Từ bảng biến thiên, ta thấy rằng $t = f(x) \in [-2\sqrt{3}; +\infty)$. 1

Ta cũng có

$t^2 = 1 + x + x^2 + 9(1-x) - 6\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)} = 10 - 8x + x^2 - 6\sqrt{1-x^3}$.

Do đó: $(x-4)^2 = m\left(\sqrt{1+x+x^2} - 3\sqrt{1-x} + 4\right) + 6\sqrt{1-x^3} + 13$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 3 - 6\sqrt{1-x^3} = m\left(\sqrt{1+x+x^2} - 3\sqrt{1-x} + 4\right)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 7 = m(t+4) \Leftrightarrow m = \frac{t^2-7}{t+4}$$ 0,5

Xét hàm số $g(t) = \frac{t^2-7}{t+4}$ với $t \geq -2\sqrt{3}$ thì $g'(t) = \frac{(t+1)(t+7)}{(t+4)^2}$ nên

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -7 \end{array}\right.$

Do $t \geq -2\sqrt{3}$ nên $t = -1$. Khảo sát $g(t)$ trên $\left[-2\sqrt{3}; +\infty\right]$, ta thấy $g(t) \geq g(-1) = -2$

t	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$g'(t)$			$-$	0	$+$	
$g(t)$		$5 + \frac{5\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình ban đầu có 4 nghiệm thực phân biệt thì phương trình $g(t) = m$ phải có 2 nghiệm t và ứng với mỗi nghiệm t, ta tìm được 2 nghiệm x. Lại dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$, ta thấy: $t = f(x)$ có 4 nghiệm thực thì $-2\sqrt{3} < t \leq \sqrt{3}$. 0,5

Vì $g(\sqrt{3}) = \frac{4}{13}\left(\sqrt{3} - 4\right)$ nên điều kiện cần tìm của m là $-2 < m \leq \frac{4}{13}\left(\sqrt{3} - 4\right)$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $-2 < m \leq \frac{4}{13}\left(\sqrt{3} - 4\right)$. 0,5