

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đổi số đo góc $\alpha = 105^\circ$ sang radian ta được

A. $\alpha = \frac{5\pi}{8}$.

B. $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

C. $\alpha = \frac{7\pi}{12}$.

D. $\alpha = \frac{9\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 2. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α mà $\widehat{uOV}$ là góc tù. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Có số nguyên k để $\frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

B. $-\pi \leq \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

C. $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3. Giá trị $\cot \frac{89\pi}{6}$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $-\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

- Câu 4.** Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0$.
- B. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0$.
- C. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha < 0$.
- D. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha < 0$.

Lời giải

Chọn D

- Câu 5.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?
- A. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
- B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.
- C. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$.
- D. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

Lời giải

Chọn D

- Câu 6.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?
- A. $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$.
- B. $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$.
- C. $\sin(180^\circ - a) = \sin a$.
- D. $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

Lời giải

Chọn C

- Câu 7.** Biết $\sin x = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\cos^2 x$ bằng
- A. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.
- B. $\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$.

D. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 8. Biết $\cot x = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $\frac{4\sin x + 5\cos x}{2\sin x - 3\cos x}$ bằng

A. $\frac{1}{17}$.

B. $\frac{5}{9}$.

C. 13.

D. $\frac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 9. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

A. $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$.

B. $\cos u - \cos v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$.

C. $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$.

D. $\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 10. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

A. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

B. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

C. $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

D. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 12. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

B. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

C. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

D. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 13. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

C. Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

D. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Lời giải

Chọn C

Câu 14. Hàm số nào dưới đây có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

A. $y = \cos x$.

B. $y = \sin^3 x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \tan x$.

Lời giải

Chọn A

Câu 15. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
- B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
- C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
- D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .

Lời giải

Chọn C

Câu 16. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số tuần hoàn.
- B. Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số lẻ.
- C. Hàm số $y = x \sin x$ là hàm số tuần hoàn.
- D. Hàm số $y = x \sin x$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn C

Câu 17. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- B. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- C. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- D. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn A

Câu 18. Số nghiệm của phương trình $2\cos x = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

- A. 1.
- B. 4.
- C. 3.
- D. 2.

Lời giải

Chọn C

Câu 19. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $3\cos x - 1 = 0$ bằng

- A. $S = 2\pi$.
- B. $S = 0$.

C. $S = 4\pi$.

D. $S = 3\pi$.

Lời giải

Chọn B

Câu 20. Giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn A

B. TỰ LUẬN

Câu 21. Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau và tính các giá trị lượng giác của chúng:

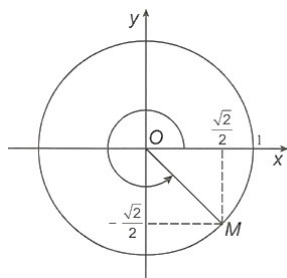
a) $\frac{23\pi}{4}$

b) $\frac{31\pi}{6}$

c) -1380° .

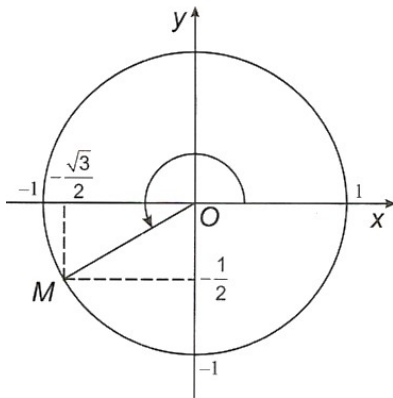
Lời giải

a) Ta có $\frac{23\pi}{4} = 6\pi - \frac{\pi}{4}$. Góc $\frac{23\pi}{4}$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ trên đường tròn lượng giác (hình dưới).



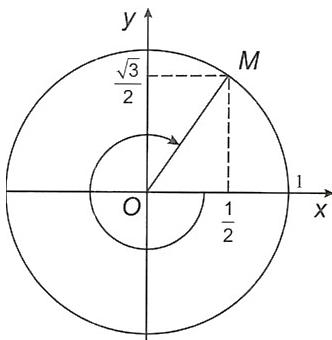
Vậy $\sin \frac{23\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{23\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\tan \frac{23\pi}{4} = \cot \frac{23\pi}{4} = -1$.

b) Ta có $\frac{31\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 4\pi$. Góc $\frac{31\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ trên đường tròn lượng giác (hình dưới).



Vậy $\sin \frac{31\pi}{6} = -\frac{1}{2}$; $\cos \frac{31\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan \frac{31\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\cot \frac{31\pi}{6} = \sqrt{3}$.

c) Ta có $-1380^\circ = -4 \cdot 360^\circ + 60^\circ$. Góc -1380° được biểu diễn bởi điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ trên đường tròn lượng giác (hình dưới).



$\sin(-1380^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-1380^\circ) = \frac{1}{2}$
 $\tan(-1380^\circ) = \sqrt{3}$ và $\cot(-1380^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 22. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài $1,75m$ và $1,26m$. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

Lời giải

a) Trong 15 phút thì mũi kim phút vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}$ độ dài đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1,75 = \frac{7}{8}\pi \approx 2,75(m).$$

b) Trong 15 phút thì mũi kim giờ vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$ đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 1,26 = \frac{21}{400}\pi \approx 0,16(m).$$

Câu 23. Huyện lỵ Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính 6378 km .

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^\circ - 9^\circ = 14^\circ$. Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\frac{6378 \cdot 14 \cdot \pi}{180} \approx 1558(\text{km})$.

Câu 24. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}, \sin \alpha > 0; \sin \beta = \frac{3}{5}, \beta \in \left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$.
Hãy tính $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\beta, \sin 2\beta, \cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha - \beta)$.

Lời giải

Ta có $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$.

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$. Lại do $\sin \alpha > 0$ nên $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Suy ra

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Ta có $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.

Ta có $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Lại do $\beta \in \left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$ nên $\cos \beta < 0$, do đó $\cos \beta = -\frac{4}{5}$. Suy ra

$$\sin 2\beta = 2\sin \beta \cos \beta = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

Ta có

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-12 - 3\sqrt{7}}{20}.$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-9 - 4\sqrt{7}}{20}.$$

Câu 25. Rút gọn các biểu thức sau

$$\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)};$$

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$$

$$\frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}.$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} \\ &= \frac{(\sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha) - (\cos 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha)}{(\sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha) + (\cos 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha)} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)} = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha} = \tan \alpha. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2 \cos \alpha + 1)} = \tan \alpha$$

c) Ta có

$$\frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = - \cot \frac{\alpha}{2}.$$

d) Ta có

$$\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha}{2 \cos 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)}{\cos 3\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)} = \tan 3\alpha$$

Câu 26. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$A = \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right);$$

$$B = \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right);$$

$$c) \quad C = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$c) \quad D = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$$

Lời giải

a) Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 0, \forall x \end{aligned}$$

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0, \forall x \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0 \forall x \end{aligned}$$

$$c) \quad C = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin^2 x + \frac{1}{2} \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \cos(-2x) \right)$$

$$= \sin^2 x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \cos 2x \right) = \sin^2 x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + (1 - 2\sin^2 x) \right) = \frac{1}{4} \forall x$$

$$d) \quad D = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x = \frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x + 2\sin x \cos x} \cdot \cot x$$

$$= \frac{2\sin x(\sin x + \cos x)}{2\cos x(\sin x + \cos x)} \cdot \cot x = \tan x \cdot \cot x = 1 \forall x$$

Câu 27. Hai sóng âm có phương trình lần lượt là

$$f_1(t) = C \sin \omega t \text{ và } f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha).$$

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo ra một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha).$$

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng $f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, ở đó A, B là hai hằng số phụ thuộc vào α .

b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

a) Ta có $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$$= C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha) = C \sin \omega t + C(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha).$$

Vậy $f(t) = C(1 + \cos \alpha) \sin \omega t + C \sin \alpha \cos \omega t = A \sin \omega t + B \cos \omega t$
 $A = C(1 + \cos \alpha), B = C \sin \alpha$.

với

b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ta có

$$f(t) = 10 \sin \omega t + 10 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) = 10 \cdot 2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k = 10\sqrt{3}$ và $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Câu 28. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos \frac{2x}{x-1}$

b) $y = \frac{1}{\cos x - \cos 3x}$

c) $y = \frac{1}{\cos x + \sin 2x}$

d) $y = \tan x + \cot x$.

Lời giải

a) Biểu thức $\cos \frac{2x}{x-1}$ có nghĩa khi $x \neq 1$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Biểu thức $\frac{1}{\cos x - \cos 3x}$ có nghĩa khi $\cos x \neq \cos 3x \Leftrightarrow 3x \neq \pm x + k2\pi \Leftrightarrow x \neq k \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) Biểu thức $\frac{1}{\cos x + \sin 2x}$ có nghĩa khi

$$\cos x + \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} \neq x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{2} \neq -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Vậy tập xác định của hàm số là

d) Biểu thức $\tan x + \cot x$ có nghĩa khi

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Câu 29. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \sin x - \cos x$;

b) $y = \sin x + \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$

c) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

d) $y = \cos 2x + 2 \cos x - 1$

Lời giải

a) Ta có $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ nên } -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -1$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có $y = \sin x + \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$. Vậy giá trị lớn nhất của

hàm số là 1, đạt được khi $\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = k2\pi$ hay

$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 , đạt được khi
 $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi$ hay $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 1 , đạt được khi $\cos 4x = 1$

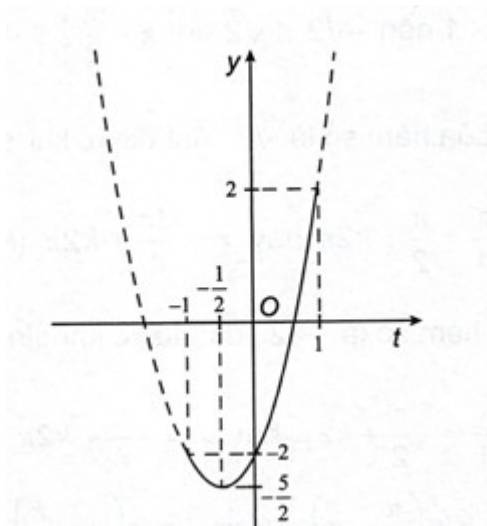
$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $\cos 4x = -1$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Ta có $y = \cos 2x + 2\cos x - 1 = 2\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 2t^2 + 2t - 2$ với $t = \cos x \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $y = 2t^2 + 2t - 2$ trên đoạn $[-1; 1]$. Hàm số này có đồ thị như trong hình vẽ dưới đây.



Từ đồ thị ta dễ dàng suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là 2 , đạt được khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{5}{2}$, đạt được khi $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Câu 30. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin^3 x - \cot x$

$$b) y = \frac{\cos x + \tan^2 x}{\cos x}$$

$$c) y = \sin 2x + \cos x;$$

$$d) y = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Nếu kí hiệu $f(x) = \sin^3 x - \cot x$ thì với mọi $x \in D$ ta có: $-x \in D$ và

$$f(-x) = \sin^3(-x) - \cot(-x) = -\sin^3 x + \cot x = -(\sin^3 x - \cot x) = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Nếu kí hiệu $f(x) = \frac{\cos x + \tan^2 x}{\cos x}$ thì với mọi $x \in D$ ta có: $-x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) + \tan^2(-x)}{\cos(-x)} = \frac{\cos x + \tan^2 x}{\cos x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Nếu kí hiệu $f(x) = \sin 2x + \cos x$ thì ta có
 $f(-1) = \sin 2(-1) + \cos(-1) = -\sin 2 + \cos 1 \neq \pm f(1).$

Vậy hàm số đã cho là hàm số không chẵn cũng không lẻ.

d) Ta có

$$\begin{aligned} y &= 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ &= \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\right] + \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\right] \\ &= \sin \pi - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\cos 2x \end{aligned}$$

là hàm số chẵn.

Câu 31. Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau:

$$a) y = \sin \frac{x}{2} + \cos 3x$$

$$b) y = \cos 5x + \tan \frac{x}{3}.$$

Lời giải

a) Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 4\pi$, hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Ta có $4\pi = 6 \times \frac{2\pi}{3}$. Ta chỉ ra rằng hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos 3x$ tuần hoàn như sau:

$$f(x + 4\pi) = \sin \frac{x + 4\pi}{2} + \cos 3(x + 4\pi) = \sin \left(\frac{x}{2} + 2\pi \right) + \cos(3x + 12\pi) = \sin \frac{x}{2} + \cos 3x = f(x) \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $T = 4\pi$.

b) Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, hàm số $y = \tan \frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = 3\pi$.

Ta có $6\pi = 2 \times 3\pi = 15 \times \frac{2\pi}{5}$. Ta có thể chỉ ra hàm số $f(x) = \cos 5x + \tan \frac{x}{3}$ tuần hoàn như sau

$$f(x + 6\pi) = \cos 5(x + 6\pi) + \tan \frac{x + 6\pi}{3} = \cos(5x + 30\pi) + \tan \left(\frac{x}{3} + 2\pi \right) = \cos 5x + \tan \frac{x}{3} = f(x) \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $T = 6\pi$.

Câu 32. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\tan \left(\frac{x}{3} + 10^\circ \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}};$

c) $\sin 3x - \cos 5x = 0;$

d) $\tan 3x \tan x = 1.$

Lời giải

a) Ta có $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có

$$\tan \left(\frac{x}{3} + 10^\circ \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan \left(\frac{x}{3} + 10^\circ \right) = \tan(-30^\circ) \Leftrightarrow \frac{x}{3} + 10^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = -120^\circ + k540^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

c) Ta có

$$\sin 3x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 5x + k2\pi \\ 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} - k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Điều kiện $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x \neq 0$. Ta có

$$\tan 3x \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \cot x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta thấy $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ thoả mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 33. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 5x + \cos 5x = -1$;

b) $\cos 3x - \cos 5x = \sin x$;

c) $2\cos^2 x + \cos 2x = 2$;

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Lời giải

a) Ta có $\sin 5x + \cos 5x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$

$$\Leftrightarrow \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta được } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

b) Ta có $\cos 3x - \cos 5x = \sin x \Leftrightarrow -2\sin \frac{3x+5x}{2} \sin \frac{3x-5x}{2} = \sin x$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x \sin x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Với $\sin x = 0$ ta được $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$\sin 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

- Với

c) Ta có

$$2\cos^2 x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1) + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$$

Từ đó ta được $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} (2\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

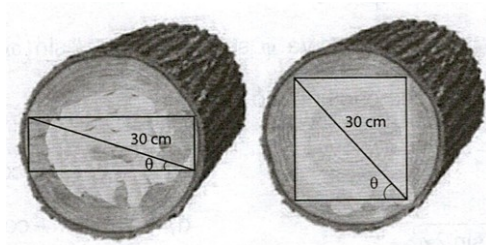
Từ đó, ta được $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \sin^2 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 34. Một thanh xà gỗ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính 30 cm.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ được tính bởi công thức

$$S(\theta) = 450 \sin 2\theta (cm^2), \text{ ở đó góc } \theta \text{ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.}$$



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ là lớn nhất.

Lời giải

a) Mặt cắt của thanh xà gỗ (hình dưới) là hình chữ nhật có hai kích thước là $AB = 30 \cos \theta$ và $BC = 30 \sin \theta$.

Vậy diện tích mặt cắt là $S = AB \cdot BC = 30 \cdot 30 \sin \theta \cos \theta = 450 \sin 2\theta$.

b) Ta có $S = 450 \sin 2\theta \leq 450$. Vậy diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ lớn nhất khi $\sin 2\theta = 1$ hay góc $\theta = 45^\circ$.

Câu 35. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một

người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi

$$P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$$

hàm số

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100mmHg .

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120mmHg .

Lời giải

a) Huyết áp là 100mmHg khi

$$P(t) = 100 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3k}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3k}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\} \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 mmHg.

b) Huyết áp là 120mmHg khi

$$P(t) = 120 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0 \text{ vì } k \in \mathbb{Z}$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 mmHg.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>