Môc lôc

A PHÇN Më ®Çu

I. Lý do chän ®Ò tµi:

Trong ch¬ng tr×nh to¸n THPT cùc trÞ lµ phÇn hÊp dÉn, l«i cuèn tÊt c¶ nh÷ng ngêi häc to¸n vµ lµm to¸n. C¸c bµi to¸n nµy rÊt phong phó vµ ®a d¹ng .

V× vËy, c¸c bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè thêng xuyªn cã mÆt trong c¸c k× thi tèt nghiÖp THPT còng nh trong c¸c k× thi häc chän sinh giái quèc gia, quèc tÕ vµ c¸c ®Ò thi vµo c¸c trêng C§, §H .

§Ó gi¶i quyÕt nã ®ßi hái ngêi häc to¸n vµ lµm to¸n ph¶i linh ho¹t vµ vËn dông mét c¸ch hîp lý trong tõng bµi to¸n. TÊt nhiªn ®øng tríc mét bµi to¸n cùc trÞ th× mçi ngêi ®Òu cã mét híng xuÊt ph¸t riªng cña m×nh. Nãi nh vËy cã nghÜa lµ cã rÊt nhiÒu ph¬ng ph¸p ®Ó ®i ®Õn kÕt qu¶ cuèi cïng cña bµi to¸n cùc trÞ. §iÒu quan träng lµ ta ph¶i lùa chän ph¬ng ph¸p nµo cho lêi gi¶i tèi u cña bµi to¸n. ThËt lµ khã nhng còng thó vÞ nÕu ta t×m ®îc ®êng lèi ®óng ®¾n ®Ó gi¶i quyÕt nã .

D¹y häc sinh häc to¸n kh«ng chØ cung cÊp nh÷ng kiÕn thøc c¬ b¶n, nh÷ng d¹ng bµi tËp vËn dông trong s¸ch gi¸o khoa, s¸ch tham kh¶o mµ ®iÒu quan träng lµ h×nh thµnh c¸ch t duy trong suy luËn to¸n häc cña mçi häc sinh th«ng qua c¸c ph¬ng ph¸p gi¶i to¸n, tõ ®ã gióp c¸c em cã n¨ng lùc t duy logic, ®éc lËp s¸ng t¹o ®Ó hoµn thiÖn kü n¨ng, kü x¶o trong häc tËp vµ ph¸t triÓn nh©n c¸ch cña häc sinh.

V× vËy, ®Ó gióp c¸c em tù tin h¬n trong viÖc häc to¸n, t«i x©y dùng ®Ò tµi **: “Mét sè ph¬ng ph¸p gi¶i bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè**”.

Tõ ®ã gióp nh÷ng ngêi häc to¸n vµ lµm to¸n cã thªm c«ng cô ®Ó gi¶i quyÕt c¸c bµi to¸n cùc trÞ .

II. Môc ®Ých s¸ng kiÕn kinh nghiÖm

-Gióp cho häc sinh cã c¸i nh×n kh¸i qu¸t vÒ c¸c ph¬ng ph¸p t×m cùc trÞ cña hµm sè, tõ ®ã h×nh thµnh nªn c¸c ph¬ng ph¸p gi¶i to¸n.

-Gãp phÇn ®æi míi ph¬ng ph¸p gi¶ng d¹y bé m«n theo h-íng ph¸t huy tÝnh tÝch cùc, tù gi¸c, s¸ng t¹o cña häc sinh. Gãp phÇn n©ng cao chÊt lîng ®éi ngò häc sinh kh¸, giái vÒ bé m«n To¸n ë trêng THPT.

-Gãp phÇn h×nh thµnh lßng say mª, sù hµo høng häc tËp m«n To¸n, tõ ®ã h×nh thµnh vµ ph¸t triÓn n¨ng lùc tù häc, tù båi dìng kiÕn thøc cho häc sinh.

- Ngoµi ra, ®Ò tµi cßn cã thÓ lµ mét tµi liÖu tham kh¶o bæ Ých cho c¸c b¹n ®ång nghiÖp trong viÖc båi dìng HSG, luyÖn thi §H, C§.

III. NhiÖm vô nghiªn cøu

§Ó ®¹t tèt kÕt qu¶ cña ®Ò tµi, ngêi nghiªn cøu ph¶i lµm ®îc nh÷ng yªu cÇu sau:

- Ph¶i n¾m thËt v÷ng nh÷ng vÞ trÝ, môc tiªu, ®Æc ®iÓm vµ hÖ thèng ch¬ng tr×nh to¸n häc ë bËc THPT.
- Cã c¸i nh×n kh¸i qu¸t vÒ lý thuyÕt cña bµi to¸n cùc trÞ cña hµm nhiÒu biÕn ë bËc ®¹i häc ¸p dông vµo to¸n häc THPT díi gãc nh×n to¸n häc s¬ cÊp. Tõ ®ã gãp phÇn gióp gi¸o viªn THPT hiÓu ®îc b¶n chÊt cña vÊn ®Ò, ®Ó ¸p dông vµo tõng ®èi tîng häc sinh mét c¸ch cã hiÖu qu¶ nhÊt.

- N©ng cao dÇn tr×nh ®é häc to¸n vµ lµm to¸n cña häc sinh THPT ®¸p øng ®îc nhu cÇu cña x· héi trong thêi kú CNH, H§H ®Êt níc.

IV. §èi tîng vµ ph¹m vi nghiªn cøu

- §èi tîng "***Mét sè ph¬ng ph¸p gi¶i bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè***" ë trêng THPT.
- Ph¹m vi nghiªn cøu lµ häc sinh khèi líp 10 trêng THPT Yªn L·ng

S¸ng kiÕn kinh nghiÖm gåm 2 ch¬ng

Ch¬ng 1: Gi¶i bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè b»ng miÒn gi¸ trÞ.

Ch¬ng 2: Gi¶i bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè b»ng ph¬ng ph¸p h×nh häc.

Trong c¸c ch¬ng th× sau phÇn tr×nh bµy lý thuyÕt lµ mét sè bµi tËp ®a ra nh»m minh häa cho lý thuyÕt ®· ®a ra ë trªn .

V. **Ph¬ng ph¸p nghiªn cøu.**

- Nghiªn cøu c¬ së lý luËn vµ thùc tiÔn d¹y häc "***Mét sè ph¬ng ph¸p gi¶i bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè***" trong ch¬ng tr×nh to¸n häc THPT.

- Nghiªn cøu nh÷ng khã kh¨n cña häc sinh trong viÖc gi¶i bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè, tõ ®ã t×m ra híng gi¶i quyÕt.

§Ò tµi ®îc tiÕn hµnh nghiªn cøu, thùc nghiÖm ë c¸c líp 10 trêng THPT Yªn L·ng. §Æc biÖt ë c¸c líp chän, líp chuyªn ®Ò. §Ò tµi cßn lµ mét tµi liÖu rÊt tèt cho c¸c b¹n häc sinh khèi 12 chuÈn bÞ thi vµo §H, C§ vµ luyÖn thi häc sinh giái .

B. NéI DUNG

Ch¬ng 1: Gi¶i bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè b»ng miÒn gi¸ trÞ

1.1 **Ph¬ng ph¸p chung**

Muèn t×m gi¸ trÞ lín nhÊt, gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm sè $y = f(x)$ trªn miÒn D ta lµm nh sau :

Gäi y_0 lµ mét gi¸ trÞ tuú cña hµm sè trªn D ®iÒu ®ã cã nghÜa lµ hÖ sau ®©y cã nghiÖm $\begin{cases} f(x) = y_0 & (1.1) \\ x \in D & (1.2) \end{cases}$

Tuú tõng d¹ng bµi cña hÖ $(1.1),(1.2)$ mµ ta cã ®iÒu kiÖn cã nghiÖm thÝch hîp. Trong nhiÒu trêng hîp ®iÒu kiÖn Êy (*sau khi biÕn ®æi vµ rót gän sÏ ®a vÒ d¹ng*)

$\alpha \le y_0 \le \beta$ (1.3)

V× y_0 lµ mét gi¸ trÞ bÊt k× cña f(x), nªn tõ (1.3) thu ®îc

$$\min_{x \in D} f(x) = \alpha \text{ vµ } \max_{x \in D} f(x) = \beta$$

Nh vËy ®Ó t×m gi¸ trÞ lín nhÊt, nhá nhÊt cña hµm sè nÕu dïng ph¬ng ph¸p nµy, ta quy vÒ viÖc t×m ®iÒu kiÖn ®Ó mét ph¬ng tr×nh (*thªm ®iÒu kiÖn phô*) cã nghiÖm .

1.2. KÕt qu¶ ®iÒu tra kh¶o s¸t thùc tiÔn vµ gi¶i ph¸p

§Ó thùc hiÖn ®Ò tµi nµy t«i cho c¸c líp trªn lµm mét sè bµi to¸n vÒ gi¸ trÞ lín nhÊt, gi¸ trÞ nhá nhÊt nh sau:

Bµi tËp 1.1: T×m gi¸ trÞ lín nhÊt, nhá nhÊt cña hµm sè

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}, \; x Î ¡$$

Lêi gi¶i ®óng:

Gäi y_0 lµ gi¸ trÞ tuú ý cña hµm sè. Khi ®ã ph¬ng tr×nh sau cã nghiÖm

$$\frac{2x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}=y_0$$

(1.4)

Do $3x^2+2x+1>0, \forall x\in \mathbb{R}$ nªn tõ (1.4)

$\Leftrightarrow 2x^2+10x+3=3x^2y_0+2xy_0+y_0$

$$\Leftrightarrow (3y_0-2)x^2+2x(y_0-5)+y_0-3=0$$

(1.5)

* $3y_0-2=0\Leftrightarrow y_0=\frac{2}{3}$ th× $y_0-5\neq 0$ vËy (1.5) hiÓn nhiªn cã nghiÖm tøc lµ f(x) nhËn gi¸ trÞ $\frac{2}{3}$ víi mäi gi¸ trÞ $x\in \mathbb{R}$

* $3y_0-2\neq 0\Leftrightarrow y_0\neq\frac{2}{3}$ th× (1.5) lµ ph¬ng tr×nh bËc hai ®èi víi x. Do ®ã

(1.5) cã nghiÖm khi vµ chØ khi $\Delta'=-2y_0^2+19y_0-35\geq 0\Leftrightarrow \frac{5}{2}\leq y_0\leq 7$

.

KÕt hîp c¶ hai trêng hîp ta ®îc $\left\{\begin{array}{l}\frac{5}{2}\leq y_0\leq 7\\ y_0=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

(1.6) Tõ (1.6) ta suy ra $\max_{x\in \mathbb{R}} f(x)=7, \min_{x\in \mathbb{R}} f(x)=\frac{2}{3}$

Líp 10A1 cã 18/45 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng, 15 häc sinh cã lêi gi¶i sai vµ 12 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i.

Líp 10A2cã 15/45 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng, 24 häc sinh cã lêi gi¶i sai vµ 11 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i.

Líp 10A4 cã 10/46 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng, 26 häc sinh cã lêi gi¶i sai vµ 10 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i.

Bµi to¸n 1 lµ bµi to¸n t×m gi¸ trÞ lín nhÊt, gi¸ trÞ nhá nhÊt hµm sè ë møc ®é trung b×nh kh¸ vµ chØ mét sè häc sinh cã lêi gi¶i ®óng. Nh÷ng häc sinh cã lêi gi¶i sai lµ do tÝnh nhÇm vµ mét sè kh«ng ®Þnh híng ®ù¬c c¸ch gi¶i.

<u>§Ó kh¾c phôc nh÷ng sai lÇm trªn ta lµm nh sau :</u>

Bíc 1: Nªu ph¬ng ph¸p chung ®Ó lµm bµi to¸n cùc trÞ cña hµm ph©n thøc.

Bíc 2: Cung cÊp cho häc sinh c¸ch gi¶i vµ biÖn luËn ph¬ng tr×nh bËc 2

Bíc 3: Cung cÊp cho häc sinh c¸ch gi¶i bÊt ph¬ng tr×nh bËc 2.

Bíc 4: Cung cÊp cho häc sinh c¸ch gi¶i bµi to¸n so s¸nh nghiÖm .

Bíc 5: Ph©n tÝch nh÷ng sai lÇm gÆp ph¶i khi gÆp mçi d¹ng to¸n.

Sau khi ®a ra c¸c nhËn xÐt trªn vµ cho häc sinh lµm bµi t©p 1.2 ta thu ®îc kÕt qu¶ ë c¸c líp nh sau:

<u>Bµi tËp 1.2</u> T×m gi¸ trÞ lín nhÊt, nhá nhÊt cña hµm sè

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2} \quad \text{víi } x \in \mathbb{R}$$

<u>Bµi gi¶i</u>

LÊy y_0 thuéc miÒn gi¸ trÞ cña hµm sè khi ®ã $\exists x \in \mathbb{R}$ ®Ó sao cho ph¬ng tr×nh $y_0 = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ cã nghiÖm $\Leftrightarrow$

$(y_0 - 1)x^2 + 2(y_0 + 1)x + 2(y_0 - 1) = 0$ cã nghiÖm

TH1: $y_0 = 1 \rightarrow x = 0$

TH2: $\begin{cases} y_0 \neq 1 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \neq 1 \\ (y_0 + 1)^2 - 2(y_0 - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \neq 1 \\ -y_0^2 + 6y_0 - 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \neq 1 \\ 3-2\sqrt{2} \leq y_0 \leq 3+2\sqrt{2} \end{cases}$$

VËy $3-2\sqrt{2} \leq y_0 \leq 3+2\sqrt{2}$.Tõ ®ã suy ra

max Y $=3+2\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{y_0+1}{y_0-1}=-\sqrt{2}$; minY=3-2$\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{y_0+1}{y_0-1}=\sqrt{2}$.

KÕt qu¶ thu ®îc ë c¸c líp nh sau:

Häc sinh cßn lóng tóng khi coi y lµ h»ng sè x lµ biÕn sè. Thø hai, khi nh©n 2 vÕ ®a vÒ ph¬ng tr×nh bËc 2. T×m ®iÒu kiÖn cã nghiÖm cña ph¬ng tr×nh häc sinh ë líp 10A2, 10A4 cßn lóng tóng.

TÊt c¶ c¸c lêi gi¶i sai ®Òu m¾c ph¶i mét trong c¸c nhËn xÐt trªn. Ngoµi ra häc sinh cßn kh«ng chØ ra max, min ®¹t t¹i ®©u. C¸c häc sinh kh«ng cã lêi lµ do kh«ng biÕt c¸ch biÖn luËn ph¬ng tr×nh bËc 2.

Líp 10A1 cã 35 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng, 10 häc sinh cã lêi gi¶i sai. (77,8%-22,2%)

Líp 10A2 cã 28 häc sinh cã lêi gi¶i ®óng(62.2%); 12 lêi gi¶i sai (26,7%) vµ 5 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i. (11,1%)

Líp 10A4 cã 25 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng(54,3%), 14 häc sinh cã lêi gi¶i sai (30,4%) vµ 7 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i(15,3%).

Bµi to¸n 2 lµ mét bµi to¸n t¬ng tù bµi to¸n 1, sau khi ®îc híng dÉn ph¬ng ph¸p t×m cùc trÞ ®· cã nhiÒu häc sinh lµm ®îc, bªn c¹nh ®ã cßn nhiÒu häc sinh lµm sai vµ kh«ng biÕt lµm.

<u>*NhËn xÐt*</u>: Ph¬ng ph¸p miÒn gi¸ trÞ cã thÓ ¸p dông ®Ó t×m Y_{max}, Y_{min} c¸c ph©n thøc cã d¹ng $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ víi $b_2^2-4a_2c_2<0$

Tõ nh÷ng ph©n tÝch trªn cho häc sinh lµm mét sè bµi tËp ¸p dông nh sau:

Bµi tËp 1.3: T×m gi¸ trÞ lín nhÊt, nhá nhÊt cña hµm sè

$$f(x)=\frac{3+4x^2+3x^4}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Bµi gi¶i

Gäi y_0 lµ gi¸ trÞ tuú ý cña hµm sè f(x). Khi ®ã ph¬ng tr×nh sau cã nghiÖm

Èn x $$\frac{3+4x^2+3x^4}{\left(1+x^2\right)^2}=y_0$$

(1.7)

(1.7) $\Leftrightarrow (y_0-3)x^4+2(y_0-2)x^2+y_0-3=0$

(1.8)

* NÕu y_0 = 3 khi ®ã ph¬ng tr×nh (1.8) trë thµnh $x^2=0$ vËy (1.8) cã nghiÖm

x = 0.

* NÕu $y_0\neq 3$ khi ®ã ph¬ng tr×nh (1.8) cã nghiÖm $\Leftrightarrow$ hÖ sau cã nghiÖm

$$\begin{cases}(y_0-3)t^2+2(y_0-2)t+y_0-3=0 & (1.9)\\ t\geq 0 & (1.10)\end{cases}$$

Ta cã $\Delta'=(y_0-2)^2-(y_0-3)^2=2y_0-5$. $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow y_0\geq\frac{5}{2}$. Khi ®ã theo ®Þnh lý Viet ta cã $P=\frac{y_0-3}{y_0-3}=1>0$. VËy c¸c nghiÖm cña (1.9) cïng dÊu, tõ ®ã ®Ó hÖ (1.9), (1.10) cã nghiÖm th× ®iÒu kiÖn lµ :

$$\begin{cases}\Delta' \ge 0\\ \frac{S}{2}=\frac{2-y_0}{y_0-3}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \ge \frac{5}{2}\\ 2\le y_0<3\end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2}\le y_0<3.$$

KÕt hîp c¶ hai trêng hîp, ph¬ng tr×nh (1.8) cã nghiÖm $\Leftrightarrow \frac{5}{2}\le y_0 \le 3$

Nh vËy ta ®îc $\max_i f(x)=3,\ \min_i f(x)=\frac{5}{2}$

NhËn xÐt: Khi cho häc sinh lµm bµi tËp trªn ta cÇn lu ý nh sau:

Hµm ph©n thøc trªn cã d¹ng trïng ph¬ng bËc 4 nªn nghiÖm cña ph¬ng tr×nh ®iÒu kiÖn ph¶i d¬ng.

<u>Bµi 1.4</u> (ta *më réng cña bµi 1.3*) T×m gi¸ trÞ lín nhÊt, nhá nhÊt cña hµm sè $y=\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$ trªn ®o¹n [0,2] .

<u>*NhËn xÐt:*</u> Bµi tËp tËp nµy cã d¹ng miÒn x¸c ®Þnh D = [0,2].

<u>Bµi gi¶i</u>

LÊy y_0 thuéc miÒn gi¸ trÞ cña hµm sè khi ®ã $\exists x\in D$ ®Ó sao cho ph¬ng tr×nh

$$y_0=\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$$ cã nghiÖm

$$\Leftrightarrow (y_0-1)x^2+2(y_0+1)x+2(y_0-1)=0 \quad (1.11)$$

cã nghiÖm trong ®o¹n [0,2] .Bµi to¸n quay trë vÒ t×m tham sè y_0 ®Ó pt (1.11) cã nghiÖm trong ®o¹n [0,2]. Ta cã c¸c trêng hîp sau:

$$f(x)=(y_0-1)x^2+2(y_0+1)x+2(y_0-1)$$

TH1: a = 0 hay y_0 = 1 khi ®ã x=0 $\in[0,2] \rightarrow$ y_0=1 tho¶ m·n.

TH2: $a \neq 0$

TH2.1: $f(0)=2(y_0-1)$, $f(2)=10y_0-2$

$$f(0)f(2) \le 0 \Leftrightarrow 2(y_0-1)(10y_0-2) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le y_0 \le 1$$

TH2.2: $$0 < x_1 \le x_2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ (y_0-1)f(0) > 0 \\ (y_0-1)f(2) > 0 \\ 0 < \frac{s}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y_0^2+6y_0-1 \ge 0 \\ 2(y_0-1)^2 > 0 \\ (y_0-1)(10y_0-2) > 0 \\ 0 < -\frac{y_0+1}{y_0-1} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2\sqrt{2} \le y_0 \le 3+2\sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} y_0 < \frac{1}{5} \\ y_0 > 1 \end{array}\right. \\ -1 < y_0 < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 3-2\sqrt{2} \le y_0 < \frac{1}{5}$$

VËy miÒn gi¸ trÞ cña hµm sè lµ $3-2\sqrt{2} \le y_0 \le 1$

$Y_{max}=1$ ®¹t ®îc khi x = 0 , $Y_{min} = 3-2\sqrt{2}$ ®¹t ®îc khi $x=\sqrt{2}$

<u>Bµi tËp 1.5</u> : Cho hµm sè $f(x) = \frac{x^2+px+q}{x^2+1}$.

T×m p, q ®Ó $\max f(x) = 9, \min f(x) = -1$.

<u>Bµi gi¶i</u>

Gäi y_0 lµ gi¸ trÞ tuú ý cña hµm sè, khi ®ã ph¬ng tr×nh

$$\frac{x^2+px+q}{x^2+1} = y_0$$

(1.12)

cã nghiÖm Èn x .

Ph¬ng tr×nh (1.12) $\Leftrightarrow (y_0 - 1)x^2 - px + y_0 - q = 0$

(1.13)

* NÕu y_0 = 1 th× (1.13) cã nghiÖm khi $p \neq 0$ hoÆc p = 0 vµ q = 1

* NÕu $y_0 \neq 0$ th× ph¬ng tr×nh (1.13) cã nghiÖm khi $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4y_0^2 - 4(q+1)y_0 - (p^2 - 4q) \leq 0.$$

(1.14)

XÐt ph¬ng tr×nh $4t^2 - 4(q+1)t - (p^2 - 4q) = 0$

(1.15)

Gäi t_1, t_2 lµ nghiÖm cña ph¬ng tr×nh (1.15) th× nghiÖm cña bÊt ph¬ng tr×nh

(1.14) theo Èn y_0 lµ $t_1 \leq y_0 \leq t_2$.

KÕt hîp c¶ hai trêng hîp th× ta thÊy ph¬ng tr×nh (1.13) cã nghiÖm khi

$t_1 \leq y_0 \leq t_2$ trong ®ã t_1, t_2 lµ hai nghiÖm cña ph¬ng tr×nh (1.15).

Tõ ®ã $\max f(x) = t_2, \min f(x) = t_1$. Nh vËy bµi to¸n trë thµnh: T×m p ,q ®Ó ph¬ng tr×nh (1.15) cã hai nghiÖm 9 vµ -1. Theo ®Þnh lý Viet ®iÒu ®ã x¶y ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{4(q+1)}{4} = 8 \\ \dfrac{4q - p^2}{4} = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 7 \\ p = \pm 8 \end{cases}.$$

VËy hai cÆp gi¸ trÞ cÇn t×m lµ $\begin{cases} p = 8 \\ q = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} p = -8 \\ q = 7 \end{cases}$.

Bµi tËp 1.6 : T×m gi¸ trÞ lín nhÊt, nhá nhÊt cña hµm sè

$f(x,y)=x^2+y^2$ trªn miÒn $D=\left\{(x,y):(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2-x^2-y^2=0\right\}$

Bµi gi¶i

Gäi t_0 lµ mét gi¸ trÞ bÊt k× cña hµm sè f (x,y) trªn miÒn D. §iÒu ®ã chøng tá hÖ ph¬ng tr×nh sau ®©y (*Èn x,y*) cã nghiÖm

$$\begin{cases} x^2+y^2=t_0 \\ (x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2-x^2-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=t_0 \\ (x^2+y^2)^2-3(x^2+y^2)+1+4x^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=t_0 & (1.16) \\ t_0^2-3t_0+1+4x^2=0 & (1.17) \end{cases}$$

§Ó (1.17) cã nghiÖm Èn x th× ta ph¶i cã ®iÒu kiÖn lµ $t_0^2-3t_0+1\le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\le t_0\le\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

(1.18)

Víi ®iÒu kiÖn (1.18) gäi x_0 lµ nghiÖm cña (1.17) suy ra $x_0^2=-\dfrac{t_0^2-3t_0+1}{4}$ thay vµo (1.16) ta ®îc $4y^2=t_0^2+t_0+1$

(1.19)

Do $t_0^2+t_0+1>0$ víi $\forall t_0$ nªn hiÓn nhiªn víi ®iÒu kiÖn (1.18) th× (1.19) cã nghiÖm, nghÜa lµ (1.18) lµ ®iÒu kiÖn ®Ó hÖ (1.16), (1.17) cã nghiÖm. Nh vËy

$$\max_D f(x,y)=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad \min_D f(x,y)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Bµi tËp t¬ng tù dµnh cho häc sinh vÒ tù lµm (*cã híng dÉn*)

Bµi 1.7 T×m gi¸ trÞ lín nhÊt,nhá nhÊt cña hµm sè $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

Híng dÉn : Lµm t¬ng tù bµi 1.3(§s : $\dfrac{1}{3}\le y_0\le 1 \Rightarrow \max f(x)=1, \min f(x)=\dfrac{1}{3}$)

Bµi 1.8 T×m gi¸ trÞ lín nhÊt, nhá nhÊt cña hµm sè $y=\dfrac{3\sqrt{x+3}+4\sqrt{1-x}+1}{4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1}$

Híng dÉn:

Do $\left(\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=4$ nªn ta ®Æt $\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \sqrt{1-x}=2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$ víi $0\le t\le 1$

Khi ®ã ta cã $y=\dfrac{-7t^2+12t+9}{-5t^2+16t+7}$,víi $0\le t\le 1$

(§/s :$y_{max}=\dfrac{9}{7}$ khi t=0 $\Leftrightarrow$ x=-3 ; $y_{min}=\dfrac{7}{9}$ khi t=1 $\Leftrightarrow$ x=1)

Bµi 1.9 :T×m gi¸ trÞ lín nhÊt,nhá nhÊt cña hµm sè A= $\dfrac{x^2-xy+2y^2}{x^2+xy+y^2}$

H·ng dÉn: §¨t t=$\dfrac{x}{y}$ khi ®ã $A=\dfrac{t^2-t+2}{t^2+t+1}$.(§/s:$A_{max}=\dfrac{7+2\sqrt{7}}{3}$,$A_{min}=\dfrac{7-2\sqrt{7}}{3}$)

Bµi 1.10 : T×m gi¸ trÞ lín nhÊt cña hµm sè $f(x,y)=|x-y|$

XÐt trªn miÒn $D=\left\{(x,y): x^2+4y^2=1\right\}$

Híng dÉn : Ta cøng gi¶ sö t_0 lµ gi¸ trÞ tuú ý cña hµm sè f(x,y). §iÒu ®ã cã nghÜa lµ hÖ sau ®©y (Èn x, Èn y) cã nghiÖm

$$\begin{cases}|x-y|=t_0\\ x^2+4y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=t_0\\ x^2+4y^2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-t_0\\ x^2+4y^2=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Tõ ®©y ta t×m miÒn gi¸ trÞ t_0 cña tõng hÖ nh vËy bµi to¸n quay vÒ d¹ng bµi 1.6 vµ ta ¸p dông nguyªn lý ph©n r· ®Ó t×m t×m gi¸ trÞ lín nhÊt cña hµm sè .

Ch¬ng 2 : Gi¶i bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè b»ng ph¬ng ph¸p h×nh häc

2.1 C¬ së lý thuyÕt

BÊt ®¼ng thøc tam gi¸c

1.Víi 3 ®iÓm A, B , C bÊt k× ta lu«n cã :

+ $AB + BC \geq AC$

(DÊu ®¼ng thøc x¶y ra $\Leftrightarrow$ B n»m trong ®o¹n AC).

+ $|AB - AC| \leq BC$

(DÊu ®¼ng thøc x¶y ra $\Leftrightarrow$ C n»m ngoµi ®o¹n AB).

C¸ch ¸p dông :

+ §a hµm sè ®· cho vÒ d¹ng : $f(x,y) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$

(a, b lµ c¸c h¨ng sè)

+Sau ®ã ®Þnh hÖ trôc to¹ ®é, chän 3 ®iÓm A , B , C cã to¹ ®é x¸c ®Þnh vµ cuèi cïng sö dông hai bÊt ®¼ng thøc trªn ®Ó t×m gi¸ trÞ lín nhÊt, nhá nhÊt cña hµm sè .

2. $\forall \Delta ABC : AB + BC > AC > AB - BC$.

2.2 KÕt qu¶ ®iÒu tra kh¶o s¸t thùc tiÔn vµ gi¶i ph¸p

§Ó thùc hiÖn ®Ò tµi nµy t«i cho c¸c líp trªn lµm mét sè bµi to¸n vÒ cùc trÞ vµ ®îc kÕt qu¶ nh sau:

Bµi 2.1. T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm sè

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} \quad "x Î ¡$$

Bµi gi¶i

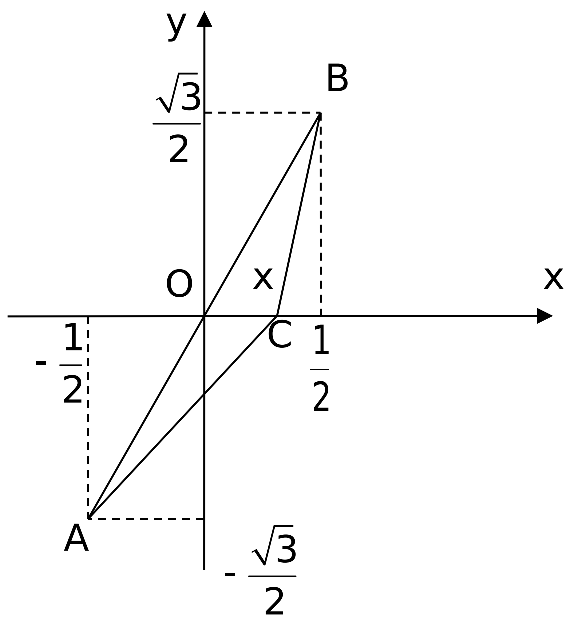
Ta cã: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$= \sqrt{\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Trong mÆt ph¼ng täa ®é Oxy, xÐt c¸c ®iÓm:

$$A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C(x;0)$$

Khi ®ã ta cã $AC = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$



$$BC = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$\forall A,B,C$, ta lu«n cã bÊt ®¼ng thøc: $AC+BC\ge AB$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\ge 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x)\ge 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

DÊu "=" x¶y ra $\Leftrightarrow C\in[AB]$, ta thÊy $O\in AB\Rightarrow C\equiv O$

Hay $f(0)=22$

VËy: $\min f(x)=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$

<u>NhËn xÐt</u>:

Líp 10A1 cã 15/45 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng, 28 häc sinh cã lêi gi¶i sai vµ 12 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i.

Líp 10A2 cã 10/45 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng, 25 häc sinh cã lêi gi¶i sai vµ 15 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i.

Líp 10A4 cã 2/46 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng, 24 häc sinh cã lêi gi¶i sai vµ 20 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i.

Bµi to¸n 1 lµ bµi to¸n t×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm c¨n thøc møc ®é kh¸ vµ ®a sè häc sinh cha cã lêi gi¶i ®óng. Nh÷ng häc sinh cã lêi gi¶i sai lµ do tÝnh nhÇm hoÆc cha h×nh dung ra ph¬ng ph¸p gi¶i.

<u>§Ó kh¾c phôc nh÷ng sai lÇm trªn ta lµm nh sau:</u>

Bíc 1: Cung cÊp cho häc sinh ph¬ng ph¸p t×m cùc trÞ b»ng ph¬ng ph¸p h×nh häc.(*Nh phÇn lý thuyÕt ®· cung cÊp*).

Bíc 2:Ph©n tÝch cho häc sinh khi nµo th× ¸p dông ph¬ng ph¸p t×m cùc trÞ b»ng h×nh häc vµo ®¹i sè(*Khi biÓu thøc trong c¨n cã d¹ng tæng b×nh ph¬ng*).

Bíc 3: ¸p dông mét sè bÊt ®¼ng thøc h×nh häc.

Bíc 4: Häc sinh ph¶i n¾m v÷ng phÇn ph¬ng ph¸p to¹ ®é trong h×nh häc ph¼ng.

Bíc 5: Th«ng qua c¸ch lµm cña häc sinh ph©n tÝch mét sè sai lÇm gÆp ph¶i khi lµm d¹ng to¸n nµy.

Sau khi gi¸o viªn híng dÉn cho häc sinh lµm bµi tËp sau:

<u>Bµi 2.2</u>: T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm sè:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}$$, víi xÎ ¡

Lêi gi¶i ®óng:

Ta cã thÓ viÕt: $f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$

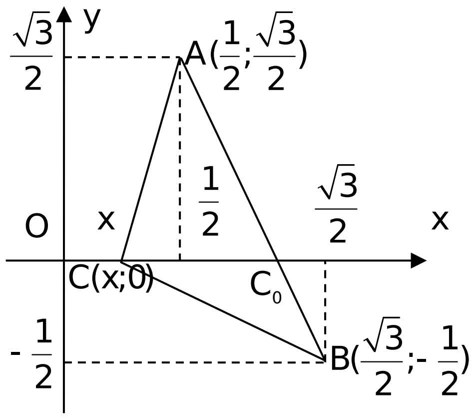
$$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\ .$$

Víi hai ®iÓm $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ trªn mÆt ph¼ng to¹ ®é, ta cã:

$$MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Trªn mÆt ph¼ng to¹ ®é Oxy, ®Æt:

$$A\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right),\ C(x;0)$$



Khi ®ã ta cã: $$CA=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$CB=\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

$$AB=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2$$

VËy: $f(x)=CA+CB$.

$\forall A,B,C$, lu«n cã bÊt ®¼ng thøc: $CA+CB\geq AB$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 2, \forall \in \mathbb{R}$. MÆt kh¸c, gi¶ sö AB c¾t Ox t¹i C_0.

Ta cã: $C_0A + C_{0B} = AB$. Nh vËy, nÕu ®Æt $x_0 = OC_0$ th× $f(x_0) = 2$ Do ®ã:

$$\min f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sau khi híng dÉn häc sinh vµ cho lµm bµi tËp 2 ®îc kÕt qu¶ nh sau:

Líp 10A1 cã 40 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng (88,9%),5 häc sinh cã lêi gi¶i sai. (11,2%)

Líp 10A2 cã 37 häc sinh cã lêi gi¶i ®óng (82,2%); 8 lêi gi¶i sai (17,8%)

Líp 10A4 cã 30 häc sinh cho lêi gi¶i ®óng (65,2%), 11 häc sinh cã lêi gi¶i sai (23,9%) vµ 5 häc sinh kh«ng cã lêi gi¶i (10,9%).

Nh vËy sau khi híng dÉn ph¬ng ph¸p t×m cùc trÞ b»ng ph¬ng ph¸p h×nh häc ®a sè häc sinh ®· biÕt vËn dông vµ lµm ®îc bµi tËp.

Víi ph¬ng ph¸p trªn, sai lÇm chñ yÕu cña häc sinh m¾c ph¶i lµ kh«ng biÕt dông ®a bµi to¸n ®¹i sè vÒ bµi to¸n h×nh häc. Mét sè häc sinh cßn lóng tóng khi ®Æt c¸c to¹ ®é t¬ng øng ®Ó ®a vÒ bµi to¸n ®é ®é dµi trong tam gi¸c.

Tõ nh÷ng ph©n tÝch trªn ta cho häc sinh ¸p dông lµm mét sè bµi tËp vËn dông nh sau:

<u>**Bµi 2.3**</u> T×m gi¸ trÞ lín nhÊt cña hµm sè:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 34} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}, \forall x \in \mathbb{R}$$

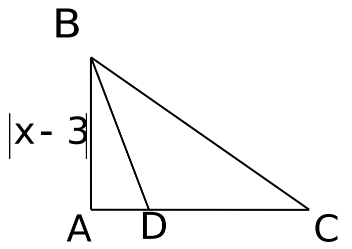
Lêi gi¶i ®óng:

Ta cã:

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + 25} - \sqrt{(x-3)^2 + 1} = \sqrt{|x-3|^2 + 5^2} - \sqrt{|(x-3)|^2 + 1^2}$$

$$f(3) = 5 - 1.$$

Víi $x \neq 3$, dùng ΔABC vu«ng t¹i $A, AC = 5, AB = |x-3|$. Trªn c¹nh AC, ta lÊy ®iÓm D sao cho $AD = 1$. Theo ®Þnh lý Pitago, ta cã:



$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{|x-3|^2+5^2}$$

$$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{|x-3|^2+1^2}$$

Trong ΔBCD, ta lu«n cã $BC-BD<DC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|x-3|^2+5^2}-\sqrt{|x-3|^2+1^2}<4$$

VËy lµ $\forall x\neq 3$ th× $f(x)<4$. $f(x)=4$ khi $x=3$.

Suy ra $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)=4$.

<u>NhËn xÐt:</u> Bµi to¸n trªn lµ d¹ng hiÖu cña hai biÓu thøc, ta ¸p dông hiÖu cña hai c¹nh lu«n nhá h¬n c¹nh thø 3.

<u>Bµi 2.4</u> T×m gi¸ trÞ lín nhÊt vµ nhá nhá nhÊt cña hµm sè $f(x;y)=4x+3y$. XÐt trªn miÒn $D=\{(x;y): x^2+y^2+16=8x+6y\}$

<u>Bµi gi¶i</u>

$\forall (x;y)\in D$, ta cã $\qquad x^2+y^2+16=8x+6y$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-6y+9=9$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=3^2$$

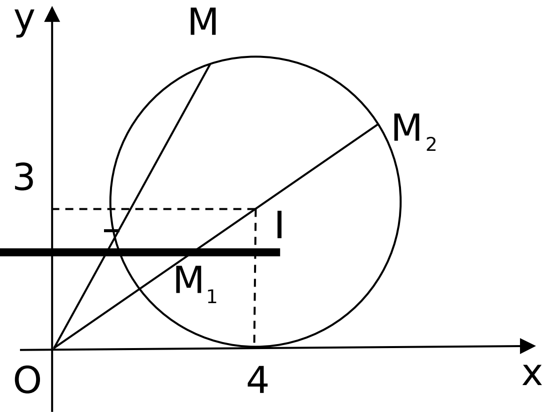
VËy $\forall (x;y)\in D$ lµ nh÷ng ®iÓm n»m trªn ®êng trßn cã t©m $I(4;3)$, b¸n kÝnh $R=3$. Khi ®ã $\forall (x;y)\in D$, ta cã:

$$f(x;y)=4x+3y=\frac{1}{2}(x^2+y^2+16)=8+\frac{x^2+y^2}{2}$$

Nèi OI c¾t ®êng trßn D t¹i M_1, M_2. Khi ®ã $\forall (x;y)\in D$, ta cã:

$\min_{M(x;y)\in D} OM=OM_1=OI-M_1I=5-3=2$

$\Rightarrow \min_{M(x;y)\in D} OM^2=4$



$$\max_{M(x;y)\in D} OM = OM_2 = OI + M_2I = 5 + 3 = 8$$

$$\Rightarrow \max_{M(x;y)\in D} OM^2 = 64$$

MÆt kh¸c, ta cã: $OM^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 4 \le x^2 + y^2 \le 64$

Suy ra: $6 \le f(x;y) \le 36$

VËy: $\max_{M(x;y)\in D} f(x;y) = 36;\ \min_{M(x;y)\in D} f(x;y) = 6$

<u>Bµi 2.5</u>: T×m gi¸ trÞ lín nhÊt cña hµm sè

$f(x,y,z,t) = \sqrt{5 - x - 2y} + \sqrt{5 - z - 2t} + \sqrt{5 - xz - yt}$ trªn miÒn

$$D = \left\{ (x,y,z,t) : x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 5 \right\}$$

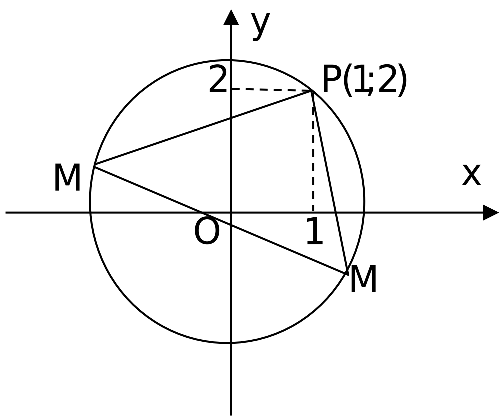
<u>Bµi gi¶i</u>

Ta cã thÓ viÕt l¹i hµm $f(x,y,z,t)$ nh sau

$$f(x,y,z,t) = \sqrt{\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(z-1)^2 + (t-2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(x-2)^2 + (y-t)^2}{2}}$$

$\forall (x,y,z,t) \in D$ th× ®iÓm $M(x;y), N(z;t)$ n»m trªn ®êng trßn t¹i gèc O b¸n kÝnh $R = \sqrt{5}$ trong hÖ trôc to¹ ®é Oxy , xÐt ®iÓm P(1; 2). VËy P (1; 2) còng n»m trªn ®êng trßn D.

Khi ®ã, ta cã:



$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(z-1)^2 + (t-2)^2} + \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} = MP + NP + MN$$

víi $\forall (x;y;z;t) \in D$

Do ΔMNP néi tiÕp ®êng trßn $(0;\sqrt{5})$

MÆt kh¸c, mét tam gi¸c néi tiÕp ®êng trßn nÕu tam gi¸c ®ã lµ tam gi¸c ®Òu th× tam gi¸c ®ã cã chu vi lín nhÊt.

ΔMNP ®Òu néi tiÕp ®êng trßn cã b¸n kÝnh $\sqrt{5}$ th× c¹nh cã ®é dµi:

$$a = \sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{15}$$

VËy: $f(x,y,z,t) \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}.3\sqrt{5} = \dfrac{3\sqrt{30}}{2} \Rightarrow \max f(x;y;z;t) = \dfrac{3\sqrt{30}}{2}, (x;y;z;t) \in D$

<u>Bµi 2.6</u>. T×m gi¸ trÞ lín nhÊt cña hµm sè:

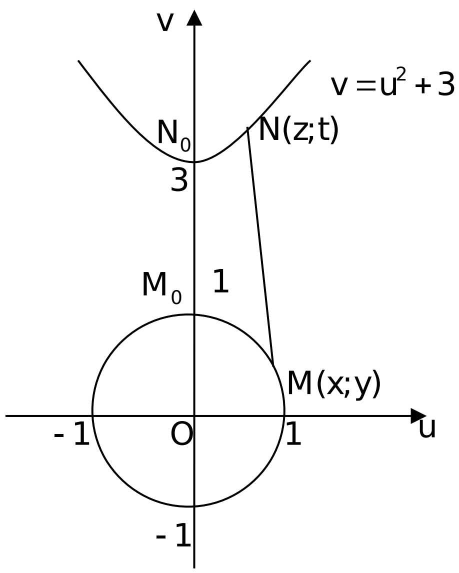
$f(x,y,z,t) = z^2 + t^2 - 2xz - 2yt + 1$

XÐt trªn miÒn $D = \{(x,y,z,t) : x^2 + y^2 = 1\ ,\ z^2 - t + 3 = 0\}$

<u>Bµi gi¶i</u>

$\forall (x,y,z,t) \in D$, ta cã:

$$f(x,y,z,t) = (z - x)^2 + (y - t)^2 - x^2 - y^2 + 1$$
$$= (z - x)^2 + (y - t)^2$$



$\forall (x,y,z,t) \in D$ th× tËp hîp nh÷ng ®iÓm M(x,y) n»m trªn ®êng trßn t©m O(0;0), b¸n kÝnh R = 1;

TËp hîp c¸c ®iÓm N(z,t) n»m trªn parabol: $v=u^2+3$

Khi ®ã, ta cã:

$$MN^2 = (z - x)^2 + (t - y)^2 = f(x,y,z,t)$$

VËy: min $MN^2 = M_0N_0 = 4$,

Víi $M_0(0;1)$; $N_0(0;3)$

Do ®ã, ta cã :

$$\begin{cases} f(x,y,z,t) \geq 4.\ \forall (x,y,z,t) \in D \\ f(0,1,0,3) = 4 \quad (0,1,0,3) \in D \end{cases} \Rightarrow \min_{D} f(x,y,z,t) = 4$$

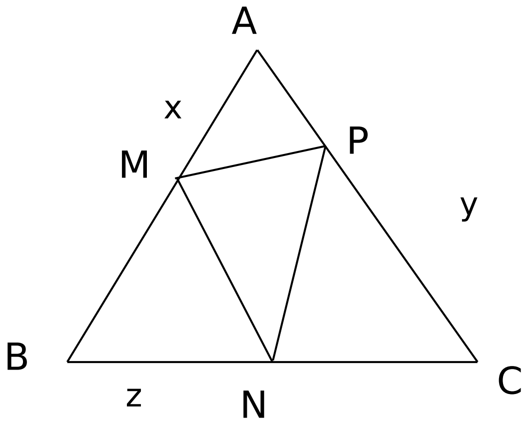
<u>Bµi 2.7.</u> T×m gi¸ trÞ lín nhÊt cña hµm sè:

$$f(x,y,z) = x\,(1 - y) + y(1 - z) + z(\,1 - \ x)$$

XÐt trªn miÒn $D = \left\{ (x,y,z)\,;\, 0 \le x \le 1;\, 0 \le y \le 1;\, 0 \le z \le 1 \right\}$

<u>Bµi gi¶i</u>

Dùng ΔABC ®Òu víi c¹nh b»ng 1 khi ®ã: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



Trªn AB, BC, CA ta lÇn lît ®Æt c¸c ®o¹n:

AM = x ; BN = z ; CP = y

Do $0 \le x,y,z \le 1$ nªn M cã thÓ trïng A hoÆc B

N cã thÓ trïng B hoÆc C

P cã thÓ trïng C hoÆc A

Lóc nµy, ta cã:

$$S_{\Delta AMP} = \frac{1}{2}AM.AP.\sin\text{¢} \quad \Rightarrow \; S_{\Delta AMP} = \frac{1}{2}x.(1 - y).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x(1 - y)$$

Hoµn toµn t¬ng tù, ta cã: $S_{\Delta BMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}z(1 - x)$

$$S_{\Delta CNP} = \frac{\sqrt{3}}{4}y(1 - z)$$

MÆt kh¸c, ta cã: $S_{\Delta CNP} + S_{\Delta BMN} + S_{\Delta CNP} \le S_{\Delta ABC}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}x(1 - y) + \frac{\sqrt{3}}{4}z(1 - x) + \frac{\sqrt{3}}{4}y(1 - z) \le \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \forall (x,y,z) \in D$$

$$\Leftrightarrow x(1 - y) + z(1 - x) + y(1 - z) \le 1 \qquad \forall (x,y,z) \in D$$

VËy lµ $\begin{cases} f(x,y,z) \le 1 & \forall (x,y,z) \in D \\ f(1,0,0) = 1 \end{cases}$. Do ®ã $\max\limits_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 1$

Bµi tËp t¬ng tù cho häc sinh vÒ nhµ lµm: (*cã híng dÉn*)

Bµi 2.8 T×m gi¸ trÞ lín nhÊt vµ nhá nhÊt cña hµm sè :

$f(x;y)=x^2+y^2$

XÐt trªn miÒn : $D=\{(x;y): x-2y+8\geq 0; x+y+2\geq 0; 2x-y+4\leq 0\}$

(§s $\max\limits_{(x;y)\in D} f(x;y)=20; \min\limits_{(x;y)\in D} f(x;y)=\dfrac{16}{5}$)

Bµi 2.9 Cho hµm sè $f(y)=\sqrt{y^2-4y+8}+\sqrt{y^2-6y+10}\ \forall y\in\mathbb{R}$

T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm $f(y)$

Híng dÉn Hµm sè $f(y)$ ®îc viÕt l¹i díi d¹ng

$$f(y)=\sqrt{(y-2)^2+2^2}+\sqrt{(y-3)^2+1^2}$$

Sau ®ã trong hÖ trôc to¹ ®é ta chän c¸c ®iÓm

$A(-1;2); B(2;3); M(1;y)$, ¸p dông bÊt ®¼ng thøc trong tam gi¸c

$AM+BM\geq AB$ .Suy ra gi¸ trÞ nhá nhÊt cña $f(y)$

(§s $\min\limits_{\mathbb{R}} f(y)=\sqrt{10}$)

Bµi 2.10 Cho hµm sè $f(x)=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2+16}\ \forall x\in\mathbb{R}$ .T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm sè $f(x)$.

Híng dÉn : Trong hÖ to¹ ®é Oxy , xÐt c¸c ®iÓm

$A(0;3); B(0;4); M(x;0)$

¸p dông bÊt ®¼ng thøc tam gi¸c $AM+BM\geq AB$. Tõ ®ã suy ra gi¸ trÞ nhá nhÊt .

(§s $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=7$)

Bµi 2.11 Cho hµm sè $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-12x+45}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm sè $f(x)$.

Híng dÉn : Ta viÕt l¹i hµm $f(x)=\sqrt{(x-3)^2+4}+\sqrt{(x-6)^2+9}$.

Trong hÖ to¹ ®é Oxy, xÐt c¸c ®iÓm $A(3;4);B(6;-1);M(x;2)$

¸p dông bÊt ®¼ng thøc tam gi¸c $AM+BM\ge AB$

(§s $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\sqrt{34}$)

<u>Bµi 2.12</u> Cho hµm sè

$f(x)=\sqrt{2x^2-10x+25}+\sqrt{2x^2-4\sqrt{6}\,x+24}\ \forall x\in\mathbb{R}$ T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm sè $f(x)$.

Híng dÉn : Ta viÕt l¹i hµm $f(x)=\sqrt{(x-5)^2+x^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{6}-x\right)^2+x^2}$.

Trong hÖ to¹ ®é Oxy , xÐt c¸c ®iÓm $A(0;5);B\left(2\sqrt{6};0\right);M(x;x)$

¸p dông bÊt ®¼ng thøc tam gi¸c $AM+BM\ge AB$ suy ra gi¸ trÞ nhá nhÊt.

(§s $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=7$)

<u>Bµi 2.13</u> Cho hµm sè $f(x)=\sqrt{5x^2-8x+13}+\sqrt{5x^2-4x+4}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm sè $f(x)$.

Híng dÉn : Ta viÕt l¹i hµm

$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+(3-2x)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(-2x)^2}$

Trong hÖ to¹ ®é Oxy , xÐt c¸c ®iÓm $A(-2;-1);B(2;2);M(x;2-2x)$

¸p dông bÊt ®¼ng thøc tam gi¸c $AM+BM\ge AB$ suy ra gi¸ trÞ nhá nhÊt.

(§s $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=5$)

Bµi 2.14 Cho hµm sè

$f(x)=\sqrt{10x^2-12x+10}+\sqrt{10x^2-20x+20}$ "xÎ ¡ T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña hµm sè $f(x)$.

Híng dÉn : Ta viÕt l¹i

$$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(3x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(3x-4)^2}$$

Trong hÖ to¹ ®é Oxy , xÐt c¸c ®iÓm

$A(3;2);B(-2;-1);M(x;3(1-x))$

¸p dông bÊt ®¼ng thøc tam gi¸c $AM+BM\geq AB$ suy ra gi¸ trÞ nhá nhÊt.

C. PhÇn kÕt luËn vµ khuyÕn nghÞ

1.KÕt luËn vµ ®¸nh gi¸ c¬ b¶n.

Sau khi tæ chøc d¹y häc theo ph¬ng pháp ®Ò xuÊt trªn ë c¸c líp 10A1 n=45 häc sinh, líp 10A2 n=45 häc sinh, líp 10A4 n=46 häc sinh (HS)

Qua c¸c sè liÖu trªn ta thÊy khi d¹y häc sinh cã c¸i nh×n kh¸i qu¸t ho¸ d¹ng to¸n cùc trÞ häc sinh hiÓu bµi vµ vËn dông lµm bµi tËp tèt h¬n, ®iÓn h×nh lµ ®Çu ®iÓm cao còng nhiÒu h¬n.

Néi dung cña SKKN nµy ®îc t¸c gi¶ vïi c«ng nghiªn cøu trao ®æi th«ng qua qu¸ tr×nh häc cao häc, gi¶ng d¹y t¹i trêng THPT Yªn L·ng vµ sù trao ®æi gióp ®ì cña ®ång nghiÖp ban bÌ, sö dông mét sè kiÕn thøc to¸n häc cao cÊp nh gi¶i tÝch låi, c¸c ph¬ng ph¸p t×m cùc trÞ cña hµm nhiÒu biÕn ®îc øng dông vµo gi¶i to¸n THPT vµ kiÕn thøc to¸n häc s¬ cÊp. Vµ ®· mang l¹i mét sè kÕt qu¶ tÝch cùc ®¸ng khÝch lÖ.

Néi dung cña s¸ng kiÕn kinh nghiÖm ®· tr×nh bµy mét c¸ch cã hÖ thèng kiÕn thøc cô thÓ chi tiÕt nh÷ng d¹ng to¸n c¬ b¶n vÒ c¸c ph¬ng ph¸p t×m cùc trÞ ë ch¬ng tr×nh to¸n THPT.

Th«ng qua SKKN nµy häc sinh ®· tù tin h¬n rÊt nhiÒu khi häc to¸n tõ ®ã t¹o tÝnh ham häc, s¸ng t¹o trong qu¸ tr×nh häc vµ t duy to¸n.

2.KhuyÕn nghÞ:

CÇn n©ng cao t duy häc to¸n cña häc sinh th«ng qua c¸c ph¬ng ph¸p gi¶i cã tÝnh hÖ thèng.

CÇn gióp häc sinh cã c¸c nh×n kh¸i qu¸t nhÊt th«ng qua c¸c ph¬ng ph¸p gi¶i, ®a ra c¸c nhËn xÐt cã tÝnh chÝnh x¸c, phï hîp tõ ®ã h×nh thµnh nªn tÝnh tù gi¸c, tÝch cùc, chñ ®éng häc tËp cña häc sinh.

CÇn x©y dùng hÖ thèng c¸c ph¬ng ph¸p gi¶i, c¸c d¹ng bµi tËp t¬ng øng.

KiÕn thøc trªn chØ ®îc ¸p dông cho häc sinh kh¸ giái. Gi¶ng d¹y ë c¸c líp mòi nhän cña trêng.

SKKN nµy cã thÓ ®îc ¸p dông réng r·i ®Ó båi dìng häc sinh giái to¸n, luyÖn thi §H, C§.

Chóng ta ®· biÕt c¸c bµi to¸n t×m cùc trÞ lµ c¸c bµi to¸n rÊt phong phó vµ ®a d¹ng. §ßi hái vËn dông kiÕn thøc mét c¸ch linh ho¹t v× vËy ®©y lµ néi dung rÊt ®¸ng lo ng¹i cña ngêi häc to¸n vµ lµm to¸n.Trong SKKN nµy t«i ®· ®a ra mét sè c«ng cô ®Ó gi¶i quyÕt bµi to¸n t×m cùc trÞ cña hµm sè. MÆc dï bµi to¸n cùc trÞ cã rÊt nhiÒu ph¬ng ph¸p gi¶i nhng do khu«n khæ cña SKKN vµ do n¨ng lùc cña b¶n th©n cßn nhiÒu h¹n chÕ nªn SKKN cña t«i vÉn cha nªu hÕt ®îc ®Çy ®ñ vµ hÖ thèng c¸c ph¬ng ph¸p ®Ó gi¶i chóng .

T«i kÝnh mong c¸c ®ång nghiÖp ®ãng gãp ý kiÕn ®Ó SKKN cña t«i ®îc hoµn thiÖn h¬n .

T«i xin ch©n thµnh c¶m ¬n !

Mª Linh, ngµy 20/05/2010

Ngêi thùc hiÖn

D. Tµi liÖu tham kh¶o

1.§ç V¨n Lu, Phan Huy Kh¶i , *Gi¶i tÝch låi,* Nxb khoa häc vµ kÜ thuËt ,
Hµ Néi.

2. Phan Huy Kh¶i (2002), *C¸c bµi to¸n cùc trÞ cña hµm sè,* Nxb Hµ Néi .

3 .Vâ Giang Mai, Vâ Kh¾c Thêng, Lª Quang TuÊn, *øng dông c¸c tÝnh chÊt cña hµm sè ®Ó gi¶i bµi to¸n: BÊt ®¼ng thøc*, *t×m gi¸ trÞ lín nhÊt*, *t×m gi¸ trÞ nhá nhÊt*, Nxb Thanh Ho¸.

4. T¹p chÝ to¸n häc vµ tuæi trÎ(NXBGD)