

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT NGUYỄN QUÁN NHO

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

TÊN ĐỀ TÀI

**ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG
TRÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ**

Người thực hiện: Nguyễn Thị Lan
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực (môn): Toán

THANH HOÁ NĂM 2016

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
MỤC LỤC	2
1. Mở đầu	3 - 4
Lí do chọn đề tài	3 - 4
Mục đích của sáng kiến kinh nghiệm	4
Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	4
Phương pháp nghiên cứu	4
2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm	5 - 19
2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm	5
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	5 - 6
2.3. Giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề	6 - 19
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.	19
3. Kết luận, kiến nghị	19 - 20
TÀI LIỆU THAM KHẢO	21

1. Mở đầu

a. Lí do chọn đề tài

1. Toán học là môn khoa học cơ bản của các môn học khác, đòi hỏi người học, người dạy phải đam mê, tâm huyết, tỉ mỉ và kiên nhẫn mới có thể nắm được. Nó là môn học khó, trừu tượng với thời lượng và nội dung chương trình sâu gây khó khăn cho người học và người dạy. Thực tế cho thấy nhiều học sinh đam mê, yêu thích môn toán nhưng kết quả thi HSG, thi đại học không cao so với các môn khác.

2. Bài toán tham số là các bài toán thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi, tuyển sinh đại học và cao đẳng. Đây là bài toán có nhiều phương pháp giải và học sinh thường lúng túng hay mắc sai lầm khi giải quyết. Khi giảm tải chương trình thì các dạng toán phải sử dụng định lí đảo của tam thức bậc hai không thể vận dụng được nên học sinh phải vận dụng chủ yếu định lý Viét và một số cách giải khác như hàm số hoặc “điều kiện cần - đủ” để giải quyết các bài toán chứa tham số dẫn đến cách giải phức tạp. Do đó học sinh rất khó rèn luyện tốt phần này. Bên cạnh đó, đạo hàm là một nội dung quan trọng của chương trình toán THPT. Nó vừa là đối tượng, nhưng hơn thế nó vừa là công cụ hữu hiệu để giải quyết nhiều vấn đề phức tạp của toán THPT. Trong đó có việc ứng dụng đạo hàm để giải các bài toán phương trình, phương trình chứa tham số.

3. Chúng ta biết rằng trong các đề thi đại học và đề thi HSG cấp tỉnh những năm gần đây bao giờ cũng có ít nhất một bài toán chứa tham số. Đó là những dạng toán khó đối với học sinh, có nhiều bài không thể giải được bằng phương pháp đại số thông thường, kinh điển hoặc có thể giải được nhưng gặp nhiều khó khăn, phức tạp. Với việc sử dụng đạo hàm để giải các bài toán về phương trình, phương trình chứa tham số sẽ được giải quyết một cách rất tự nhiên, ngắn gọn và dễ hiểu

Về vấn đề này, cũng đã có rất nhiều tài liệu, sáng kiến kinh nghiệm (SKKN). Tuy nhiên tài liệu viết chuyên sâu, hệ thống về những ứng dụng của đạo hàm để giải các bài toán phương trình, phương trình chứa tham số không nhiều và học sinh thường gặp khó khăn, lúng túng trong việc nhận diện, giải quyết dạng toán.

Do đó việc chọn lựa một đề tài SKKN nhằm góp phần giải quyết vấn đề trên là việc làm phù hợp với thực tiễn, thể hiện tình yêu nghề và

trách nhiệm của người cán bộ giáo viên. Chính vì vậy tôi chọn đề tài SKKN là:

“ Ứng dụng đạo hàm để giải một số phương trình và phương trình chứa tham số”

b. Mục đích của sáng kiến kinh nghiệm

- Các vấn đề được trình bày trong đề tài này có thể hỗ trợ cho các em học sinh trung học phổ thông có cái nhìn toàn diện hơn về việc sử dụng đạo hàm để giải một số phương trình, phương trình chứa tham số.
- Giúp học sinh nhận dạng được các phương trình, phương trình chứa tham số có thể sử dụng đạo hàm để giải.
- Bồi dưỡng cho học sinh về phương pháp, kỹ năng giải toán. Qua đó học sinh nâng cao khả năng tư duy, sáng tạo.
- Nâng cao khả năng tự học, tự bồi dưỡng và khả năng giải các bài toán trong kỳ thi tuyển sinh vào Đại học và ôn luyện HSG môn Toán

c. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Đề tài này nghiên cứu trên các dạng toán về phương trình và phương trình chứa tham số.

Phạm vi nghiên cứu: Đề tài thuộc chương trình đại số và giải tích của trung học phổ thông đặc biệt phương trình và phương trình chứa tham số.

d. Phương pháp nghiên cứu

Trình bày cho học sinh những kiến thức cơ bản về lý thuyết về đạo hàm của hàm số. Thông qua những ví dụ cụ thể với cách giải đơn giản, tự nhiên nhằm làm cho học sinh thấy được những thế mạnh của việc sử dụng phương pháp trên. Các ví dụ minh họa trong đề tài này được lọc từ các tài liệu tham khảo và các đề thi đại học các năm gần đây và sắp xếp từ dễ đến khó. Trong các tiết học trên lớp tôi ra cho học sinh giải các ví dụ này dưới nhiều phương pháp để từ đó đánh giá được tính ưu việt của phương pháp trên.

Để thực hiện mục đích và nhiệm vụ của đề tài, trong quá trình nghiên cứu tôi đã sử dụng các phương pháp sau:

- Nghiên cứu các loại tài liệu sư phạm, quản lí có liên quan đến đề tài.
- Phương pháp quan sát (công việc dạy - học của giáo viên và HS).
- Phương pháp điều tra (nghiên cứu chương trình, hồ sơ chuyên môn, ...).
- Phương pháp đàm thoại phỏng vấn (lấy ý kiến của giáo viên và HS thông qua trao đổi trực tiếp).

- Phương pháp thực nghiệm.

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm

a. Lí luận chung:

Chương trình giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động sáng tạo của học sinh, phù hợp với đặc trưng môn học, đặc điểm đối tượng học sinh, điều kiện của từng lớp học, bồi dưỡng học sinh phương pháp tự học, khả năng hợp tác, rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn, tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú và trách nhiệm học tập cho học sinh.

b. Kiến thức vận dụng:

+ Định nghĩa đạo hàm, các quy tắc tính đạo hàm, các công thức tính đạo hàm của các hàm số thường gặp, công thức tính đạo hàm của hàm hợp.

+ Để giải các phương trình có chứa tham số bằng phương pháp đạo hàm ta cần nắm vững các mệnh đề (MĐ) sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập D

MĐ1: Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

MĐ2: Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in D$

$$\Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq m \leq \max_{x \in D} f(x)$$

MĐ3: Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập D. Khi đó

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \text{ (với mọi } u, v \in D)$$

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Qua thực tiễn học tập và giảng dạy, bản thân nhận thấy ứng dụng của đạo hàm trong giải các bài toán cấp THPT là rất đa dạng, đặc biệt là trong giải các phương trình và phương trình chứa tham số. Nhưng học sinh thường không mạnh dạn, tự tin sử dụng công cụ rất mạnh này (hay nói cách khác là chưa có kỹ năng sử dụng) trong giải toán vì:

- Đạo hàm là phần kiến thức mới với học sinh, gắn liền với toán học hiện đại, học sinh bắt đầu được làm quen ở cuối chương trình lớp 11. Trong khi đó từ cấp THCS đến cấp THPT học sinh đã được tiếp xúc với rất nhiều bài toán về giải phương trình (có tham số và không có tham số) và đã quen sử dụng các phương pháp giải toán đại số kinh điển để giải.

- Tài liệu viết về ứng dụng của đạo hàm giải các bài toán phương trình, phương trình chứa tham số không nhiều, học sinh không nhận diện được các dạng toán và chưa được hướng dẫn một cách hệ thống phương pháp để giải quyết bài toán trọn vẹn.
- Số lượng các bài toán nêu trên xuất hiện ngày càng nhiều trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng, trong các kỳ thi HSG cấp tỉnh những năm gần đây và phương pháp sử dụng để giải chủ yếu là sử dụng đạo hàm.

2.3. Giải pháp và tổ chức thực hiện

Trong thực tiễn giảng dạy cho học sinh, tác giả đã giúp học sinh nhận dạng bài toán và phương pháp giải các dạng toán theo hệ thống bài tập được sắp xếp theo một trình tự logic.

Phương pháp giải

Dạng 1: Giải phương trình không chứa tham số

Từ các tính chất trên ta có 3 phương pháp biến đổi như sau:

Phương pháp 1: Biến đổi phương trình về dạng: $f(x) = k$, nhằm một nghiệm rồi chứng minh $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) để suy ra phương trình có nghiệm duy nhất.

Phương pháp 2: Biến đổi phương trình về dạng: $f(x) = g(x)$, nhằm một nghiệm rồi dùng lập luận khẳng định $f(x)$ đồng biến còn $g(x)$ nghịch biến hoặc hàm hằng suy ra phương trình có nghiệm duy nhất.

Phương pháp 3: Biến đổi phương trình về dạng: $f(u) = f(v)$ chứng minh f đơn điệu khi đó ta có: $u = v$.

Đối với bất phương trình thì biến đổi về dạng $f(u) < f(v)$ rồi chứng minh f đơn điệu để kết luận.

Dạng 2: Giải phương trình chứa tham số

Dạng toán thường gặp là tìm giá trị tham số m để phương trình có nghiệm (hoặc có nghiệm thỏa mãn điều kiện nào đó). Với dạng toán này ta có thể thực hiện theo các bước như sau:

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng: $f(x) = g(m)$

Bước 2: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)$

Bước 3: Tính $f'(x)$

Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

Bước 5: Xác định $\min_{x \in D} f(x)$ và $\max_{x \in D} f(x)$

Từ đó vận dụng một trong các mệnh đề đã nêu ở phần kiến thức bên trên rút ra kết luận cho bài toán.

Lưu ý: Trường hợp các phương trình chứa các biểu thức phức tạp, ta có thể xem xét đặt ẩn phụ để đơn giản chúng. Nếu được ta làm như sau:

- + Đặt $t = \varphi(x)$ ($\varphi(x)$ là một biểu thức trong phương trình)
- + Từ điều kiện ràng buộc của ẩn số $x \in D$, tìm điều kiện của ẩn số t , ví dụ $t \in K$ (chú ý là phải tìm được điều kiện chặt của t)
- + Đưa phương trình ẩn số x về phương trình ẩn số t ta được $f(t) = h(m)$
- + Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên tập K .
- + Từ bảng biến thiên rút ra kết luận bài toán.

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Giải phương trình không chứa tham số

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$ (1)

Nhận xét:

Quan sát về trái của phương trình (1), ta thấy khi x tăng thì giá trị của biểu thức trong căn cũng tăng. Từ đó suy ra về trái là hàm đồng biến, về phải bằng 1 là hàm hằng, đây là điều kiện thích hợp để sử dụng tính đơn điệu.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Đặt $f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1}$

Ta có: $f(\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ là 1 nghiệm của phương trình

Ta có $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Do đó hàm số $f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1}$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, nên phương trình $f(x) = 1$ nên nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 2 : Giải phương trình: $e^{tg^2 x} + \cos x = 2$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

(HSG Lớp 12 Nam Định 2006)

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(x) = e^{\tan^2 x} + \cos x$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có

$$f'(x) = 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} e^{\tan^2 x} - \sin x = \sin x \left(\frac{2e^{\tan^2 x} - \cos^3 x}{\cos^3 x} \right)$$

Vì $2e^{\tan^2 x} \geq 2 > \cos^3 x > 0$

Nên dấu của $f'(x)$ chính là dấu của $\sin x$. Từ đây ta có $f(x) \geq f(0) = 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

Ví dụ 3 : Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 5x - \sin 2x = 0$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \sin 2x$

Ta có: $f(0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là 1 nghiệm của phương trình

Lại có:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 - 2\cos 2x = 3(x^2 - 2x + 1) + 2(1 - \cos 2x) = 3(x - 1)^2 + 4\sin^2 x > 0, \quad \forall x$$

Nên $f(x)$ luôn đồng biến với mọi $\forall x$

Do vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

Ví dụ 4 : Giải phương trình $x(x^2 + 3) + (3x - 7)\sqrt{4 - 3x} = 0$ (1)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \leq \frac{4}{3}$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x(x^2 + 3) = (7 - 3x)\sqrt{4 - 3x} \Leftrightarrow x(x^2 + 3) = \sqrt{4 - 3x}[(4 - 3x) + 3]$$

Xét hàm số $f(t) = t(t^2 + 3) = t^3 + 3t$ với $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } f(x) = f(\sqrt{4 - 3x}) \Leftrightarrow x = \sqrt{4 - 3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 4 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 1$

Ví dụ 5: Giải phương trình : $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0$

(Olympic 30-4 ĐBSCL 2000)

Hướng dẫn giải

Ta thấy phương trình chỉ có nghiệm trong $(-\frac{1}{2}; 0)$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (-3x)(2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3}) = (2x+1)(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}) \quad (*)$$

Đặt $u = -3x$, $v = 2x+1$; $u, v > 0$.

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow u(2 + \sqrt{u^2 + 3}) = v(2 + \sqrt{v^2 + 3}) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t + \sqrt{t^4 + 3t^2}$ với $t > 0$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2 + \frac{2t^3 + 3t}{\sqrt{t^4 + 3t^2}} > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$$

$$\text{Phương trình } (1) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow -3x = 2x+1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$$

Vậy $x = -\frac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$\text{Ví dụ 6: Giải phương trình : } -2^{x^2-x} + 2^{x-1} = (x-1)^2 \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Phương trình } (1) \Leftrightarrow -2^{x^2-x} + 2^{x-1} = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} + x - 1 = 2^{x^2-x} + x^2 - x \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$.

Ta có $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } f(x-1) = f(x^2-x) \Leftrightarrow x-1 = x^2-x \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 1$

Nhận xét: Ở các ví dụ 1 đến ví dụ 6 đều sử dụng các tính chất: Nếu hai vế của phương trình đơn điệu ngược chiều (vế luôn đồng biến, vế kia luôn nghịch biến trên cùng tập K) hoặc một vế đơn điệu, vế kia là hằng số thì phương trình có tối đa một nghiệm nên nếu nhẩm được một nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

$$\text{Ví dụ 7: Giải phương trình : } \log_3 \frac{x^2+x+1}{2x^2-2x+3} = x^2-3x+2$$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = x^2+x+1$; $v = 2x^2-2x+3$ ($u > 0; v > 0$) $\Rightarrow v-u = x^2-3x+2$. Khi đó phương

$$\text{trình đã cho trở thành } \log_3 \frac{u}{v} = v-u \Leftrightarrow u + \log_3 u = v + \log_3 v \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = t + \log_3 t$ đồng biến khi $t > 0$.

Do đó từ (1) ta có $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow v - u = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1; x = 2$

Ví dụ 8: Giải phương trình : $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$ (1)

Hướng dẫn giải

Biến đổi (1) $\Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = x^2 + 2 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt[3]{t}$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do đó hàm số đồng biến.

Từ (*) $\Leftrightarrow f(2x^3 - 3x + 1) = f(x^2 + 2) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 9 : Giải phương trình: $2003^x + 2005^x = 4006x + 2$

(HSG Nghệ An 2005)

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(x) = 2003^x + 2005^x - 4006x - 2$

Ta có: $f'(x) = 2003^x \ln 2003 + 2005^x \ln 2005 - 4006$

$$f''(x) = 2003^x \ln^2 2003 + 2005^x \ln^2 2005 > 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow f''(x) = 0$ vô nghiệm

$\Rightarrow f'(x) = 0$ có nhiều nhất là một nghiệm

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm

Mà ta thấy $f(1) = f(0) = 0$ nên pt đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$

Nhận xét: Nếu $f(x) = 0$ có n nghiệm thì $f'(x) = 0$ có không quá $(n-1)$ nghiệm

Dạng 2: Giải phương trình chứa tham số

Ví dụ 1. (ĐH khối A – 2007) Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực :

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq 1$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = m \quad (1)$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$. Khi đó phương trình (1) trở thành : $-3t^2 + 2t = m$

Vì $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x+1}}$

Xét hàm số $t(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ trên đoạn $[1; +\infty)$

Ta có : $t'(x) = \frac{1}{2(x+1)^2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-\frac{3}{4}} > 0, \forall x \geq 1$

Mặt khác $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} t = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = 1 \\ t(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t < 1$

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = -3t^2 + 2t = m \\ 0 \leq t < 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $f'(t) = -6t + 2$ nên có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
f'(t)		+	0 -
f(t)	0	$\frac{1}{3}$	-1

Khi đó: $\max_{0 \leq t < 1} f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; còn $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = -1$

(Lưu ý rằng ở đây không tồn tại $\min_{0 \leq t < 1} f(t)$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.

Nhận xét :

1. Ở đây vì xét khi $0 \leq t < 1$, nên không tồn tại $\min_{0 \leq t < 1} f(t)$ nhưng tồn tại $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = -1$. Do đó điều kiện theo lý thuyết $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$ phải thay bằng

$-1 < m \leq \frac{1}{3}$ (tức là đã thay điều kiện $m \geq \min_{0 \leq t < 1} f(t)$ thành $m > \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$).

2. Ta có thể giải bài toán trên bằng định lý Viét

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = -3t^2 + 2t - m = 0 & (1) \\ 0 \leq t < 1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}) \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 4$

Khi đó :

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}) \Leftrightarrow m = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}} \quad (2)$$

Xét hàm số : $m = f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}}$ trên đoạn $[0; 4]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$

$$\frac{\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}}\right)(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}) + (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})\left(\frac{1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)}{(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})^2} > 0$$

với $\forall x \in (0; 4)$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0; 4]$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm

$$\min_{x \in [0; 4]} f(x) \leq m \leq \max_{x \in [0; 4]} f(x) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sqrt{5} - 2) \leq m \leq 12$$

Nhận xét: Có thể giải phương trình bằng cách nhân liên hợp về phải của (2) đưa về tích và vận dụng kiến thức sau:

Nếu các hàm số $y = f(x); y = g(x)$ đồng biến trên D và $f(x) > 0; g(x) > 0$ với

$\forall x \in D$ thì hàm số $y = f(x).g(x)$ đồng biến trên D

Ví dụ 3. (ĐH khối B – 2006)

Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Hướng dẫn giải

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x - 1 = mx & (1) \\ x \geq -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Do $x = 0$ không là nghiệm của (1) với mọi m , nên hệ trên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x} = m & (3) \\ x \geq -\frac{1}{2} & (4) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2}$ và bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$\frac{9}{2}$		

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$.

Nhận xét: Bài này có thể hướng dẫn học sinh giải bằng cách sử dụng lý Viét

$$\text{Tìm } m \text{ để hệ } \begin{cases} 3x^2 + (4 - m)x - 1 = 0 & (1) \\ x \geq -\frac{1}{2} & (2) \end{cases} \text{ có hai nghiệm phân biệt.}$$

Ví dụ 4. (ĐH khối B – 2004)

Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$

Ta thấy $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t \geq 0$ và $t = 0$ khi $x = 0$

Từ $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \leq 2 \Rightarrow t \leq \sqrt{2}$ và $t = \sqrt{2}$ khi $x = \pm 1$

Do đó ta có: $0 \leq t \leq \sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + t + 2}{t+2} = m \quad (2)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}$ với $0 \leq t \leq \sqrt{2}$

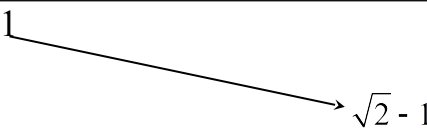
Ta có $f(t)$ liên tục trên đoạn $[0; \sqrt{2}]$

Phương trình (1) có nghiệm x khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; \sqrt{2}] \Leftrightarrow \min_{t \in [0; \sqrt{2}]} f(t) \leq m \leq \max_{t \in [0; \sqrt{2}]} f(t)$

Ta có: $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2} \leq 0, \forall t \in [0; \sqrt{2}]$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0; \sqrt{2}]$

Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		-	
$f(t)$		1 	

Từ bảng biến thiên ta thấy với $\sqrt{2}-1 \leq m \leq 1$ thì phương trình (2) có nghiệm trong đoạn $[-1; 1]$

Vậy với $\sqrt{2}-1 \leq m \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm trong đoạn $[-1; 1]$

Nhận xét: Đây là ví dụ học sinh dễ bị sai lầm trong việc hạn chế điều kiện của t , học sinh có thể đánh giá điều kiện của t bằng đạo hàm thay vì dùng bất đẳng thức

Ví dụ 5. (ĐH khối B – 2002)

Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$. Khi $1 \leq x \leq 3^{\sqrt{3}} \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$.

Bài toán trở thành:

Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} f(t) = t^2 + t - 2 = 2m & (1) \\ 1 \leq t \leq 2 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Ta có $f'(t) = 2t + 1$ và có bảng biến thiên sau:

t	$-\frac{1}{2}$	1	2
$f'(t)$		+	
$f(t)$		0 	

Khi đó: $\max_{1 \leq t \leq 2} f(t) = f(2) = 4$; $\min_{1 \leq t \leq 2} f(t) = f(1) = 0$.

Vậy các giá trị cần tìm của tham số m là $0 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

Ví dụ 6. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương:

$$x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)} = m$$

Hướng dẫn giải

Đặt $y = f(x) = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)}$ ta có $y' = 1 - \frac{11}{2x^2} - \frac{28}{x^2\sqrt{4x^2 + 28}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = \frac{11}{2x^2} - \frac{28}{x^2\sqrt{4x^2 + 28}} = 1$$

Để thấy $g(x)$ nghịch biến với $x > 0$ (vì $g'(x) < 0, \forall x > 0$).

Mặt khác $g(3) = 1$ nên $x = 3$ là nghiệm duy nhất

Mà

$$x > 3 \Rightarrow g(x) < 1 \Rightarrow y' > 0$$

$$x < 3 \Rightarrow g(x) > 1 \Rightarrow y' < 0$$

Vì vậy ta có bảng biến thiên sau

x	0	3	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	$\frac{15}{2}$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào bảng biến thiên ta có

phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow m > \min_{(0; +\infty)} y \Leftrightarrow m > \frac{15}{2}$

Ví dụ 7: Cho phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_2 x - 3)$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in [32; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện: $x \in [32; +\infty) \Rightarrow \log_2 x \geq 5$, suy ra $\log_2 x - 3 \geq 2$ nên $m \geq 0$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = m^2 (\log_2 x - 3)^2 \quad (2)$$

Đặt $t = \log_2 x, (t \geq 5)$.

Phương trình (2) trở thành $t^2 - 2t - 3 = m^2 (t - 3)^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{t+1}{t-3} \quad (3)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+1}{t-3}$ (với $t \geq 5$).

$$f'(t) = \frac{-4}{(t-3)^2} < 0, \forall t \geq 5$$

Ta có bảng biến thiên

t	5	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	3	1

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [32; +\infty)$ khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm $t \geq 5$ điều này xảy ra khi $1 < m^2 \leq 3$.

Kết hợp với $m \geq 0$, ta được $1 < m \leq \sqrt{3}$

Ví dụ 8: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m \quad (1) \text{ trên } \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} = -x \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} \right)$

Xét hàm số $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			4
	$\frac{11}{8}$	1	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x) \geq 1, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

và $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ ta có $3\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \leq 3x + 4 \leq 3.1 + 4 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq 3x + 4 \leq 7$.

Suy ra $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$	1	-4

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của $d: y = m$ và
(C) : $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1}$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi $-4 \leq m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$ hoặc $m = 1$.

Nhận xét : Đây là bài toán mà ta không đặt được ẩn phụ, nếu dùng phép biến đổi mất căn thì dẫn đến một phương trình phức tạp. Cách giải trên đưa về dùng bảng biến thiên rất đơn giản. Đó là ưu điểm của cách giải trên.

Bài tập

1. Giải phương trình : $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(1+\sqrt{1+x+x^2})=0$
(ĐS: $x=-\frac{1}{5}$)
2. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2x^2+1}=\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{x+1}$
(ĐS: $x=-\frac{1}{2}; x=1$)
3. Giải phương trình : $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4$
(ĐS: $x=1$)
4. Giải phương trình $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$
(ĐS: $x=1$)
5. Giải phương trình : $(8x^2+2)x+(x-6)\sqrt{5-x}=0$
(ĐS: $x=1$)
6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm
 $6+x+2\sqrt{(4-x)(2x-2)}=m+4(\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-2})$
(ĐS: $0\leq m\leq 1$)
7. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt:
 $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m$
(ĐS: $2(\sqrt[4]{6}+\sqrt{6})\leq m<3\sqrt{2}+6$)
8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
 $2+2\sin 2x=m(1+\cos x)^2$
(ĐS: $0\leq m\leq 2$)
9. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=m3^{\sin^2 x}$
(ĐS: $1\leq m\leq 4$)
10. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt : $\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(x+1)(8-x)}=m$
(ĐS: $3\leq m<3\sqrt{2}+\frac{9}{2}$)
11. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực
 $2\sqrt{-x^2-2x+3}-(m-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})+m+1=0$;
(ĐS : $3\leq m\leq \frac{-6+16\sqrt{2}}{7}$)
12. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm
 $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$
(ĐS : $-\frac{9}{4}\leq m\leq 10$)

13. Tìm m để phương trình : $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+3} = mx$ có nghiệm

$$(\text{ĐS : } m \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty \right))$$

2.4. Hiệu quả của đề tài.

Sau khi các bài toán này được thực hành trên lớp và kiểm tra, đa số học sinh tiếp thu và vận dụng tốt.

- Năm học 2011 – 2012 rất nhiều học sinh lớp 12C8 đạt điểm Toán từ 7,25 trở lên trong các kì thi đại học, cao đẳng
- Năm học 2013 – 2014 số học sinh đạt điểm 8,0 càng nhiều trong môn Toán trong kì thi đại học, cao đẳng
- Năm học 2014 – 2015 có 9 em học sinh lớp 12C3 em đạt điểm cao từ 8,25 trở lên trong kì thi đại học, cao đẳng.

3. Kết luận, kiến nghị

+ Kết luận

Qua thời gian viết SKKN và vận dụng chuyên đề này vào giảng dạy, tôi nhận thấy việc làm này đã thu được kết quả đáng kể từ phía các em học sinh. Đây thực sự là một công cụ hữu hiệu, giúp học sinh giải quyết bài toán nhanh, gọn và chính xác. Đồng thời các em đã có được cái nhìn tổng thể về cách giải quyết bài toán này. Điều này phần nào tạo cho các em học sinh có được tâm thế tốt khi sắp bước vào các kỳ thi quan trọng.

Qua việc ứng dụng đề tài này vào giảng dạy cho học sinh, tôi nhận thấy đây là một chuyên đề có thể tiếp tục áp dụng cho các năm tiếp theo, đặc biệt rất phù hợp với đối tượng là học sinh khá, giỏi. Tất nhiên là phải tiếp tục hoàn thiện đề tài này hơn nữa. Bài học kinh nghiệm được rút ra từ quá trình áp dụng SKKN của tôi là:

Phải thường xuyên học hỏi trau dồi chuyên môn để tìm ra phương pháp dạy học phù hợp.

+ Kiến nghị

- Người Thầy phải nhiệt tình, gương mẫu, làm cho các em thấy được tinh thần nghiêm túc và hăng say nghiên cứu khoa học của mình, có vậy học sinh mới noi gương Thầy quyết tâm và ham mê học tập, từ đó để các em không cảm thấy áp lực trong học tập.

Tiếp theo là, thường xuyên tạo ra tình huống có vấn đề, kích thích sự tìm tòi học tập ở học sinh.

- Đối với trường THPT Nguyễn Quán Nho cần quan tâm hơn nữa trong việc phát hiện và đào tạo học sinh khá giỏi cũng như ôn luyện học sinh

thi THPTQG để đề tài phát huy hơn nữa tính tự học của HS, tính tự bồi dưỡng của giáo viên.

- Đối Sở GD-ĐT cần chú trọng hơn nữa trong công tác kiểm tra và đánh giá chất lượng giáo dục, đổi mới khâu ra đề thi chọn HSG tỉnh, thi chọn đội tuyển dự thi HSG QG để đề tài có ý nghĩa hơn.

- Đối với Bộ giáo dục và đào tạo, đổi mới khâu ra đề thi THPTQG và thi HSG quốc gia nhất là các câu phân luồng.

Trong quá trình thực hiện đề tài, tôi đã nhận được những góp ý quý báu của các đồng nghiệp, song do thời gian nghiên cứu và ứng dụng chưa dài, nên đề tài của tôi không tránh khỏi còn nhiều hạn chế. Rất mong tiếp tục nhận được sự đóng góp khác từ phía đồng nghiệp để tôi có thể hoàn thiện hơn đề tài của mình.

Xin chân thành cảm ơn !

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	Thanh Hóa, ngày 13 tháng 5 năm 2016 Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Nguyễn Thị Lan
---------------------------------------	---

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Giải tích 12 nâng cao, NXB giáo dục năm 2008. Nhóm tác giả Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Doan, Trần phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng.
2. Giải tích 12 cơ bản NXB giáo dục. Nhóm tác giả Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, Cần Văn Tuất
3. Giới thiệu đề thi tuyển sinh vào đại học, từ năm học 1997-1998 đến năm học 2004-2005. NXB Đại học Quốc gia HN của tác giả Doãn Minh Cường.

4. Giới thiệu đề thi tuyển sinh vào đại học – cao đẳng toàn quốc, từ năm học 2002-2003 đến năm học 2009-2010. NXB Hà Nội của nhóm tác giả Trần Tuấn Điệp, Ngô Long Hậu, Nguyễn Phú Trường.
5. Các bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất
Tác giả: Nguyễn Thái Hòa - XB năm 2006
6. Tạp chí toán học và tuổi trẻ, NXB Giáo dục. của Bộ giáo dục đào tạo- Hội toán học Việt Nam (1996- 2007).
7. Chuyên đề các phương pháp giải phương trình mũ, lôgarit và các loại hệ phương trình đại số -Nxb của Huỳnh Công Thái