

Tên đề tài:

HƯỚNG DẪN HỌC SINH CÁCH HỆ THỐNG, CHỦ ĐỘNG TRONG VIỆC GIẢI CÁC BÀI TOÁN TAM GIÁC LƯỢNG

1.MỞ ĐẦU

1.1.Lí do chọn đề tài:

Trong công tác giảng dạy bộ môn toán ở trường THPT và thực tế trong hoạt động dạy và học của học sinh trong nhà trường, quá trình tìm tòi đúc kết chọn ra các bài toán “gốc” , từ đó phát triển lên hệ thống bài tập theo hướng bài toán “gốc” .Qua đó giúp người dạy định hướng được phương pháp giải cụ thể lô gic, người học dễ tiếp thu và có cơ hội sáng tạo của bản thân xây dựng bổ sung lớp các bài toán trên cơ sở bài toán gốc, đó cũng là đổi mới phương pháp dạy và học trong trường THPT.

Trong quá trình học lượng giác , phần tam giác lượng học sinh thường gặp khó khăn trong việc hệ thống kiến thức và chủ động giải các bài toán tam giác lượng

Với nội dung đề tài này, tôi đề cập đến vấn đề : Hướng dẫn học sinh chọn một số bài toán làm “gốc” để sử dụng chúng để “khai triển “ nên hệ thống các bài tập, trên cơ sở là các ước lượng đối xứng trong tam giác.

Vì vậy tôi chọn đề tài “ **Hướng dẫn học sinh hệ thống & chủ động trong việc giải các bài toán tam giác lượng**”

1.2.Mục đích nghiên cứu:

+ Trao đổi với đồng nghiệp trên cơ sở vận dụng ước lượng đối xứng trong tam giác lượng, chọn được các bài toán “gốc” ,hệ thống thành các dạng bài tập giảng dạy cho học sinh.

+ Hướng dẫn học sinh giải được các bài tập dựa trên cơ sở suy luận từ bài toán “gốc”, và tư duy từ bài toán “gốc” chủ động phát triển thành chuỗi các bài tập cùng dạng, cùng cơ sở lí luận, tự tin trong học bộ môn toán.

1.3. Đối tượng nghiên cứu:

- Hệ thức lượng trong tam giác.
- Nội dung phần hệ thức lượng trong tam giác trong chương trình SGK.
- Một số bài toán liên quan trong các đề thi Đại học - Cao đẳng - TCCN.

1.4. Phương pháp nghiên cứu:

Phương pháp:

- Nghiên cứu lý luận chung.
- Khảo sát điều tra từ thực tế dạy và học .
- Tổng hợp so sánh , đúc rút kinh nghiệm.

Cách thực hiện:

- Trao đổi với đồng nghiệp, tham khảo ý kiến giáo viên cùng bộ môn.
- Liên hệ thực tế trong nhà trường, áp dụng đúc rút kinh nghiệm qua quá trình giảng dạy.
- Thông qua việc giảng dạy trực tiếp ở các lớp khối 10 trong năm học.
- Thời gian nghiên cứu: Năm học 2016 – 2017.

2.NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1.Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm:

Trên cơ sở sử dụng các ước lượng đối xứng cơ bản, kết hợp với các bất đẳng thức cổ điển: Cô Si, Bunhiacôpxki,.....và một số bài toán “gốc” mà “khai triển” nên hệ thống các bài tập, từ đó giúp học sinh định hướng được phương pháp giải toán.

Những kiến thức liên quan:

2.1.1. Các bài toán trong tam giác:

Là các bài toán nghiên cứu các mối quan hệ giữa các yếu tố của tam giác với nhau.

Các mối quan hệ có thể là :Một đẳng thức, một bất đẳng thức hay một dấu hiệu nhận dạng tam giác

Các yếu tố trong tam giác :

- + Góc : A, B, C .
- + Cạnh : a, b, c .
- + Đường cao: h_a, h_b, h_c .
- + Đường trung tuyến: m_a, m_b, m_c .
- + Đường phân giác : l_a, l_b, l_c .
- + Chu vi: $C = 2p$
- + Diện tích : S
- + Bán kính đường tròn ngoại tiếp: R
- + Bán kính đường tròn nội tiếp: r, r_a, r_b, r_c .

2.1.2. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác:

- + $a, b, c > 0 : \left| \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right| \leq \frac{c}{a}$
- + $0 < A, B, C < \pi; A + B + C = \pi$
- + $a = 2 \sin A \cdot R$
- + $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
- + $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$
- + $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$
- + $S =$

$$\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = pr = (p - a)r_a = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

(Bảng công thức tính diện tích là “cầu nối” thiết lập mối quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác với nhau.)

2.1.3. Các hệ thức cơ bản:

- 1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- 2) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin 2A \cdot \sin 2B \cdot \sin 2C$
- 3) $\sin(nA) + \sin(nB) + \sin(nC) = (-1)^{n+1} 4 \sin(nA) \cdot \sin(nB) \cdot \sin(nC)$
- 4) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- 5) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$
- 6) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
- 7) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$
- 8) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

2.1.4. Bất đẳng thức

-Bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{với } a, b \geq 0$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad \text{với } a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

-Bất đẳng thức Bunhiaôpxki:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm:

Học sinh trong nhà trường phần lớn là học sinh có học lực trung bình, tỉ lệ học sinh có học lực khá giỏi là không nhiều. Nhiệm vụ của tổ nhóm chuyên môn phải tổ chức đánh giá xếp loại năng lực học sinh, nhóm chuyên môn phải xây dựng kế hoạch bồi dưỡng phụ đạo theo nhóm học sinh có học lực khác nhau.

Trong các buổi thảo luận về chuyên môn xây dựng phương pháp dạy học cho nhóm đối tượng học sinh khá giỏi, đã có nhiều ý kiến trao đổi giảng dạy cho học sinh phần kiến thức tam giác lượng, đây là nội dung khó đối với học sinh trong nhà trường và cũng không đơn giản đối với giáo viên.

Năm học : 2015- 2016 tôi thử nghiệm trên nhóm đối tượng học sinh có học lực khá giỏi.

Năm học : 2016- 2017 tôi thử nghiệm trên nhóm đối tượng học sinh có học lực khá giỏi.

Kết quả kiểm tra 2 nhóm học sinh nói trên về phần tam giác lượng khi chưa triển khai đề tài

Năm học	Số sĩ	Giỏi		Khá		Trung bình	
		SL	TL%	SL	TL%	SL	TL%
2015-2016	20	1	5,0%	5	25,0%	14	70,0%
2016-2017	25	2	8,0%	9	36,0%	14	56,0%

2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề:

Bài toán gốc 1:

Cho tam giác ABC với $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$. Tìm MaxT ? [3]

Giải : Ta có $T = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \cos^2 C - \cos(A-B)\cos(A+B)$
 $= 2 + \frac{1}{4}\cos^2(A-B) - \left[\cos C - \frac{1}{2}\cos(A-B) \right]^2 \leq 2 + 4\cos^2(A-B) \leq 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Vậy $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$,

dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(A-B)=1 \\ \cos C = \frac{1}{2}\cos(A-B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$

Kết luận: $\text{Max} T = \frac{9}{4}$ Khi ΔABC đều.

Từ kết quả bài toán này ta có thể sử dụng cho một loạt các bài toán phần các ước lượng đối xứng:

Bài 1: Cho tam giác ABC với $T = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ Tìm MaxT ?

(Hoặc CMR: $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$)

CMR: $\Delta ABC \Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

CMR: Trong các tam giác cùng nội tiếp một đường tròn bán kính R thì tam giác đều có diện tích lớn nhất – Vì : $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$) [2]

Nhận xét:

$0 < A, B, C < \pi$ suy ra : $\sin A, \sin B, \sin C > 0$

Xét $T^2 = \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C \leq \left(\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{3} \right)^3$; (Theo bất đẳng thức Cô si)

$T^2 \leq \left(\frac{9/4}{3} \right)^3$

Vậy $T \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ Dấu “=” xảy ra $\begin{cases} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 9/4 \\ \sin^2 A = \sin^2 B = \sin^2 C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Kết luận: $\text{Max} T = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài 2: Cho tam giác ABC với $T = \sin A + \sin B + \sin C$. Tìm MaxT ?

(Hoặc: + CMR: $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$)

$$+CMR: \Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

+CMR: Trong các tam giác vuông cùng nội tiếp một đường tròn bán kính R thì tam giác đều có chu vi lớn nhất. Vì $2p = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ [3]
 Nhận xét:

$$0 < A, B, C < \pi \text{ suy ra: } \sin A, \sin B, \sin C > 0$$

$$\text{Xét } (\sin A + \sin B + \sin C)^2 \leq 3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \quad (\text{BĐT Bunhiacôpxki})$$

$$\leq 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

$$\text{Vậy } T \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{Dấu “=” xảy ra } \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 9/4 \\ \sin A = \sin B = \sin C = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

$$\text{Max } T = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

$$\text{Bài 3: Cho tam giác ABC với } T = \frac{1}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \quad \text{Tìm Min } T ?$$

$$\text{Bài 4: Cho tam giác ABC với } T = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \quad \text{Tìm Min } T ?$$

$$\text{Bài 5: Cho tam giác ABC với } T = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \quad \text{Tìm Min } T ?$$

$$\text{Bài 6: Cho tam giác ABC với } T = \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \quad \text{Tìm Min } T ?$$

$$\text{Bài 7: Cho tam giác ABC với } T = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \quad \text{Tìm Min } T ?$$

$$\text{Bài 8: Cho tam giác ABC với } T = (1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C) \quad \text{Tìm Max } T ?$$

$$\text{Bài 9: Cho tam giác ABC với } T = (1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) \quad \text{Tìm Max } T ?$$

$$\text{Bài 10: Cho tam giác ABC, } T = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C. \quad \text{Tìm Max } T ?$$

$$\text{Bài 11: Cho tam giác ABC}$$

$$CMR: \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

$$\text{Hay CMR: } a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} \quad (\forall \Delta ABC)$$

$$ab + bc + ca \geq 4S\sqrt{3} \quad (\forall \Delta ABC) \quad [6]$$

HD : Bài 7:

$$T = 1 + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} + \frac{1}{\sin A \cdot \sin B} + \frac{1}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{1}{\sin C \cdot \sin A} + \frac{1}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \geq$$

$$1 + 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C}} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^3 A \cdot \sin^3 B \cdot \sin^3 C}} =$$

$$\left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}}\right)^3 \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \text{Vậy } T \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Như vậy : áp dụng kết quả bài toán “gốc “ bài toán gốc 1 ta giải được hệ thống các bài toán trên và các “ biến dạng” của chúng (phát biểu dưới ngôn ngữ khác hoặc thay thế góc thành cạnh nhờ định lý hàm số Sin)

Đáp số:

Bài 3: $\text{Min}T = \frac{8}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài 4: $\text{Min}T = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài 5: $\text{Min}T = 4 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài 6: $\text{Min}T = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài 7: $\text{Min}T = 1 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài 8: $\text{Max}T = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài 9: $\text{Max}T = 27/16 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài 10: $\text{Max}T = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Bài toán gốc 2:

Cho tam giác ABC với $T = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$, Tìm $\text{Max}T$? [5]

Giải :

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \cos C = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos^2(A - B)}{4} - \left(\cos C - \frac{1}{2} \cos(A - B)\right)^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2(A - B)}{4} \leq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Vậy: $T = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$,

dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(A - B) = 1 \\ \cos C - \frac{1}{2} \cos(A - B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$

Từ kết quả bài toán này ta ta có thể giải được hệ thống các bài tập sau:

Bài toán: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

1) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ [1]

2) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$ [2]

3) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 6 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

4) $(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \leq \frac{1}{8}$

5) $\left(1 + \frac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos B}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos C}\right) \geq 27$, với ΔABC nhọn.

6) $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq 6$, với ΔABC nhọn.

7) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{4}$

- 8) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$
- 9) $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq 12$
- 10) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq 6 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ [4]
- 11) $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ [4]
- 12) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$ [4]
- 13) $\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6$
- 14) $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- 15) $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
- 16) $\frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}$
- 17) $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$
- 18) $\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \geq 4$
- 19) $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \geq 4\sqrt{3} \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$

Bài toán gốc 3: Cho A,B,C là 3 góc tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$ [6]

(Loại chứng minh một số ước lượng đối xứng trong tam giác trên cơ sở cách làm bài toán “gốc”. (Có thể sử dụng tính chất của hàm số lồi)).

Giải: $\frac{\sin A + \sin B}{2} = \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq \cos \frac{C}{2}$

(Do $\cos \frac{A-B}{2} \leq 1; \cos \frac{C}{2} > 0$)

Suy ra: $\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \cos \frac{C}{2}$

Tương tự: $\frac{\sin B + \sin C}{2} \leq \cos \frac{A}{2}$
 $\frac{\sin C + \sin A}{2} \leq \cos \frac{B}{2}$

Vậy: $\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$.

Từ đó bằng cách làm tương tự ta có hệ thống các bài tập sau:

Bài toán: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

- 1) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$
- 2) $\cos A + \cos B + \cos C \leq 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ [5]
- 3) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$
- 4) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \cos A + \cos B + \cos C \geq 0$; $\forall \Delta ABC$ nhọn.
- 5) $\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$; $\forall \Delta ABC$ nhọn.
- 6) $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq \sqrt{\cos \frac{A}{2}} + \sqrt{\cos \frac{B}{2}} + \sqrt{\cos \frac{C}{2}}$ [2]
- 7) $\sin A \cdot \sin B \leq \cos^2 \frac{A}{2}$; $\forall \Delta ABC$.

Mở rộng:

- *) $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.
- *) $\cos A \cdot \cos B \leq \sin^2 \frac{C}{2}$.
- *) $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
- *) $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \leq \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$
- 8) $\cos A + \cos B + \cos C = 2(\cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos C \cdot \cos A)$. [5]
- 9) $\cos A + \cos B + \cos C = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều
- 10) $\frac{\tan A + \tan B}{2} \geq \tan \frac{A+B}{2}$
- 11) $\forall \Delta ABC$ nhọn có: $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} = \sqrt{\cot \frac{A}{2}} + \sqrt{\cot \frac{B}{2}} + \sqrt{\cot \frac{C}{2}}$ thì ΔABC đều

Hướng dẫn giải 10) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\tan A + \tan B}{2} &= \frac{\sin(A+B)}{2 \cdot \cos A \cdot \cos B} = \frac{\sin C}{\cos(A-B) + \cos(A+B)} \geq \frac{\sin C}{1 + \cos(A+B)} \\ &= \frac{\sin C}{1 - \cos C} = \frac{\sin C}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \tan \frac{A+B}{2} \Rightarrow (ĐPCM) \end{aligned}$$

(Có thể biến đổi tương đương hoặc sử dụng tính chất hàm số lẻ)

Hướng dẫn giải 11)

Ta có: $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} \geq 2\sqrt[4]{\tan A \cdot \tan B}$.

Mặt khác: $\tan A \cdot \tan B \geq \tan^2 \frac{A+B}{2}$ (*)

Vì (*)

$$\Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \cos^2 \frac{A+B}{2} \geq \cos A \cdot \cos B \cdot \sin^2 \frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \left[\frac{1 + \cos(A-B)}{2} \right] \geq \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \left[\frac{1 - \cos(A-B)}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(A-B) \cdot \cos(A+B) - 2 \cos(A+B) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos(A-B) \cdot \cos C + 2 \cos C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos C [1 - \cos(A-B)] \geq 0 (**)$$

(ΔABC nhọn, (**)) hiển nhiên đúng)

$$\text{Suy ra: } \sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} \geq 2\sqrt{\tan A \cdot \tan B} \geq 2\sqrt{\tan^2 \frac{A+B}{2}} = 2\sqrt{\tan \frac{A+B}{2}} = 2\sqrt{\cot \frac{C}{2}};$$

$\forall \Delta ABC$ nhọn.

$$\text{Vậy } \sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} = \sqrt{\cot \frac{A}{2}} + \sqrt{\cot \frac{B}{2}} + \sqrt{\cot \frac{C}{2}} \Rightarrow (\text{ĐPCM})$$

Bài toán gốc 4:

Sử dụng đẳng thức: $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$, và 1 số bất đẳng thức cơ bản, bất đẳng thức cổ điển: Cô si; Bunhiacôpxki,...thiết lập nên các ước lượng đối xứng trong tam giác.

Bài toán: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$1) \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$$

$$\text{Giải: Ta có: } \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \leq \frac{\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2}}{2} \quad (\text{Theo Cô si})$$

$$\text{Tương tự: } \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \leq \frac{\tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2}}{2}$$

$$\tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} \leq \frac{\tan^2 \frac{C}{2} + \tan^2 \frac{A}{2}}{2}$$

$$\text{Vậy: } \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1 \quad \Rightarrow (\text{ĐPCM})$$

$$2) \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 &= \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + 2 \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \right. \\ &\quad \left. + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \right) \geq 1 + 2 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Vậy: $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \Rightarrow (\text{ĐPCM})$

3) $\tan^4 \frac{A}{2} + \tan^4 \frac{B}{2} + \tan^4 \frac{C}{2} \geq \frac{1}{3}$

Giải:

Theo Bunhiacôpxiki

$$3 \left(\tan^4 \frac{A}{2} + \tan^4 \frac{B}{2} + \tan^4 \frac{C}{2} \right) \geq \left(\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \right)^2 \geq 1$$

Vậy: $\tan^4 \frac{A}{2} + \tan^4 \frac{B}{2} + \tan^4 \frac{C}{2} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow (\text{ĐPCM})$

4) $\tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + \tan^6 \frac{C}{2} \geq \frac{1}{9}$

Giải:

$$\tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + \tan^6 30^\circ + \tan^6 30^\circ + \tan^6 30^\circ + \tan^6 30^\circ \geq 6 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan^4 30^\circ \cdot \cdot \cdot \Leftrightarrow$$

$$\tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + 4 \tan^6 30^\circ \geq \frac{2}{3} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + 4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^6 \geq \frac{2}{3} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$$

Tương tự: $\tan^6 \frac{B}{2} + \tan^6 \frac{C}{2} + 4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^6 \geq \frac{2}{3} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$

$$\tan^6 \frac{C}{2} + \tan^6 \frac{A}{2} + 4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^6 \geq \frac{2}{3} \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}$$

$$\tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + \tan^6 \frac{C}{2} \geq \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow (\text{ĐPCM})$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ:

5) $\tan^3 \frac{A}{2} + \tan^3 \frac{B}{2} + \tan^3 \frac{C}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Cộng thêm vào vế trái $\tan^3 30^\circ$)

6) $\tan^5 \frac{A}{2} + \tan^5 \frac{B}{2} + \tan^5 \frac{C}{2} \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ (Cộng thêm vào vế trái $\tan^5 30^\circ$)

7) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

8) $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ (Hoặc $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq 3\sqrt{3}$)

9) $\cot A + \cot B + \cot C \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$; $\forall \Delta ABC$ nhọn. [1]

10) $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$

11) $\tan A \cdot \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A \geq 9$

Bài toán gốc5 :

Sử dụng các ước lượng đối xứng trong tam giác mà có thể dùng một số bài toán “gốc” và phương pháp đại số.

1)CMR: $\forall \Delta ABC$ không tù ta luôn có: $(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C) > 2$

$$2)\text{CMR: } \forall \Delta ABC \text{ ta có: } \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} > 2$$

$$3)\text{CMR: } \forall \Delta ABC \text{ ta có: } \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \sin \frac{A+3B}{4} \sin \frac{B+3C}{4} \sin \frac{C+3A}{4}$$

$$4)\text{CMR: } \forall \Delta ABC \text{ ta có: } \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)$$

$$5)\text{CMR: } \forall \Delta ABC \text{ nhọn ta có: } (\sin A)^{2 \sin B} + (\sin B)^{2 \sin C} + (\sin C)^{2 \sin A} > 2$$

$$6)\text{CMR: } \forall \Delta ABC \text{ ta có: } \frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}} < 2$$

$$7)\text{CMR: } \forall \Delta ABC \text{ ta có: } \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$$

$$8)\text{CMR: } \forall \Delta ABC \text{ ta có}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \leq \cos \frac{1}{3} \left(A - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \frac{1}{3} \left(B - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \frac{1}{3} \left(C - \frac{\pi}{3} \right)$$

Hướng dẫn giải :

$$1)\text{Ta có : } T = (1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C) = 1 + (\cos A + \cos B + \cos C) + (\cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos C \cdot \cos A) + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$T = 1 + (1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}) + (\cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos C \cdot \cos A) + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\text{Do } \forall \Delta ABC \text{ không tù nên: } \begin{cases} \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \geq 0 \\ \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} > 0 \\ \cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos C \cdot \cos A \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T > 2 \Rightarrow (\text{ĐPCM})$$

$$2)\text{Ta có: } \cos \frac{A}{2} > \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

$$T = \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}) > 2$$

$$\Rightarrow (\text{ĐPCM})$$

$$3) \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0; \pi). \text{ Vì hàm số } y = \sin x \text{ là hàm số lồi trên } (0; \pi), \text{ nên:}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} \leq \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 + \sin x_4}{4} \leq \sin \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \end{cases} \text{ và dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4.$$

$$\text{Vậy ta có : } \sin \frac{A+3B}{4} = \sin \frac{A+B+B+B}{4} \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin B + \sin B}{4} \geq \sqrt[4]{\sin A \cdot \sin^3 B}$$

$$\text{Tương tự: } \sin \frac{B+3C}{4} \geq \sqrt[4]{\sin B \cdot \sin^3 C}$$

$$\sin \frac{C+3A}{4} \geq \sqrt[4]{\sin C \cdot \sin^3 A}$$

$$\text{Vậy: } \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \sin \frac{A+3B}{4} \sin \frac{B+3C}{4} \sin \frac{C+3A}{4} \Rightarrow (\text{ĐPCM})$$

$$4)\text{Ta có: } \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x = \tan \frac{A}{2} \\ y = \tan \frac{B}{2} \\ z = \tan \frac{C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

Ta phải CM: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3(x+y+z) \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq 3xyz(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq xyz(x+y+z) (*)$$

Đặt: $\left\{ \begin{matrix} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ z \geq 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$

luôn đúng. Vậy ta có ĐPCM

5) $\forall \Delta ABC$ không tù $\left\{ \begin{matrix} 0 < \sin A \leq 1 \\ 0 < \sin B \leq 1 \\ 0 < \sin C \leq 1 \end{matrix} \right\}$ và $(\sin A)^{2\sin B} \geq \sin^2 A$; Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 90^\circ \\ A = B = 90^\circ \end{cases}$$

Tương tự: $(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C =$

$$2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^\circ; B = 90^\circ \\ B = 90^\circ; C = 90^\circ \\ C = 90^\circ; A = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ có 2 góc vuông} \Rightarrow \text{Vô lí}$

Vậy $(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} > 2$

6)

$$\frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}} < 2 \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} < 2 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{B+C}{2} + \sin \frac{C+A}{2} < 2 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \right) + \left(\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \right) + \left(\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \right)$$

$$< 2 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right). \text{Rõ thấy điều này đúng}$$

Vậy bài toán được CM.

7) $\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(A+B) + \sin(B+C) + \sin(C+A) < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow (\sin A \cos B + \sin B \cos A) + (\sin B \cos C + \sin C \cos B) + (\sin C \cos A + \sin A \cos C) < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) + \sin B(\cos A + \cos C) + \sin C(\cos A + \cos B) < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow (\sin A - 1)(\cos B + \cos C) + (\sin B - 1)(\cos A + \cos C) + (\sin C - 1)(\cos A + \cos B) < 0 \text{ đúng}$$

$$\text{vì } \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} > 0; \left(\text{vì } 0 < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2} \right)$$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường:

Qua quá trình giảng dạy triển khai đề tài đến nhóm học sinh độc lập trong 2 năm, tôi thấy học sinh đã tự tin hơn khi gặp các bài toán tam giác lượng nói trên

và đã giải quyết được cơ bản các bài toán đảm bảo yêu cầu của giáo viên. Từ đó khích lệ học sinh tích cực hơn, chủ động hơn trong việc tìm tòi phát triển hệ thống bài tập trên cơ sở bài toán “gốc”.

Kết quả khảo sát sau khi triển khai đề tài.

Năm học	Số số	Giỏi		Khá		Trung bình	
		SL	TL%	SL	TL%	SL	TL%
2015-2016	20	7	35%	11	55%	2	10%
2016-2017	25	9	36%	14	56,0%	2	8%

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận:

Từ một bài toán “gốc” có thể là những hệ thức lượng giác cơ bản hay một ước lượng đối xứng nào đó, cách phát triển riêng của mình giúp học sinh nhớ lâu, “nhảy bèn” và “hệ thống hóa”, “Sắp xếp” được các tam giác lượng. Điều này rất cần thiết và hữu ích đối với học sinh.

3.2. Kiến nghị:

Trong thời gian tới, tôi sẽ mở rộng nghiên cứu đề tài này. Rất mong được sự quan tâm của BGH nhà trường tạo điều kiện về thời gian cho phép tôi được thực nghiệm trên các nhóm học sinh trong nhà trường. Tuy nhiên đề tài trên không tránh khỏi những thiếu sót cần bổ sung. Tôi rất mong được sự đóng góp ý kiến của đồng nghiệp và học sinh cho bài viết này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Sách giáo khoa hình học 10 - Nhà xuất bản giáo dục

[2]. Sách hướng dẫn giảng dạy - Nhà xuất bản giáo dục

[3]. Tài liệu tập huấn sách giáo khoa - Nhà xuất bản Giáo dục

[4]. Các bài giảng luyện thi môn toán - Nhà xuất bản giáo dục

(TG: Phan Đức Chính - Vũ Dương Thụy - Đào Tam - Lê Thống Nhất)

[5]. Báo Toán học tuổi trẻ - Nhà xuất bản giáo dục

[6]. Các đề thi đại học các năm trước.

XÁC NHẬN CỦA ĐƠN VỊ

Triệu Sơn, ngày 25 tháng 5 năm 2017.
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép nội dung của người khác

Người viết

TRẦN CÔNG TUẤN