



$$A. \frac{1}{4}$$

$$B. \frac{12}{33}$$

$$C. \frac{14}{33}$$

$$D. \frac{4}{33}$$

## PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

### Câu I. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử.  $E = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017$

b) Cho  $a, b, c$  là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

### Câu II. (3 điểm)

a) Tìm nghiệm của đa thức sau.  $f(x) = (2x^2 + x - 6)^2 + 3(2x^2 + x - 3) = 9$

b) Tìm hai số  $x, y$  thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức sau:  $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$  (1) và

$$\frac{1}{|x-2y|} + |x+2y| = 4 \quad (2)$$

### Câu III. (2 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $2(x+y+9) = 3xy$

b) Tìm số tự nhiên  $n$  để  $n+5$  và  $n+30$  là các số chính phương.

### Câu IV. (6 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao điểm của AK và DE. Hạ DM vuông góc với CE

a) Chứng minh tứ giác ADKE là hình chữ nhật, từ đó suy ra  $AM \perp KM$ .

b) Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh  $\triangle ADM$  cân và tính số đo của góc ANB.

c) Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F. Chứng minh rằng  $CF \leq 2EF$ .

### Câu IV. (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $C = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 15$

..... **HẾT** .....

Họ tên học sinh: .....; Số báo danh: .....

## HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

### PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

#### BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.A	4.B	5.C	6.A	7.D	8.B	9.A	10.A
11.D	12.C								

**Câu 1:** Giá trị của biểu thức  $x^2 - 2xy - 64 + y^2$  khi  $x - y = 18$  là:

A. 280.

B. 260.

C. 180.

D. 160.

Ta có:

$$A = x^2 - 2xy - 64 + y^2$$

$$A = x^2 - 2xy - 64 + y^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - 64 = (x - y - 8)(x - y + 8)$$

Thay  $x - y = 18$  vào A ta được  $A = (18 - 8)(18 + 8) = 260$

Đáp án cần chọn là. **B.**

**Câu 2:** Rút gọn biểu thức  $A = (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 4c^2$  ta được kết quả là:

A.  $A = (a+b+c)(a+b-c)$ .

B.  $A = 2(a+b+c)(a+b-c)$ .

C.  $A = (a-b+c)(a+b+c)$ .

D.  $A = 2(a+b+c)(a-b-c)$ .

**Giải**

$$A = (a+b+c)^2 + (a+b-c+2a)(a+b-c-2c)$$

$$= (a+b+c)^2 + (a+b+c)(a+b-3c)$$

$$= (a+b+c)(a+b+c+a+b-3c)$$

$$= (a+b+c)(2a+2b-2c) = 2(a+b+c)(a+b-c)$$

Đáp án cần chọn là. **B.**

**Câu 3:** Kết quả của phép chia  $x^5 + x^4 + 1$  cho  $x^2 + x + 1$  là

A.  $x^3 - x + 1$ .

B.  $x^3 - x - 1$ .

C.  $x^3 + x - 1$ .

D.  $x^3 + x + 1$ .

**Giải**

$$x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 = x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) : (x^2 + x + 1)$$

Đáp án cần chọn là. **A.**

**Câu 4:** Xác định đa thức  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$  sao cho đa thức  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$  chia hết cho đa thức  $x + 2$  và chia cho đa thức  $(x^2 - 1)$  được thương và còn dư 5

A.  $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{20}{3}$

B.  $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 + \frac{20}{3}$

C.  $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 - \frac{20}{3}$

D.  $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{20}{3}$

**Giải**

Biểu diễn các phép chia như sau:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c = (x+2) \cdot A(x) \quad (1)$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c = (x-1) \cdot (x+1) \cdot B(x) + 5 \quad (2)$$

Thay  $x = -2$  vào (1) ta được  $-8a + 4b + c = 0$

Thay  $x = 1$  vào (2) ta được  $a + b + c = 5$

Thay  $x = -1$  vào (2) ta được  $-a + b + c = 5$

Từ đó suy ra:  $a = 0; b = \frac{-5}{3}; c = \frac{20}{3}$  Nên đa thức cần tìm là  $f(x) = \frac{-5}{3}x^2 + \frac{20}{3}$

Đáp án cần chọn là. **B.**

**Câu 5:** Biểu thức  $A(x) = 2023 + 2x - x^2$  đạt giá trị lớn nhất bằng.

A. 2023

B. -2023

C. 2024

D. -2024

**Giải**

$$A(x) = 2023 + 2x - x^2 = 2024 - (1 - 2x + x^2) = 2024 - (1 - x)^2$$

$$\text{Do } (1-x)^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow A(x) = 2024 - (1-x)^2 \leq 2024, \forall x$$

Do

Do đó  $A(x)$  đạt giá trị lớn nhất là 2024 khi  $x = 1$

Đáp án cần chọn là. **C.**

**Câu 6:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $x^2 + 2x + 9y^2 - 6y + 2023$  là

A. 2021

B. -2021

C. 2023

D. -2023

**Giải**

$$A(x, y) = x^2 + 2x + 1 + 9y^2 - 6y + 1 + 2021$$

$$= (x+1)^2 + (3y-1)^2 + 2021$$

$$\text{Do } (x+1)^2 \geq 0, \forall x \text{ và } (3y-1)^2 \geq 0, \forall y$$

$$\text{Nên } (x+1)^2 + (3y-1)^2 + 2021 \geq 2021, \forall x, y$$

$$\text{Do đó } \text{Min} A(x, y) = 2021 \Leftrightarrow x = -1; y = \frac{1}{3}$$

Đáp án cần chọn là. **A.**

**Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị của  $x$  thoả mãn  $x^2 - 4x + 4 = 25$ .

A. 1.

B. 4

C. 3.

D. 2.

**Giải**

$$x^2 - 4x + 4 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 5^2 = 0 \quad [x=7]$$

$$\Leftrightarrow (x-2-5)(x-2+5) = 0 \quad [x=-3]$$

Do đó

Vậy có hai giá trị của  $x$  thoả mãn đề bài.

Đáp án cần chọn là. **D.**

**Câu 8:** Tìm  $a$  để đa thức  $A(x) = x^3 + ax^2 + 5x + 3$  chia hết cho đa thức  $B(x) = x^2 + 2x + 3$

A.  $a = -3$

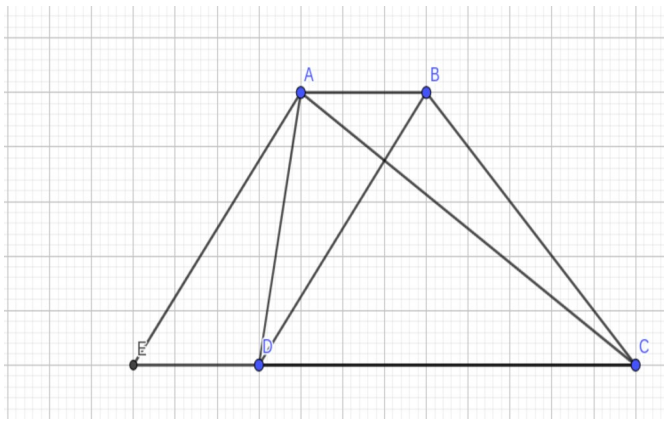
B.  $a = 3$

C.  $a = -2$

D.  $a = 2$

**Giải**





Từ A vẽ  $AE \parallel BD$ , do  $AE \parallel BD$ ,  $AB \parallel ED$ .

Suy ra tứ giác  $ABDE$  là hình bình hành

Suy ra  $AE = DB = 12\text{cm}$ ,  $DE = AB = 5\text{cm}$ ,  $EC = ED + DC = 20\text{cm}$

Xét  $\triangle AEC$  có  $EC^2 = 20^2 = 16^2 + 12^2 = AC^2 + AE^2$

Suy ra  $\triangle AEC$  vuông tại A

Lại có  $BD \parallel AE$  nên  $BD \perp AC$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = 96$$

Đáp án cần chọn là. **D.**

**Câu 12:** Một tổ có 8 nam và 4 nữ, chọn ngẫu nhiên 2 bạn bất kì trong tổ. Xác suất để chọn được cả 2 người là nam ?

**A.**  $\frac{1}{4}$

**B.**  $\frac{12}{33}$

**C.**  $\frac{14}{33}$

**D.**  $\frac{4}{33}$

**Giải**

Số cách chọn 2 bạn bất kì trong số 12 bạn cả nam và nữ là :  $11 \cdot 12 : 2 = 66$

Số cách chọn 2 bạn là nam trong số 8 bạn nam là :  $7 \cdot 8 : 2 = 28$

$$\frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

Xác suất để cả 2 bạn được chọn là nam

Đáp án cần chọn là. **C.**

**PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)**

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
<b>Câu I. (2 điểm)</b>	<p>a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử. <math>E = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017</math></p> <p>b) Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :</p> $A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$	
	<p>a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử.</p> $E = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017 = (x^4 - x) + 2017x^2 + 2017x + 2017$ $= (x^4 - x) + 2017(x^2 + x + 1)$ $= x(x^3 - 1) + 2017(x^2 + x + 1)$ $= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2017(x^2 + x + 1)$ $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2017)$	<b>1đ</b>

	<p>Cho <math>a, b, c</math> là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :</p> $A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$ <p>Đặt <math>b+c-a=x &gt; 0</math>; <math>c+a-b=y &gt; 0</math>; <math>a+b-c=z &gt; 0</math>. Ta có <math>x, y, z &gt; 0</math></p> $\frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$ <p>Từ đó suy ra <math>a = \frac{y+z}{2} + \frac{x+z}{2} + \frac{x+y}{2}</math></p> <p>Thay vào ta được <math>A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z}</math></p> $= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$ $\geq \frac{1}{2} (2+2+2) \text{ hay } A \geq 3$ <p>Từ đó suy ra <math>A \geq 3</math></p>	<b>1đ</b>
<p><b>Câu II. (3 điểm)</b></p> <p>a) Tìm nghiệm của đa thức sau. <math>f(x) = (2x^2 + x - 6)^2 + 3(2x^2 + x - 3) = 9</math></p> <p>b) Tìm hai số <math>x, y</math> thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức sau: <math>x^2 - 3xy + 2y^2 = 0</math> (1) và <math>\frac{1}{ x-2y } +  x+2y  = 4</math> (2)</p>		
<b>a</b>	<p>Đặt <math>y = 2x^2 + x - 6</math> phương trình trở thành <math>y^2 + 3(y+3) = 9</math></p> $\Leftrightarrow y(y+3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 6 = 0 \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \wedge x = -2 \\ x = 1 \wedge x = -1,5 \end{cases}$ <p>Tập nghiệm của phương trình là <math>S = \{-2; -1,5; 1; 1,5\}</math>.</p>	<b>1,5đ</b>
<b>b</b>	<p>ĐK: <math>x - 2y \neq 0</math></p> <p>Từ <math>x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-2y) = 0</math></p> $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ <p>Mà <math>x - 2y \neq 0</math> Suy ra <math>x - y = 0</math></p> <p>Xét <math>x - y = 0 \Leftrightarrow x = y</math> thay vào (2) ta được</p> $\frac{1}{ x } +  3x  = 4 \Leftrightarrow 3 x ^2 - 4 x  + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}  x  = 1 \\  x  = \frac{1}{3} \end{cases}$	<b>1,5đ</b>

	$\text{TH1: }  x =1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{cases}$ $\text{TH2: }  x =\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\pm \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=y=\frac{1}{3} \\ x=y=-\frac{1}{3} \end{cases}$	
	Vậy các số $(x; y)$ cần tìm là $(1;1); (-1;-1); \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$	

**Câu III. (2. điểm)**

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $2(x + y + 9) = 3xy$

b) Tìm số tự nhiên  $n$  để  $n+5$  và  $n+30$  là các số chính phương.

	<p>a) <math>2(x+y+9) = 3xy \Leftrightarrow 3xy - 2x - 2y - 18 = 0</math>  <math>\Leftrightarrow 9xy - 6x - 6y = 54 \Leftrightarrow 9xy - 6x - 6y + 4 = 54 + 4</math>  <math>\Leftrightarrow 3x(3y - 2) - 2(3y - 2) = 58 \Leftrightarrow (3x - 2)(3y - 2) = 58</math></p> <p>Ta biết  <math>58 = 158 = 58.1 = 2.29 = 29.2 = (-1).(-58) = (-58).(-1) = (-2).(-29) = (-29).(-2)</math></p> <p>Ta có bảng sau</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><math>3x-2</math></td> <td>1</td> <td>58</td> <td>2</td> <td>29</td> <td>-1</td> <td>-58</td> <td>-2</td> <td>-29</td> </tr> <tr> <td><math>3y-2</math></td> <td>58</td> <td>1</td> <td>29</td> <td>2</td> <td>-58</td> <td>-1</td> <td>-29</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td><math>x</math></td> <td>1</td> <td>20</td> <td><math>\frac{4}{3}</math></td> <td><math>\frac{31}{3}</math></td> <td><math>\frac{1}{3}</math></td> <td><math>-\frac{56}{3}</math></td> <td>0</td> <td>-9</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>20</td> <td>1</td> <td><math>\frac{31}{3}</math></td> <td><math>\frac{4}{3}</math></td> <td><math>-\frac{56}{3}</math></td> <td><math>\frac{1}{3}</math></td> <td>-9</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>Vậy <math>(x; y) = (1; 20); (20; 1); (0; -9); (-9; 0)</math></p>	$3x-2$	1	58	2	29	-1	-58	-2	-29	$3y-2$	58	1	29	2	-58	-1	-29	-2	$x$	1	20	$\frac{4}{3}$	$\frac{31}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{56}{3}$	0	-9	$y$	20	1	$\frac{31}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{56}{3}$	$\frac{1}{3}$	-9	0	<b>1đ</b>
$3x-2$	1	58	2	29	-1	-58	-2	-29																														
$3y-2$	58	1	29	2	-58	-1	-29	-2																														
$x$	1	20	$\frac{4}{3}$	$\frac{31}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{56}{3}$	0	-9																														
$y$	20	1	$\frac{31}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{56}{3}$	$\frac{1}{3}$	-9	0																														

	<p>b) Đặt <math>n+5 = a^2; n+30 = b^2</math> (với <math>a, b \in \mathbb{N}</math>) <math>\Rightarrow a &lt; b</math>  <math>\Rightarrow b^2 - a^2 = 25 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 25 = 1.25</math> vì <math>b-a &lt; b+a</math></p> <p>Từ đó ta có hệ: <math>\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=13 \end{cases} \Leftrightarrow n=139</math></p>	<b>1đ</b>
--	---	-----------

**Câu IV. (6 điểm)**

Cho hình vuông ABCD. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao điểm của AK và DE. Hạ DM vuông góc với CE

a) Chứng minh tứ giác ADKE là hình chữ nhật, từ đó suy ra  $AM \perp KM$ .

b) Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh  $\triangle ADM$  cân và tính số đo của góc ANB.

c) Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F. Chứng minh rằng  $CF \leq 2EF$ .

		<b>0,5đ</b>
--	--	-------------



<b>a</b>	<p>Xét tứ giác ADKE ta có:  <math>AE \parallel DK</math> (ABCD là hình vuông)  <math>AE = \frac{1}{2}AB</math>; <math>DK = \frac{1}{2}DC</math>, Mà <math>AB = CD \Rightarrow AE = DK</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> ADKE là hình bình hành ; Mà góc A vuông, nên ADKE là hình chữ nhật  Ta có O là giao điểm của 2 đường chéo AK và DE nên  <math>OA = OE = OK = OD = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}DE</math>  <math>\triangle DEM</math> vuông tại M, có OM là đường trung tuyến  Nên <math>MO = \frac{1}{2}DE \Rightarrow \triangle AMK</math> vuông tại M <math>\Rightarrow AM \perp MK</math></p>	<b>1,5đ</b>
<b>b</b>	<p>Gọi H là giao điểm của AK và DM  Tứ giác AECK có <math>AE = CK</math>, <math>AE \parallel CK \Rightarrow AECK</math> là hình bình hành  Suy ra <math>AK \parallel CE</math> hay <math>HK \parallel MC</math> mà <math>KD = KC \Rightarrow HD = HM</math>  Mà <math>DM \perp CE \Rightarrow AH \perp DM</math>  <math>\Rightarrow \triangle ADM</math> cân tại A  <math>\Rightarrow AD = AM = AB \Rightarrow \triangle AMB</math> cân tại A</p> <p>Do <math>\triangle ADM</math> cân tại A. Suy ra <math>\widehat{AMD} = \frac{180^\circ - \widehat{DAM}}{2}</math>  Do <math>\triangle AMB</math> cân tại A Suy ra <math>\widehat{AMB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAM}}{2}</math></p> <p>Suy ra <math>\widehat{AMD} + \widehat{AMB} = \frac{180^\circ - \widehat{DAM} - 180^\circ - \widehat{BAM}}{2}</math></p> $\Rightarrow \frac{360^\circ - (\widehat{DAM} + \widehat{BAM})}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{DAB}}{2} = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ$ <p>Suy ra <math>\widehat{BMD} = 135^\circ</math>  Lại có <math>\widehat{BMD}</math> là góc ngoài của tam giác vuông HMN từ đó tính được <math>\widehat{ANB} = 45^\circ</math></p>	<b>2đ</b>
<b>c</b>	Qua E vẽ đường vuông góc với CF cắt CD tại Q	

	<p>Xét hình vuông ABCD có EK là đường trung bình  <math>\hat{\angle}EK = AD = CD, EK // AD</math>  <math>\hat{\angle}EK \hat{\angle} CD \Rightarrow \widehat{EKQ} = 90^\circ</math>          Xét <math>\triangle CDF</math> và <math>\triangle EKC</math> có:  <math>\widehat{KEQ} + \widehat{FCQ}</math> (cùng phụ với góc EQC)  <math>CD = EK; \widehat{EKQ} = \widehat{CDF} = 90^\circ</math>  <math>\hat{\angle} \triangle CDF = \triangle EKC</math> (g-c-g) <math>\Rightarrow CF = EQ</math> (2 cạnh tương ứng)          Xét <math>\triangle CEQ</math> có CF là đường phân giác đồng thời là đường cao  <math>\hat{\angle} \triangle CEQ</math> cân tại C <math>\Rightarrow CF</math> cũng là đường trung trực  <math>\hat{\angle} EF = FQ</math> (tính chất đường trung trực)  <math>\hat{\angle} EF + FQ = 2EF</math>  <math>\hat{\angle} EQ \leq EF + FQ = 2EF</math>. Dấu “=” xảy ra khi E, F, Q thẳng hàng          Mà <math>EQ = FC</math> <math>FC \leq 2EF</math></p>	<b>2d</b>
<p><b>Câu IV. (1 điểm)</b>          Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức <math>C = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 15</math></p>		
	<p><math>C = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3x^2 - 18x + 27 - 12</math>  <math>= x^2(x-3)^2 + 3(x-3)^2 - 12 = (x-3)^2 \cdot (x^2 + 3) - 12</math>          Do <math>x^2 + 3 &gt; 0 \forall x; (x-3)^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow (x-3)^2(x^2 + 3) - 12 \geq -12, \forall x</math>.          Nên <math>\min C = -12 \Leftrightarrow x = 3</math>.</p>	<b>1d</b>

----- Hết -----

**Chú ý:**

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.