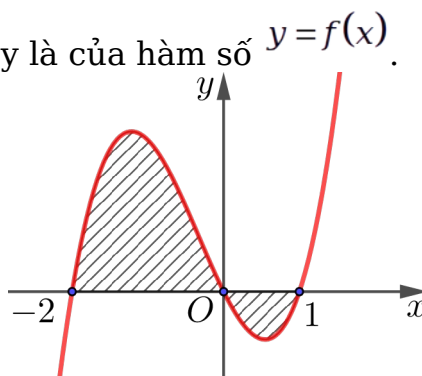
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.		
(b)	Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng		



	8,56% tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.		
(c)	Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 được xác định bởi công thức: $\int_0^{100} [x - (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2] dx$		
(d)	Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.		

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» Câu 35. Đồ thị trong hình dưới đây là của hàm số $y = f(x)$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x) dx = 3$; $\int_0^1 f(x) dx = -1$

. Tính diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình.

👉 Điền đáp số:

» Câu 36. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$.

👉 Điền đáp số:

» Câu 37. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 3x + x^2$, $y = 0$; $x = 0$; $x = 3$ quanh trục Ox bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)?

👉 Điền đáp số:

» Câu 38. Khối chỏm cầu có bán kính $R = 3$ và chiều cao $h = \frac{3}{2}$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{3}{2}$, $x = 3$ xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối chỏm cầu này (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

👉 Điền đáp số:

» Câu 39. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 8 - x^2$, $y = 3x^2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)

👉 Điền đáp số:



» **Câu 40.** Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sqrt{2x}$, $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $x = 2$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)

👉 **Điền đáp số:**

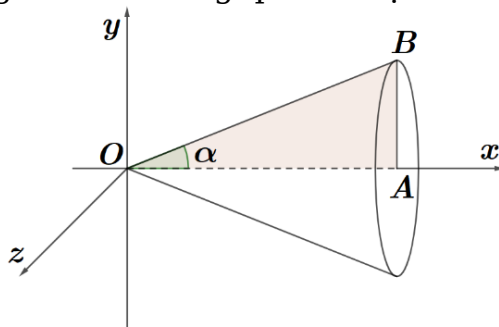
» **Câu 41.** Gọi (H) là phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 3x^2$, $y = 4 - x$ và trục hoành. Diện tích của (H) là bằng bao nhiêu?

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 42.** Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu.

👉 **Điền đáp số:**

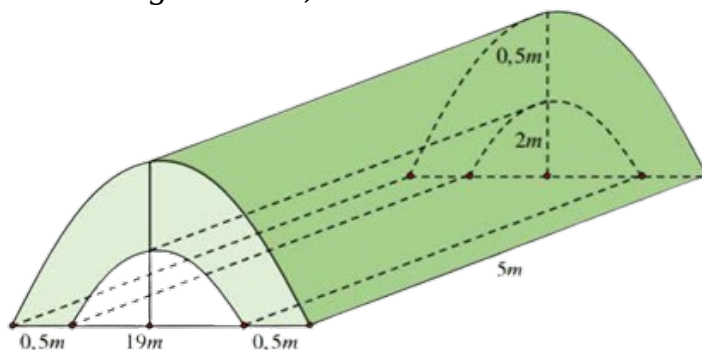
» **Câu 43.** Cho tam giác vuông OAB có cạnh OA nằm trên trục Ox và $B(a; b)$ với a, b là các số thực thỏa $a^2 + b^2 = 1$. Gọi b là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox .



Tính giá trị $\tan \alpha$ khi thể tích của khối b đạt giá trị lớn nhất. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 44.** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đỡ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol)



👉 **Điền đáp số:**



» **Câu 45.** Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2x + 2$; $y = 6 - x$; $y = 2$ và (D) nằm ngoài Parabol $y = x^2 + 2x + 2$. Khi cho (D) quay quanh trục Ox , ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích $V = \frac{ap}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $P = a - 2b^2$ bằng bao nhiêu.

👉 **Điền đáp số:**

----- **Hết** -----

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>