



Chương

Bài 2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN - BAYES



Lý thuyết

1. Công thức xác suất toàn phần



Định nghĩa:

Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ &= P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B}) \end{aligned}$$



2. Công thức Bayes



Định nghĩa: Nhận xét

Cho hai biến cố A và B với $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có:
» Cho hai biến cố A và B với

$$P(A)P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} (A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

Nên công thức Bayes còn có dạng:



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức xác suất toàn phần:

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})$$

2. Công thức Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$$

hoặc

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})}$$

✓ **Chú ý 1:** Các công thức cần nhớ

» $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

» $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$

» $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$

» $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$

✓ **Chú ý 2:** Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm **nhiều giai đoạn** có sự **liên đới nhau** trong quá trình xảy



Các dạng bài tập

Dạng 1. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.



Phương

- » **Công thức xác suất toàn phần:** Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$. Khi đó:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

■ **Chú ý:** Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

- » **Công thức Bayes:** Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$. Khi đó

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$



Ví dụ 1.1.

Cho hai biến cố A và B với $0 < P(A) < 1$.

- (1) Viết công thức xác suất toàn phần tính $P(B)$.

..... $P(A) = 0,1; P(\bar{A}) = 0,9; P(B|A) = 0,3; P(\bar{B}|A) = 0,6$ $P(B)$

Lời giải

- (1) Viết công thức xác suất toàn phần tính $P(B)$.

Ta có: $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

- (2) Với $P(A) = 0,1; P(\bar{A}) = 0,9; P(B|A) = 0,3; P(\bar{B}|A) = 0,6$. Tính $P(B)$?

Áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0,1 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,6 = 0,57$$



Ví dụ 1.2.

Cho hai biến cố A và B với $P(B) = 0,2; P(A|B) = 0,5; P(A|\bar{B}) = 0,4$ Tính

Lời giải

Ta có $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$

Áp dụng công thức Bayes:



$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = \frac{0,2.0,5}{0,2.0,5 + 0,8.0,4} = \frac{5}{21} \approx 0,238$$



Ví dụ 1.3.

Cho hai biến cố A và B , với $P(B)=0,8$, $P(A|B)=0,7$, $P(A|\bar{B})=0,45$

(1) Tính $P(A)$

(2) Tính $P(B|A)$

➤ Lời giải

(1) Tính $P(A)$.

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Công thức xác suất toàn phần

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B}) = 0,8.0,7 + 0,2.0,45 = 0,65$$

(2) Tính $P(B|A)$.

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{0,8.0,7}{0,65} = \frac{56}{65}$$

Công thức Bayes



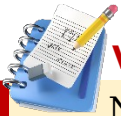
▮ Dạng 2. Các bài toán liên quan đến công thức xác suất toàn phần.



Phương

» **Công thức xác suất toàn phần:** Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$. Khi đó:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$



Ví dụ 2.1.

Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh nam nữ tại một trường phổ thông H. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong nhóm đó.

gọi A là biến cố “học sinh được chọn biết chơi ít nhất một nhạc cụ”,
và B là biến cố “học sinh được chọn là nam”.

Biết xác suất học sinh được chọn là nam bằng 0,6; xác suất học sinh được chọn là nam và biết chơi ít nhất một nhạc cụ là 0,3; xác suất học sinh được chọn là nữ và biết chơi ít nhất một nhạc cụ là 0,15. Tính $P(A)$

Lời giải

$$P(B) = 0,6 \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4; P(A|B) = 0,3; P(A|\bar{B}) = 0,15$$

Từ giả thiết ta có

Theo công thức xác suất từng phần, ta có :

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,15 = 0,24$$



Ví dụ 2.2.

Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 53%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X lần lượt là 21% và 17%. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Tính xác suất học sinh đó có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X

Lời giải

Gọi A : “Học sinh được chọn là nữ”,

$\Rightarrow \bar{A}$: “Học sinh được chọn là nam”;

B : “học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X”.

$$P(A) = 0,53 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0,53 = 0,47; P(B|A) = 0,21; P(B|\bar{A}) = 0,17$$

Từ giả thiết ta có

Theo công thức xác suất từng phần, ta có xác suất học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X là:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0,53 \cdot 0,21 + 0,47 \cdot 0,17 = 0,1912$$



▮ Dạng 3. Các bài toán liên quan đến công thức Bayes.



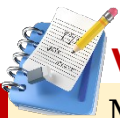
Phương

» **Công thức Bayes:** Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$. Khi đó

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

Chú ý: Với $P(A) > 0$ cũng được gọi là công thức Bayes



Ví dụ 3.1.

Một hộp có 4 viên bi, mỗi viên có thể là màu đen hoặc trắng. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 bi trắng.

🔑 Lời giải

* Số lượng bi trắng và đen trong hộp chỉ có thể xảy ra 5 trường hợp sau:

$$H_4 : 4 \text{ bi trắng} \Rightarrow P(H_4) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$H_3 : 3 \text{ bi trắng, 1 đen} \Rightarrow P(H_3) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$H_2 : 2 \text{ bi trắng, 2 đen} \Rightarrow P(H_2) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$H_1 : 1 \text{ bi trắng, 3 đen} \Rightarrow P(H_1) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$H_0 : 0 \text{ bi trắng, 4 đen} \Rightarrow P(H_0) = \frac{1}{5} = 0.2$$

Gọi biến cố A là biến cố lấy được 2 bi trắng.

$$P(A|H_4) = 1, P(A|H_3) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}, P(A|H_2) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, P(A|H_1) = 0, P(A|H_0) = 0$$

$$P(A) = P(H_0).P(A|H_0) + P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) + P(H_3).P(A|H_3) + P(H_4).P(A|H_4)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0.2 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times \frac{1}{6} + 0.2 \times \frac{1}{2} + 0.2 \times 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$



Ví dụ 3.2.

Một căn bệnh có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A : “người đó mắc bệnh”

Và B : “kết quả kiểm tra người đó là dương tính (bị bệnh)”

Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra: $P(A) = 1\% = 0,01$

Do đó xác suất để người đó không mắc bệnh khi chưa kiểm tra:
 $P(\bar{A}) = 1 - 0,01 = 0,99$

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $P(B|A) = 99\% = 0,99$

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là:
 $P(B|\bar{A}) = 1 - 0,99 = 0,01$

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})} = \frac{0,01.0,99}{0,01.0,99 + 0,99.0,01} = 0,5$$

Xác suất kết để người đó mắc bệnh nếu kết quả kiểm tra người đó là dương tính là 0,5



Ví dụ 3.3.

Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh X nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%.

- (1) Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?
- (2) Tính xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi.

Lời giải

(1) Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?

Gọi A : “người nghiện thuốc lá”,

$\Rightarrow \bar{A}$: “người không nghiện thuốc lá”

và B : “người bị bệnh phổi”

Để người mà ta gặp bị bệnh phổi thì người đó nghiện thuốc lá hoặc không nghiện thuốc lá

Ta cần tính $P(B)$

Với $P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$

Ta có

$P(A) = 0,2 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,8$



$$P(B|A) = 0,7$$

$$P(B|\bar{A}) = 0,15$$

Vậy
$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) = 0,2.0,7 + 0,8.0,15 = 0,26$$

Do đó, tỉ lệ người mắc bệnh phổi của tỉnh X là 26%

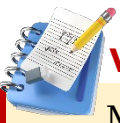
(2) Tính xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi.

xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,2.0,7}{0,26} = \frac{7}{13}$$

Theo công thức Bayes, ta có

Như vậy trong số người bị bệnh phổi của tỉnh X, có khoảng $\frac{7}{13}$ số người nghiện thuốc lá.



Ví dụ 3.4.

Một trạm chỉ phát hai tín hiệu A và B với xác suất tương ứng 0,85 và 0,15.

do có nhiễu trên đường truyền nên $\frac{1}{7}$ tín hiệu A bị méo và thu được như tín

hiệu B còn $\frac{1}{8}$ tín hiệu B bị méo cả thu được như A .

(1) Xác suất thu được tín hiệu A là bao nhiêu?

Lời giải

(1) Xác suất thu được tín hiệu A là bao nhiêu?

Gọi A là biến cố "Phát tín hiệu A "

B là biến cố "Phát tín hiệu A "

T_A là biến cố "Phát được tín hiệu A "

T_B là biến cố "Phát được tín hiệu B "

Ta cần tính $P(T_A)$

Với
$$P(T_A) = P(A).P(T_A|A) + P(B).P(T_A|B)$$

Ta có

$$P(A) = 0,85$$

$$P(T_B|A) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(T_A|A) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$P(B) = 0,15$$

$$P(T_A|B) = \frac{1}{8}$$

Do đó
$$P(T_A) = P(A).P(T_A|A) + P(B).P(T_A|B) = 0,85 \cdot \frac{6}{7} + 0,15 \cdot \frac{1}{8} = \frac{837}{1120}$$

(2) Giả sử đã thu được tín hiệu A . Tìm xác suất thu được đúng tín hiệu lúc phát.



$$P(A|T_A) = \frac{P(A).P(T_A|A)}{P(T_A)} = \frac{0,85 \cdot \frac{6}{7}}{\frac{837}{1120}} = \frac{272}{279}$$

Theo công thức Bayes, ta có

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>