

Từ bảng biến thiên, ta thấy rằng  $t = f(x) \in [-2\sqrt{3}; +\infty)$ .

Ta cũng có

$$t^2 = 1 + x + x^2 + 9(1 - x) - 6\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)} = 10 - 8x + x^2 - 6\sqrt{1-x^3}.$$

$$\text{Do đó: } (x-4)^2 = m\left(\sqrt{1+x+x^2} - 3\sqrt{1-x} + 4\right) + 6\sqrt{1-x^3} + 13$$

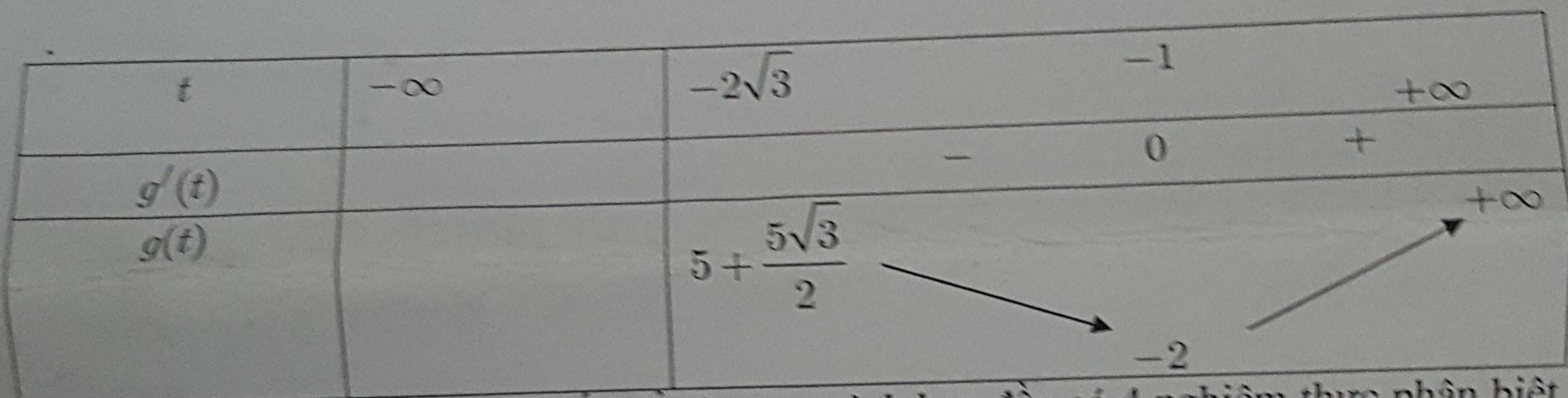
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 3 - 6\sqrt{1-x^3} = m\left(\sqrt{1+x+x^2} - 3\sqrt{1-x} + 4\right)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 7 = m(t+4) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 7}{t+4}$$

Xét hàm số  $g(t) = \frac{t^2 - 7}{t+4}$  với  $t \geq -2\sqrt{3}$  thì  $g'(t) = \frac{(t+1)(t+7)}{(t+4)^2}$  nên

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -7 \end{cases}$$

Do  $t \geq -2\sqrt{3}$  nên  $t = -1$ . Khảo sát  $g(t)$  trên  $[-2\sqrt{3}; +\infty)$ , ta thấy  $g(t) \geq g(-1) = -2$



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đề phương trình ban đầu có 4 nghiệm thực phân biệt thì phương trình  $g(t) = m$  phải có 2 nghiệm  $t$  và ứng với mỗi nghiệm  $t$ , ta tìm được 2 nghiệm  $x$ . Lại dựa vào bảng biến thiên của  $f(x)$ , ta thấy:  $t = f(x)$  có 4 nghiệm thực thì

$$-2\sqrt{3} < t \leq \sqrt{3}.$$

Vì  $g(\sqrt{3}) = \frac{4}{13}(\sqrt{3} - 4)$  nên điều kiện cần tìm của  $m$  là  $-2 < m \leq \frac{4}{13}(\sqrt{3} - 4)$ .

Vậy giá trị cần tìm của  $m$  là  $-2 < m \leq \frac{4}{13}(\sqrt{3} - 4)$ .