

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. KHẢO SÁT HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Sự biến thiên

Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$. Do đó, đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \text{ với mọi } x \neq 1.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'			
y	2	$+\infty$	2

Diagram showing the variation of the function. The horizontal axis represents x with values $-\infty$, 1 , and $+\infty$. The vertical axis represents y with values 2 and $+\infty$. The derivative y' is negative for all $x \neq 1$. Arrows indicate the function decreases from $y=2$ at $x=-\infty$ to $-\infty$ at $x=1^-$, and from $+\infty$ at $x=1^+$ to $y=2$ at $x=+\infty$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

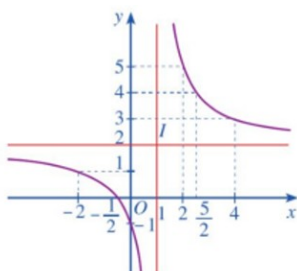
3) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.

- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1), \left(-\frac{1}{2}; 0\right), (-2; 1), (2; 5), \left(\frac{5}{2}; 4\right)$ và $(4; 3)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ được cho ở Hình.



Quan sát đồ thị ở Hình, đồ thị đó nhận giao điểm $I(1;2)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.
Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$. Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$. Do đó, đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1		1

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

3) Đồ thị

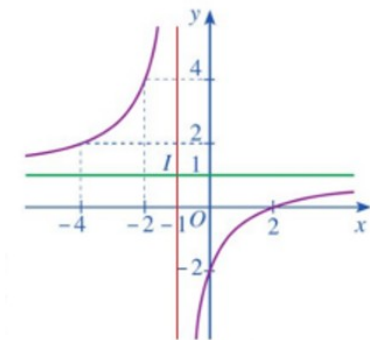
- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -2)$.

- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $(2; 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -2), (2; 0), (-2; 4)$ và $(-4; 2)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ được cho ở Hình.



Câu 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

- Tiệm cận:

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$.

Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

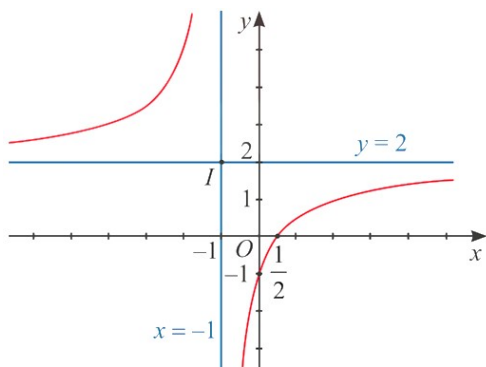
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+		+	
y	2		$+\infty$		2
			$-\infty$		

3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1; 2)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = 2$.



Câu 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-x+2}{2x+3}$.

Lời giải

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

1. Tập xác định:

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-7}{(2x+3)^2}$.

Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq -\frac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{2} \right)$ và $\left(-\frac{3}{2}; +\infty \right)$.

- Tiệm cận:

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{2x+3} = -\frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{2x+3} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} \frac{-x+2}{2x+3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^+} \frac{-x+2}{2x+3} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

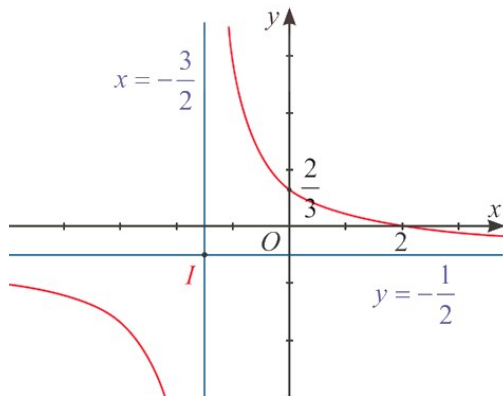
x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'			
y	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$

3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(2;0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.
Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận
 $x = -\frac{3}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}$.



Câu 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$.
Lời giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x+1}{x-2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+1}{x-2} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x-2} = -1; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x-2} = -1.$$

Suy ra đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có $y' = \frac{1}{(x-2)^2} > 0, \forall x \in D; y'$ không xác định tại $x=2$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

- Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

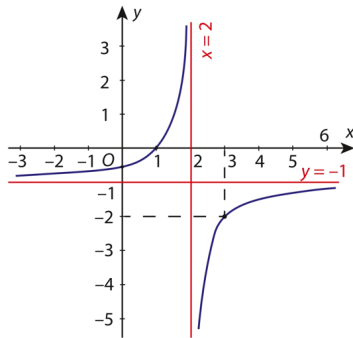
- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

- Đồ thị:

- Vẽ các đường tiệm cận $x=2$ và $y=-1$.

- Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và giao với trục Ox tại điểm $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; -2)$, nhận giao điểm $I(2; -1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số được cho như Hình.



Câu 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y = x + \frac{1}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$$

Do đó, đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Do đó, đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0, y_{CB} = -1$; đạt cực tiểu tại $x=2, y_{CT} = 3$.

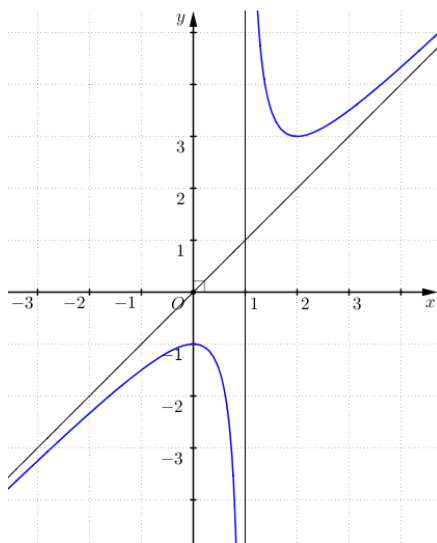
3) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.

· Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

· Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1), \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(-1; -\frac{3}{2}\right), (2; 3), \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ và $\left(3; \frac{7}{2}\right)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ được cho ở Hình.



Quan sát đồ thị ở Hình, đồ thị đó nhận giao điểm $I(1; 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận Hình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Câu 7. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$.

Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y = -x + \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y+x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Do đó, đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$$y' = -\frac{x^2+1}{x^2}, y' < 0, \forall x \neq 0.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

3) Đồ thị

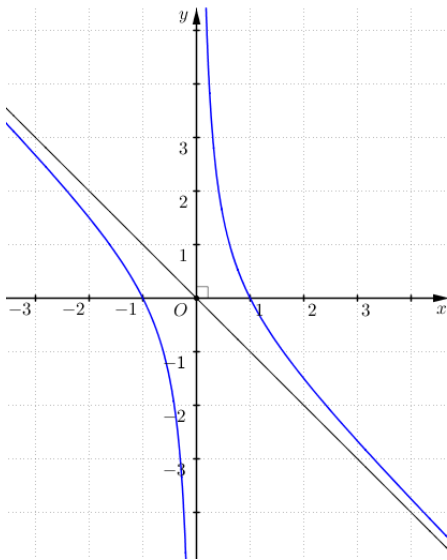
· Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm $(-1; 0), (1; 0)$.

· Đồ thị hàm số không cắt trục tung.

· Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1; 0), (1; 0), \left(-2; \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(2; -\frac{3}{2}\right)$.

· Đồ thị hàm số nhận giao điểm $O(0; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2+1}{x}$ được cho ở Hình.



Câu 8. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = +\infty$$

$$\text{Ta có: } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x} = 1 \quad \text{và} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{x - 1} = 3$$

Suy ra đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 2 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 6 $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$	

3. Đồ thị:

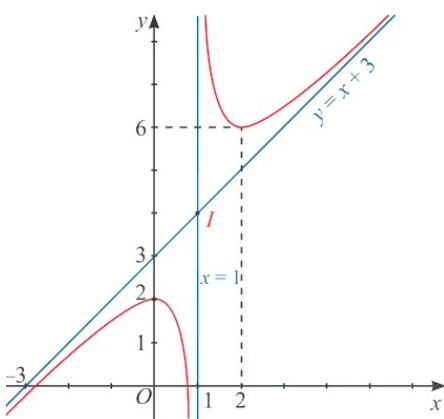
Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{3}$ hoặc $x=-1-\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1+\sqrt{3};0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3};0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$.

Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;4)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=1$ và $y=x+3$.



Câu 9. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

$$y' = \frac{-x^2 - 4x - 10}{(x+2)^2}$$

Đạo hàm

Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq -2$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

- Các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = -\infty.$$

$$\text{Ta có: } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x} = -1 \quad \text{và} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} - (-1)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x + 4}{x + 2} \right) = -1$$

Suy ra đường thẳng $y = -x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = +\infty$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	-		-
y	$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -\infty$

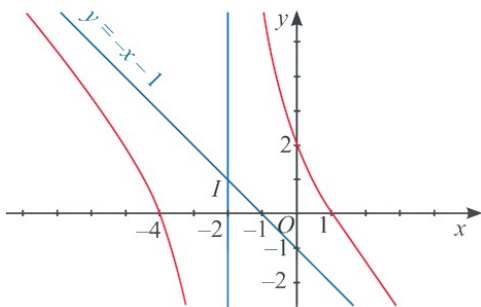
3. Đồ thị:

Ta có $y=0 \Leftrightarrow -x^2-3x+4=0$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1.$$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4;0)$ và điểm $(1;0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 2)$. Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-2; 1)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -2$ và $y = -x - 1$.



Câu 10. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$

Lời giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = x + 2 + \frac{1}{x + 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x+2} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x+2} \right) = -\infty.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = -\infty$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2};$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = -1$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

- Chiều biến thiên:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.

- Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -3, f_{CD} = f(-3) = -2$;

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1, f_{CT} = f(-1) = 2$.

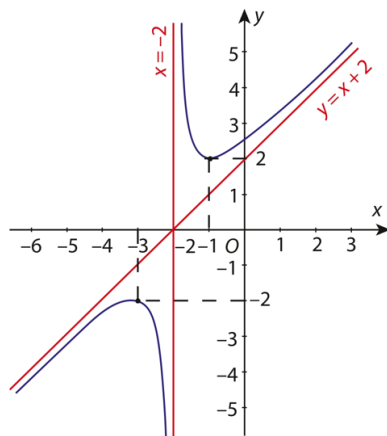
- Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x = -2$ và $y = x + 2$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{5}{2}\right)$ và không giao với trục Ox .

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình.



Câu 11. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Lời giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = -x + \frac{2}{x+1}$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2}{x+1} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{2}{x+1} \right) = +\infty.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = -x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Ta có $y' = -1 - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$.

Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, y' không xác định tại $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$-$
y	$+\infty \searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow -\infty$

- Chiều biến thiên: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

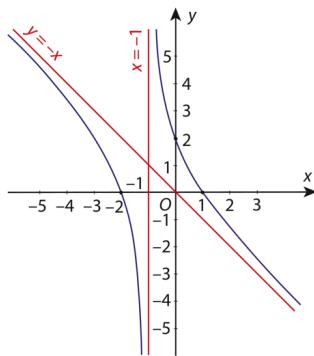
- Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x = -1$ và $y = -x$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại $(0; 2)$ và giao với trục Ox tại $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình.



DẠNG 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$, trong đó m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m=1$

2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

Lời giải

1. Khi $m=1$ thì hàm số là: $y = \frac{x+4}{x+1}$.

⊞ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

⊞ Chiều biến thiên:

$$y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$$

+Ta có:

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$

⊞Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$$

+Ta có: , do đó đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số đã cho (khi $x \rightarrow (-1)^-$ và khi $x \rightarrow (-1)^+$).

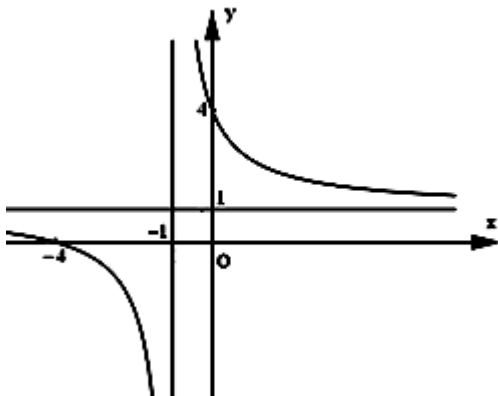
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$$

+ Ta có: , nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$)

⊞Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$-\infty$	$+\infty$

⊞ Đồ thị: (hình vẽ)



o $y=0 \Rightarrow x=-4; x=0 \Rightarrow y=4$, tức là đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-4; 0)$, cắt trục tung tại $(0; 4)$

o Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(-1; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ x = -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $-2 < m \leq -1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên:

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$$

o Chiều biến thiên:

Suy ra, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

o Cực trị: Hàm số không có cực trị.

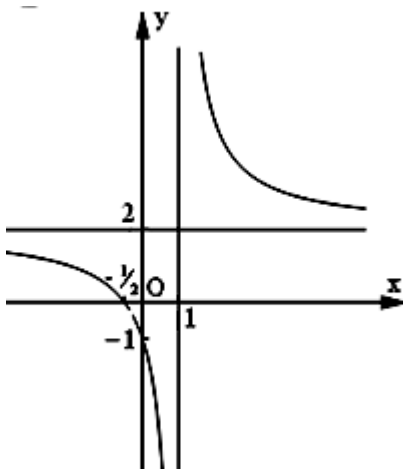
Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$, và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$
					2

Đồ thị:



Đồ thị cắt trục tung tại $A(0; -1)$, cắt trục hoành tại $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$
 Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(1; 2)$ làm tâm đối xứng.

2. Đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} &= -x + m \\ \Leftrightarrow x - 1 &\text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x + m+1 &= 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác 1.} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \\ 1^2 - (m-2) \cdot 1 + m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 8 \end{cases}$$

Vậy, với $m < 0$ hoặc $m > 8$ thì đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải.

1. Xét hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C)

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Sự biến thiên:

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$$

o Chiều biến thiên:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

o Giới hạn và tiệm cận:

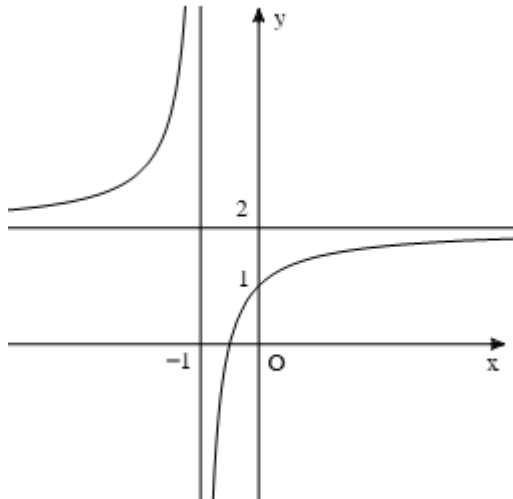
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2; \text{ tiệm cận ngang: } y = 2.$$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty;$
 tiệm cận đứng : $x = -1$

•Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	
y	2	$+\infty$	$-\infty$

•Đồ thị :



2. Gọi (d) là đường thẳng $y = kx + 2k + 1$. Khi đó hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình :

$$\begin{aligned} kx + 2k + 1 &= \frac{2x+1}{x+1} \\ \Leftrightarrow (x+1)(kx + 2k + 1) &= 2x + 1 \quad (\text{do } x = -1 \text{ không là nghiệm}) \\ \Leftrightarrow kx^2 + (3k - 1)x + 2k &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì (1) cần có hai nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (3k - 1)^2 - 8k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - (k + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi k thỏa mãn (2) ta có: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$, ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1).

$$\text{Ta có : } d(A, Ox) = d(B, Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x_1 - x_2) = 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \quad (\text{do } k \neq 0) \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

Theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{1-3k}{k}$, từ đó ta có :

$$k \frac{1-3k}{k} + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

Rõ ràng $k = -3$ thỏa mãn (2), nên là giá trị duy nhất cần tìm của tham số k .

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số:

$$y = \frac{2|x|}{|x|-1} \quad (C_1)$$

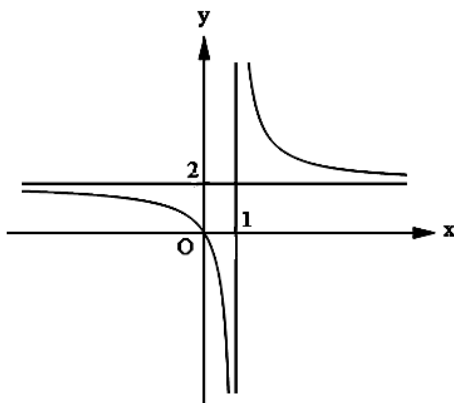
2. Biện luận theo m số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của phương trình: $(m-2)|x| - m = 0$

Lời giải.

1. + Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	2	$+\infty$	2

+ Đồ thị (C)



$(C_1): y = \frac{2|x|}{|x|-1} = \frac{2x}{x-1}$ khi $x \geq 0$

*Ta có:

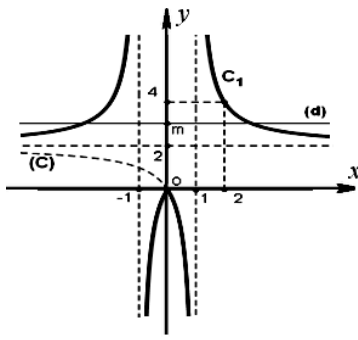
Mặt khác $y = \frac{2|x|}{|x|-1}$ là hàm số chẵn nên (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng. Vậy đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2|x|}{|x|-1} \quad (C_1)$$

gồm hai phần:

+Phần 1: Phần của (C) khi $x \geq 0$.

+ Phần 2: Đối xứng của phần 1 qua Oy .



$$(m-2)|x| - m = 0 \Leftrightarrow \frac{2|x|}{|x|-1} = m \quad (1)$$

2. Ta có:

Số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của (1) là số giao điểm của (C_1) và $(d): y = m$ trên đoạn $[-1; 2]$. Nhìn vào đồ thị ta thấy:

⊆ Khi $\begin{cases} m \geq 4 \\ m = 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có một nghiệm $x \in [-1; 2]$.

⊆ Khi $m < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x \in [-1; 2]$.

Khi $0 < m < 4$ thì phương trình (1) không có nghiệm

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0; \frac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Lời giải.

1. • Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Sự biến thiên: $y' = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

$$y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

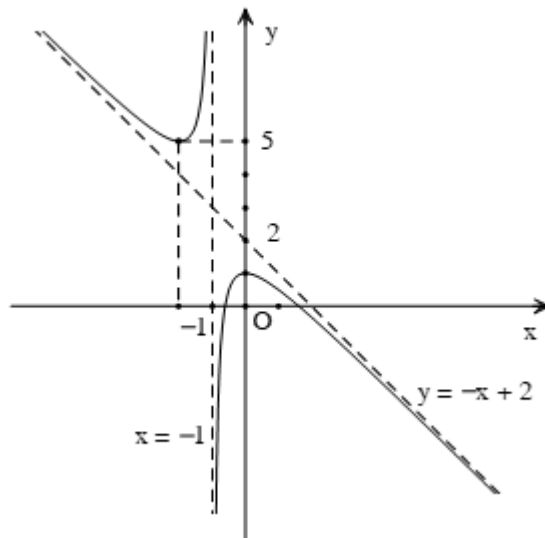
$\lim_{x \rightarrow -\infty} y - (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y - (-x + 2) = 0 \Rightarrow y = -x + 2$ là tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		-1		0		$+\infty$
y'	-	0	+		+	0	-	$+\infty$
y	$+\infty$			$+\infty$		1		$-\infty$

↘ Cực tiểu ↗
Cực đại

Đồ thị nhận điểm $I(-1;3)$ làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại $(0,1)$, cắt trục Ox tại $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.



2. Gọi (d) là đường thẳng $y = kx + \frac{5}{4}$.

Đề (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ:

$$\begin{cases} \frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = kx_0 + \frac{5}{4} & (1) \\ \frac{-x_0^2 - 2x_0}{(x_0 + 1)^2} = k & (2) \end{cases} \quad \text{có nghiệm } x_0$$

Thế k từ (2) vào (1): $\frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = \frac{-x_0^2 - 2x_0}{(x_0 + 1)^2} \cdot x_0 + \frac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ (-x_0^2 + x_0 + 1)(x_0 + 1) = -x_0^2 - 2x_0 + \frac{5}{4}(x_0 + 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ 3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

• Tại $x_0 = 1 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$, có tiếp tuyến $(T_1): y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

• Tại $x_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{5}{4}$, có tiếp tuyến $(T_2): y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Dựa vào đồ thị của hàm số ở câu 1, vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1}$ và từ đồ thị của hàm số này, biện luận về số nghiệm của phương trình $\frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} = a$ theo các giá trị của tham số a .

Lời giải.

1. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} = x + 1 - \frac{2}{x + 1}.$

• Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

• Sự biến thiên: $y' = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} > 0$ với mọi x thuộc D : hàm số luôn luôn đồng biến trên D , không có cực đại và cực tiểu.

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$

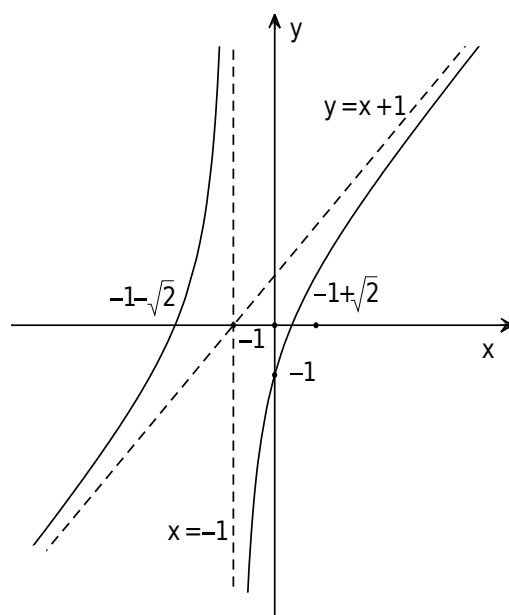
$\Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y - (x + 1) = 0 \Rightarrow y = x + 1$ là tiệm cận xiên.

o Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$

Đồ thị nhận điểm $I(-1; 0)$ làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại $(0, -1)$, cắt trục Ox tại $(-1 - \sqrt{2}; 0), (-1 + \sqrt{2}; 0)$.

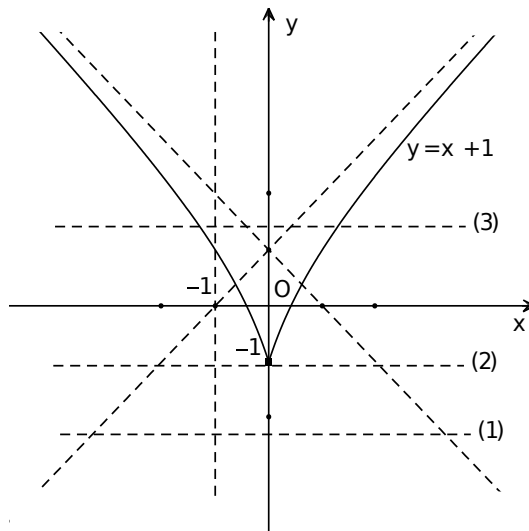


2. $y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1}$ là một hàm số chẵn (do $f(-x) = f(x)$) nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

• Vẽ phần đồ thị của (1) ứng với $x \geq 0$.

• Lấy đối xứng của phần đồ thị trên qua trục Oy sẽ được đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} \quad (\text{hình bên}).$$



Số giao điểm của đường thẳng $y = a$ và đồ thị này là số nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} = a.$$

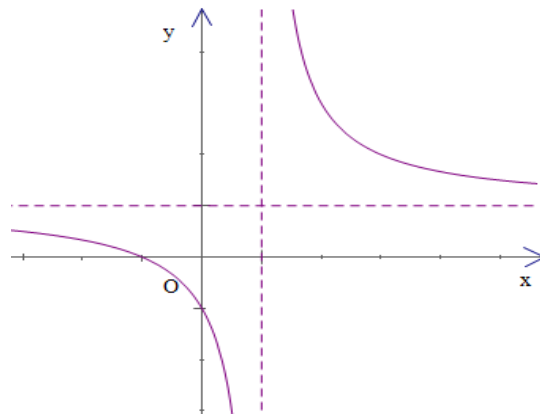
Xét qua 3 vị trí của đường thẳng $y = a$:

(1): $a < -1$: vô nghiệm;

(2): $a = -1$: một nghiệm $x = 0$;

(3): $a > -1$: thỏa nghiệm.

Câu 18. (Sở Cần Thơ - 2021) Cho hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ ($a \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như sau:



Xác định dấu của a, b, c

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ có tiệm cận đứng $x = a$, tiệm cận ngang $y = b$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0; \frac{c}{a}\right)$.

Nhìn hình vẽ ta thấy:
$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Câu 19. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax - 6}{bx - c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		—	
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Suy ra
$$\begin{cases} \frac{c}{b} = -2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc < 0 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, c < 0, a > 0 \quad (1) \\ b < 0, c > 0, a < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định
$$f'(x) = \frac{-ac + 6b}{(bx - c)^2} < 0 \Rightarrow ac > 6b.$$

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b > 0$ thì $ac > 6b > 0$; và (2) có thể xảy ra do nếu $c > 0, a < 0$ thì $6b < ac < 0$.

Vậy trong các số a, b, c có hai số âm.