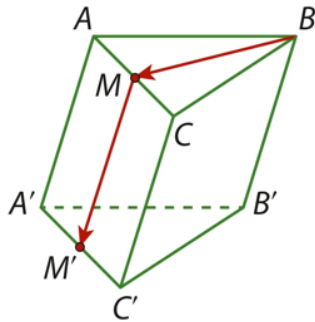


PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Khái niệm vectơ trong không gian

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, A'C'$ (Hình).



a) Trong tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lăng trụ, hãy chỉ ra các vectơ:

- Khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\vec{AM}$;

- Khác $\vec{0}$ và cùng hướng với $\vec{AM}$;

- Là vectơ đối của $\vec{AC}$;

- Bằng $\vec{MM'}$.

b) Tìm độ dài của $\vec{BM}$ trong trường hợp ABC là tam giác cân tại B , có cạnh bên bằng 5 cm và góc ở đỉnh bằng 30° (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

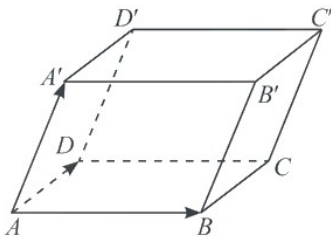
Câu 3. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:

a) Bằng vectơ $\vec{AD}$;

b) Là vectơ đối của vectơ $\vec{AD}$.

Câu 4. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.



a) Giá của ba vectơ $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

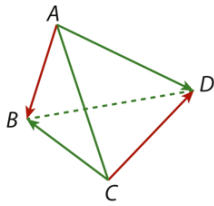
b) Tìm các vectơ bằng vectơ $\vec{AB}$.

c) Tìm các vectơ đối của vectơ $\vec{AD}$.

Dạng 2. Các phép toán của vectơ trong không gian

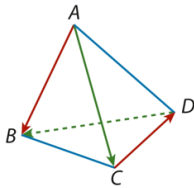
Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Tìm các vectơ tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.

Câu 7. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



Câu 8. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình). Tìm vectơ $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$.

Câu 9. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.



Câu 10. Cho hình hộp $ABCD \cdot EFGH$. Thực hiện các phép toán sau đây:

a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$

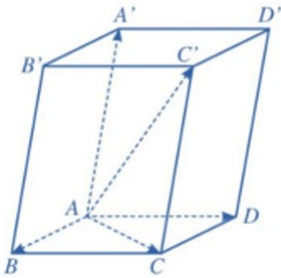
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$

Câu 11. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình bình hành.

Tìm các vectơ hiệu $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD}$.

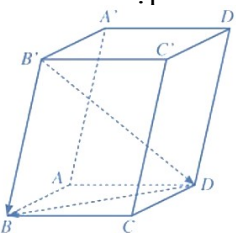
Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.



Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.



Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC ; G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Xác định các điểm M, N thỏa mãn:

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của MN và G_1 là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

c. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

d. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 4\overrightarrow{NG}, \forall N$.

e. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG_1}$

Câu 18. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{A'C}$.

c) Gọi O là tâm hình hộp. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a. Chứng minh rằng có một điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$.

b. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian ta đều có $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'})$. Suy ra điểm O nói trên là duy nhất.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SO}$.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Câu 23. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Trên đoạn SA lấy M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

a. Phân tích vector $\overrightarrow{SG}$ theo các vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

b. Gọi D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$. Phân tích vector $\overrightarrow{SD}$ theo ba vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = a, \overrightarrow{AB} = b, \overrightarrow{AC} = c$.

a. Phân tích các vector $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ theo các vector a, b, c .

b. Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Phân tích vector $\overrightarrow{AG'}$ theo ba vector a, b, c .

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có trung tuyến qua đỉnh A của tam giác ABC và AN . Lấy điểm M trên AN sao cho $\frac{AM}{MN} = \frac{3}{7}$. Phân tích vector $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

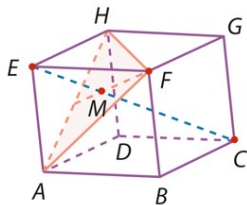
Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . P, Q là các điểm định bởi $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD}$. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng.

Câu 28. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Hai điểm M, N lần lượt chia đoạn AC và BD theo cùng tỉ số λ . Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. Hãy biểu thị vector $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD ; P, Q lần lượt là các điểm chia đoạn AC và BD theo tỉ số $k \neq 1$. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Dạng 3. Tích vô hướng, góc của 2 vectơ

Câu 30. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Điểm M là trọng tâm tam giác AFH (Hình).



a) Chứng minh rằng ba điểm E, M, C thẳng hàng.

b) Tính độ dài của $\overrightarrow{EM}$ trong trường hợp $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng có các cạnh $AB = 5, AD = 6, AE = 10$ và $\angle ABC = 120^\circ$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính:

a) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS}$;

b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$;

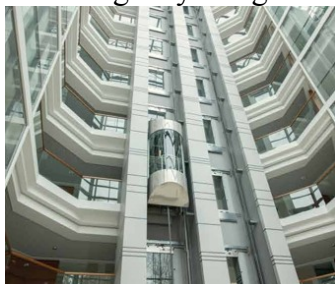
c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vector $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

- Câu 34.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Câu 35.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .
a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.
b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.
- Câu 36.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}$.
- Câu 37.** Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Câu 38.** Cho tứ diện $ABCD$:
a. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.
b. Suy ra rằng nếu 2 cặp cạnh đối trong tứ diện vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối thứ 3 cũng vuông góc với nhau.
- Câu 39.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a .
a) Tính góc giữa hai vector $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC})$.
b) Gọi I là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai vector $(\overrightarrow{CI}; \overrightarrow{AC})$.
- Câu 40.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB .
a) Biểu diễn các vector $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{BC}$ theo các vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.
b) Tính $(\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{BC})$.

Dạng 4. Ứng dụng thực tế

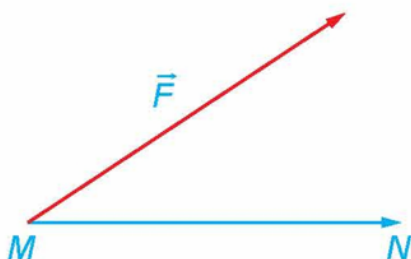
- Câu 41.** Một toà nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của toà nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.



- Câu 42.** Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h , trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vector $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$. Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{F_1} = k \overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

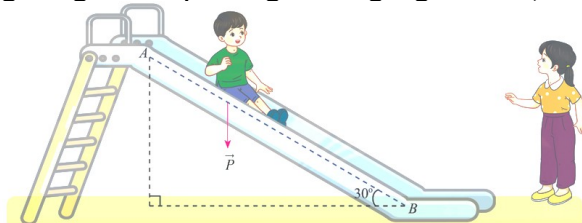


Câu 43. Như đã biết, nếu có một lực F tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = F \cdot \overline{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun. Do đó, nếu dùng một lực F có độ lớn không đổi để làm một vật di chuyển một quãng đường không đổi thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao.



Kết quả trên có thể được áp dụng như thế nào khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng?

Câu 44. Một em nhỏ cân nặng $m = 25\text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài $3,5\text{ m}$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình).



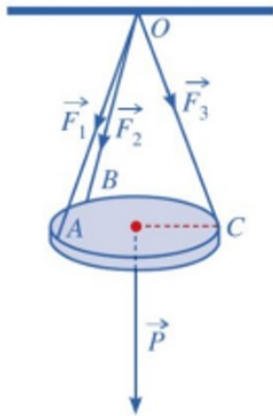
a) Tính độ lớn của trọng lực $P = mg$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do g có độ lớn là $g = 9,8\text{ m/s}^2$.

b) Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực F có độ dịch chuyển d được tính bởi công thức $A = F \cdot d$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực P khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

Câu 45. Trọng lực P là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật, được tính theo công thức $P = mg$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), còn g là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8\text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bưởi có khối lượng $2,5\text{ kg}$.



- Câu 46.** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$ (N) (Hình).



Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

- Câu 47.** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N . Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N . Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

- Câu 48.** Theo định luật II Newton. Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

$F = ma$ trong đó a là vector gia tốc (m/s^2), F là vector lực (N) tác dụng lên vật, $m(kg)$ là khối lượng của vật.



Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5\text{ kg}$ một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đã có độ lớn là bao nhiêu?

- Câu 49.** Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực F tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = F \cdot d$, trong đó d là vector biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|d|$ là m) khi chịu tác dụng của lực F .

Một chiếc xe có khối lượng $1,5$ tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực P khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực P được xác định bởi công thức $P = mg$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và g là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8\text{ m/s}^2$.