

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Bài 1. (5 điểm)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
- Tìm x để $|A| = A$

Bài 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

Bài 3 (5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$.
Gọi E là trung điểm của CD .

- Tứ giác $ABED$ là hình gì? Tại sao?
- Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
- Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC . Tính góc \widehat{HDI}

Bài 4. (4 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Bài 5. (2 điểm)

a) Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

CMR: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

b) Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-d}{a+b}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

b) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \mid (1-2x)$

Từ đó tìm được $x=1$ và $x=0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$

$$|A|=A \Leftrightarrow A > 0$$

c) Ta có: $\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện: $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Câu 2

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{cases}$

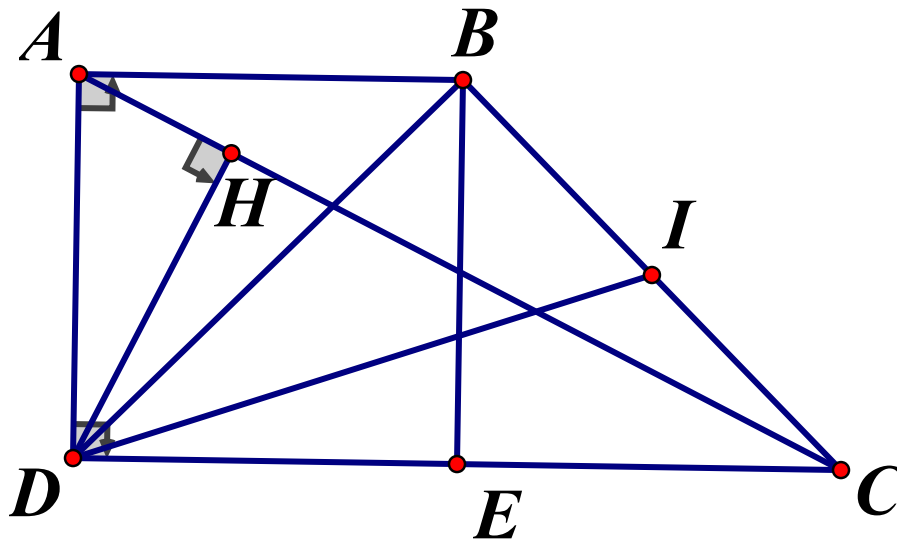
b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) \Leftrightarrow x-300=0 \Leftrightarrow x=300$$

Câu 3.



a) Chỉ ra $ABED$ là hình bình hành ($AB \parallel DE, AB = DE$)

Chỉ ra $ABED$ là hình thoi ($AB = AD$)

($\widehat{BAD} = 90^\circ$)

Chỉ ra $ABED$ là hình vuông

b) Chỉ ra $\triangle BEC$ vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, DC = 2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là :
$$S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

c) $\widehat{ACH} = \widehat{ACD}$ (1) (cùng phụ với góc HDC)

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BDC$ vuông tại D và B có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta IBC$$

Suy ra $\angle ACD = \angle BDI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle ADH = \angle BDI$

Mà $\angle ADH + \angle BDI = 45^\circ \Rightarrow \angle BDI + \angle BDH = 45^\circ$ hay $\angle HDI = 45^\circ$

Câu 4.

a)

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 \\ &= (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Do $(x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$

Nên $A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy GTNN của A là $1 \Leftrightarrow x = y = 2$

b)

$$B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2 + 1)(x+1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên $B = \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy GTLN của B là $3 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 5

a)

Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-a+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

b)

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} &\geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} &\geq 4 \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned} &\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4 \\ &= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4 \\ &\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d$