

BÀI 3**PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU****1. Định nghĩa mặt cầu**

Cho điểm I và số dương R . Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng R .



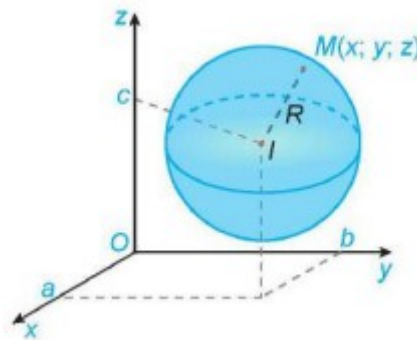
Nhận xét: Cho mặt cầu tâm $S(I; R)$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

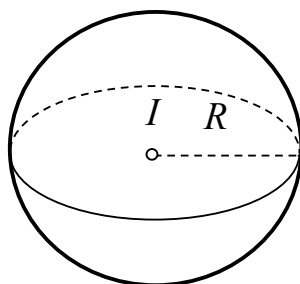
2. Phương trình của mặt cầu

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



Nhận xét: Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

CHỦ ĐỀ 1**XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU
LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN****DẠNG 1****XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU**

• Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ thì mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính R .

• Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì để xác định tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R ta thực hiện như sau:

$$+ \text{Xác định tọa độ tâm } I : \begin{cases} -2a = \dots \\ -2b = \dots \\ -2c = \dots \end{cases}$$

$$+ \text{Xác định bán kính: } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

Chú ý:

• Có thể xác định tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R của phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ bằng cách nhóm nhân tử để đưa về dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

• Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng 1 và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $OM < R$. B. $OM = R$. C. $OM > R$. D. $OM \leq R$.

Lời giải

Chọn C.

M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R) \Leftrightarrow OM > R$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. 12. C. $2\sqrt{6}$. D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có bán kính của (S) là $\sqrt{6}$ nên đường kính của (S) bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 3. Mặt cầu $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0$ có bán kính bằng:

- A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. D. $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Lời giải

Chọn D.

Biến đổi $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + \frac{2}{3} = 0$ có tâm $I(1; -2; 0)$, bán kính

$$R = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-2; 1; -3)$. B. $(-4; 2; -6)$. C. $(4; -2; 6)$. D. $(2; -1; 3)$.

Lời giải

Chọn D.

Mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$ có tâm $I(2; -1; 3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

- A. 3. B. 81. C. 9. D. 6.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính bằng R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Do đó $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính $R = 3$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.
 C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$. D. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính bằng R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ có bán kính 3 có phương trình là $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:

- A. 32 B. 8 C. 4 D. 16

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$ B Bán kính $R = \sqrt{16} = 4$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

- A. $(-2; -4; 6)$. B. $(2; 4; -6)$. C. $(-1; -2; 3)$. D. $(1; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là: $(-1; -2; 3)$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $R = 1$. B. $R = 7$. C. $R = \sqrt{151}$. D. $R = \sqrt{99}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ta có $a = 4$, $b = -5$, $c = 3$, $d = 49$. Do đó $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 1$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

- A. $I(-1; 2; -3)$; $R = 2$. B. $I(-1; 2; -3)$; $R = 4$. C. $I(1; -2; 3)$; $R = 2$. D. $I(1; -2; 3)$; $R = 4$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R=2$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4} = 2$$

Trong đáp án C ta có:

Câu 12. Cho các phương trình sau:

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$x^2 + (2y-1)^2 + z^2 = 4;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0;$$

$$(2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16.$$

Số phương trình là phương trình mặt cầu là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$(2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 4$$

Ta có:

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ là phương trình của một mặt cầu.}$$

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi I là tâm mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Độ

dài $\left| \overrightarrow{OI} \right|$ bằng:

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;2) \Rightarrow \overline{OI} = (0;0;2) \Rightarrow |\overline{OI}| = 2$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2m)^2 + (y+m)^2 + (z-m)^2 = 28 - 3m^2 \quad (1)$$

(1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 28 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}$.

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

- A. 4 B. 6 C. 5 D. 7

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 16. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$ với điều

kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$.

Do $m \in \mathbb{Q} \Rightarrow m \in [0; 1]$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$ có tâm I và bán kính R . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0; 0; 2)$.

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 9$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0; 0; -2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 3$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(0; 0; 2)$ và bán kính $R = 3$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 3)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$ có tâm I và bán kính R . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm $M(-1; 0; 3)$ nằm trong mặt cầu (S) , với $M(-1; 0; 3)$.

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 4$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-3; 0; 2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 16$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(-3; 0; 2)$ và bán kính $R = 4$

$IM = 5 > R = 4$ suy ra điểm $M(-1; 0; 3)$ nằm ngoài mặt cầu (S) ,

Bán kính của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$ là $R = \sqrt{16} = 4$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm $M(2;0;2)$ thuộc mặt cầu (S) .

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 2\sqrt{2}$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0; -2; 2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 8$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Thay điểm $M(2;0;2)$ vào mặt cầu: $2^2 + 2^2 + (2-2)^2 = 8 \Rightarrow M(2;0;2) \in (S)$

Phương trình mặt cầu tổng quát: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Rightarrow I(0; -2; 2), R = 2\sqrt{2}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Bán kính mặt cầu (S) là 20.

B. Bán kính mặt cầu (S) là $2\sqrt{5}$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-1; 2; -4)$.

D. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(1; -2; 4)$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Nên mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$ có tâm và bán kính là $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0 \quad (S_2): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$$

$$(S_3): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0 \quad (S_4): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. (S_1) là phương trình của một mặt cầu.

B. (S_2) là phương trình của một mặt cầu.

C. (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.

D. (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

$$(S_2): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

$$(S_3): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 3z + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

$$(S_4): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \\ d = 10 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0, (S_2): x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0, (S_3): 2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1,$$

$$(S_4): (x + y)^2 = 2xy - z^2 - 1.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. (S_1) là phương trình của một mặt cầu.

- B. (S_2) là phương trình của một mặt cầu.
 C. (S_3) là phương trình của một mặt cầu.
 D. (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là:

- (1) $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$;
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Từ đây ta có dấu hiệu nhận biết nhanh chóng, hoặc thực hiện phép biến đổi đưa phương trình cho trước về một trong hai dạng trên.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$, $(S_2): 2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1$, $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$,
 $(S_4): (x + y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. (S_1) là phương trình của một mặt cầu.
 B. (S_2) là phương trình của một mặt cầu.
 C. (S_3) là phương trình của một mặt cầu.
 D. (S_4) là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là :

- (1) $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$;
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$(S_1): (x - 1)^2 + (2y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6$, $(S_2): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6$,
 $(S_3): (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 + (2z + 1)^2 = 6$,

$$(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. (S_1) không phải là phương trình của một mặt cầu.
 B. (S_2) không phải là phương trình của một mặt cầu.
 C. (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.
 D. (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là:

- (1) $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$;
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Từ đây ta có dấu hiệu nhận biết nhanh chóng, hoặc thực hiện phép biến đổi đưa phương trình cho trước về một trong hai dạng trên.

$$(S_3): (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

$$(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 3 = 0.$$

Câu 25. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Với $-5 < m < 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.
 B. Với $m < -5$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.
 C. Với $m > 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.
 D. Với $m < -5$ hoặc $m > 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	SAI	ĐÚNG

Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2 + b^2 > c^2$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - 5m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 1 \end{cases}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tìm tọa độ tâm của mặt cầu (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(1; -2; 3)$

Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm là $I(a; b; c)$.

Suy ra, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ có tâm là $I(1; -2; 3)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m < 1$ hoặc $m > 2$.

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu là:
 $(m+2)^2 + 4m^2 - 19m + 6 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 2$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2(m+1)z + 2m^2 + 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(3-m)x - 2(m+1)y - 2mz + 2m^2 + 7 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2(m - 3)z + 19 - 2m = 0$. Tìm tập hợp tâm của mặt cầu (S) khi giá m trị thay đổi.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(1; 2; 1), B(3; 1; -2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 = 30$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(1; 2; 1), B(3; 1; -2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $\frac{MA}{MB} = 2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(-1; 2; 0), B(0; 1; -2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $MA = MB$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(-1; 0; 1), B(1; -1; 2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $\angle AMB = 90^\circ$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

DẠNG 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính R có phương trình $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; 0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 2$. B. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 4$.
- C. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 4$. D. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; 0)$ và bán kính bằng $R = 2$ có dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 4$$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$

B. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$

D. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính R là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = R^2$

Ta có: $M \in (S) \Rightarrow 4^2 + 0^2 + (0+3)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 25$

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7), B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}$

B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45$

C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}$

D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm AB ta có $I(-1;3;3)$ là tâm mặt cầu.

Bán kính $R = IA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{45}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$

Câu 39. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8$

B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64$

D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64$

Lời giải

Chọn B

Vì mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$ và nhận độ dài đoạn thẳng AB là bán kính.

Ta có: $\overline{AB} = (-2;0;2)$ $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Suy ra: $R = 2\sqrt{2}$.

Vậy: $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$

Câu 40. Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

- A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 3$. B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 45$. D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và $R = IA = \sqrt{3}$ là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$.
C. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$. D. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Lời giải

Chọn A

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;3;1)$.

$\overline{AB}(4;2;-4) \Rightarrow AB = \sqrt{16+4+16} = 6$

+ Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3;3;1)$, bán kính $R = \frac{AB}{2} = 3$ có phương trình là:

$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Lời giải

Chọn D

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1;2;1)$.

Bán kính mặt cầu $R = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{(-1-3)^2 + (6+2)^2 + (-3-5)^2}}{2} = 6$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Câu 43. Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

- A. 3. B. $\frac{9}{2}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } MA = 3MB \Leftrightarrow \overline{MA}^2 = 9\overline{MB}^2 \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 = 9(\overline{MI} + \overline{IB})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{IA}^2 - 9\overline{IB}^2 + 2\overline{MI}(\overline{IA} - 9\overline{IB}) = 8\overline{MI}^2 \quad (1)$$

$$\text{Gọi } I \text{ thỏa mãn } \overline{IA} - 9\overline{IB} = 0 \Leftrightarrow \overline{BI} = \frac{1}{8}\overline{AB} \text{ nên } \overline{IB} = \frac{1}{2}; \overline{IA} = \frac{9}{2}.$$

$$(1) \text{ suy ra } \Leftrightarrow 8\overline{MI}^2 = 18 \Leftrightarrow \overline{MI} = \frac{3}{2} \quad M \in S\left(I; \frac{3}{2}\right).$$

Từ

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

- A. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.
- C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$. D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases} 18 - 6a - 6b + d = 0 \\ 18 - 6a - 6c + d = 0 \\ 18 - 6b - 6c + d = 0 \\ 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 6b + d = -18 \\ -6a - 6c + d = -18 \\ -6b - 6c + d = -18 \\ -6a - 6b - 6c + d = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra tâm } I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ bán kính } R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $I(3;-2;-1)$ B. $I(2;-1;0)$ C. $I(3;-2;1)$ D. $I(-3;-2;1)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(a;b;c) \Rightarrow \vec{IA} = (-a; 1-b; 2-c); \vec{IH} = (4-a; -3-b; -2-c)$

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện $\Rightarrow \vec{IA} = -3\vec{IH}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2;-1)$$

Câu 46. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

- A. $(9;18;-27)$ B. $(-3;-6;9)$ C. $(3;6;-9)$ D. $(-9;-18;27)$

Lời giải

Chọn D

Gọi tọa độ các điểm trên ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

$$\begin{cases} \frac{a}{3} = -6 \\ \frac{b}{3} = -12 \\ \frac{c}{3} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -18 \\ b = -36 \\ c = 54 \end{cases}$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + q = 0$. Vì (S) qua các điểm O, A, B, C nên ta có hệ:

$$\begin{cases} q = 0 \\ 36m + q = -18^2 \\ 72n + q = -36^2 \\ -108p + q = -54^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ n = -18 \\ p = 27 \\ q = 0 \end{cases}$$

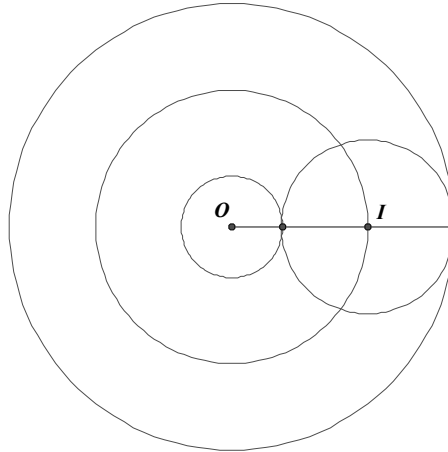
Vậy tọa độ tâm mặt cầu (S) là $(-9;-18;27)$.

Câu 47. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha)^2 + (y - \cos \beta)^2 + (z - \cos \gamma)^2 = 4$ với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz . Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

- A. 40π . B. 4π . C. 20π . D. 36π .

Lời giải

Chọn A



Ta dễ dàng chứng minh được: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Mặt cầu (S) có tâm $I(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Suy ra tâm I thuộc mặt cầu (S') có tâm $O(0;0;0)$, $R = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$

Mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

Mặt cầu (S_1) có tâm là O , bán kính $R_1 = |OI - R| = |1 - 2| = 1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm là O , bán kính $R_2 = OI + R = 1 + 2 = 3$.

Vậy tổng diện tích hai mặt cầu bằng $4\pi(R_1^2 + R_2^2) = 4\pi(1^2 + 3^2) = 40\pi$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

- A. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ B. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 17$
C. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ D. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0) \Rightarrow IM = \sqrt{13}$. Suy ra phương trình mặt cầu tâm

I bán kính IM là: $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

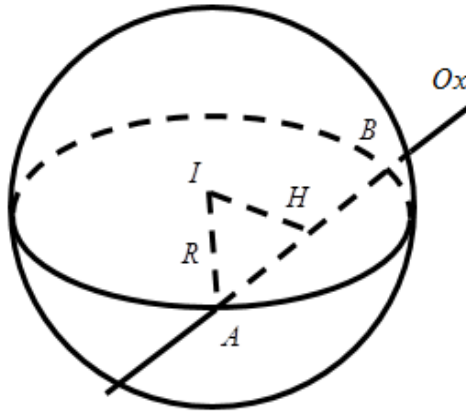
B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1; 0; 0)$.

$$IH = \sqrt{13} \Rightarrow R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = 4.$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Lời giải

Chọn B

Với điểm $M(1; -2; 3)$ thì hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1; 0; 0)$

Có $IM = \sqrt{13}$ vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; 0)$ bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 0^2 - 2.a.2 - 2.b.0 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 4^2 + 0^2 - 2.a.0 - 2.b.4 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 0^2 + 6^2 - 2.a.0 - 2.b.0 - 2.c.6 + d = 0 \\ 2^2 + 4^2 + 6^2 - 2.a.2 - 2.b.4 - 2.c.6 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ -8b + d = -16 \\ -12c + d = -36 \\ -4a - 8b - 12c + d = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0 \Rightarrow I(1; 2; 3) \text{ và } R = \sqrt{14} \Rightarrow R' = 2\sqrt{14}.$$

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1; 2; 3)$ và $R' = 2\sqrt{14}$: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2; 1; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$.

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy \Rightarrow M(0; 1; 0)$

Mặt cầu (S) tâm $I(2; 1; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM = \sqrt{13}$.

Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9; 1; 6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S) . Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64$.

B. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 144$.

C. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 36$.

D. $(x+9)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 25$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1; 1; 0), R = 2, II' = 10$.

Gọi R' là bán kính của mặt cầu (S') .

Theo giả thiết, ta có $R' + R = II' \Leftrightarrow R' = II' - R = 8$.

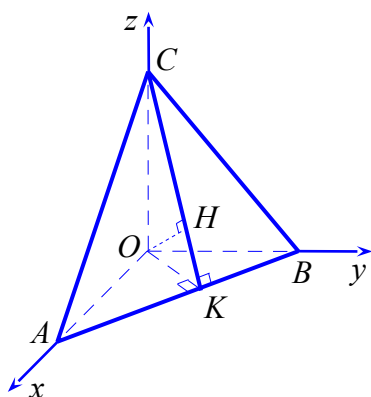
Khi đó phương trình mặt cầu (S') : $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 81$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. C. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. D. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Lời giải

Chọn C



Ta có H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Thật vậy :

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB \quad (1)$$

Mà $CH \perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (OHC) \Rightarrow AB \perp OH$ (*)

Tương tự $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OH$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OH \perp (ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R = OH = 3$.

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) là $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính bằng 2. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

B. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$.

D. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	SAI	ĐÚNG

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính bằng R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính bằng 2 là: $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5$

B. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 29$

C. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$

D. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

Ta có $R = IA = \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{5}$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$$

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3)$; $B(0; 3; -1)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 6$

B. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$

C. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 24$

D. Phương trình của mặt cầu có tâm là trung điểm AB và đi qua hai điểm A, B là:
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 6$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
----	----	----	----

ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

Tâm I mặt cầu là trung điểm của AB

$$I(1; 1; -2) \text{ bán kính } R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+4} = \frac{1}{2}\sqrt{24}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$$

Câu 58. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2; 0; 0), B(1; 3; 0), C(-1; 0; 3), D(1; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(1; -1; 1)$.

B. Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(0; 1; 1)$.

C. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=6$.

D. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{6}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D . Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1)$$

$$\text{Bán kính: } R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 59. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy và đi qua ba điểm $A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(2; -1; 0)$.

B. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(-2; 1; 0)$.

C. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{26}$.

D. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=26$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Gọi tâm $I(a;b;c)$ và phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Do $I \in (Oxy) \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by + d = 0$.

Ta có:
$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b - d = 21 \\ 2a - 6b - d = 11 \\ 4a + 4b - d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ d = -21 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{26}$$

Vậy $I(-2;1;0)$, $R = \sqrt{26}$

Câu 60. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $I(4;0;0)$..

B. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=14$.

C. Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$..

D. Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

Gọi $I(a;0;0) \in Ox \Rightarrow IA(1-a;1;2); IB(3-a;2;-3)$.

Do (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 5} = \sqrt{(3-a)^2 + 13} \Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R = IA = \sqrt{14}$.

$\Rightarrow (S): (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$.

B. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.

C. Mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$.

D. Mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$$d(I, (Oxy)) = d(I, (Oyz)) = d(I, (Oxz)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = R \quad (1)$$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1; -1; 4)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} IA = R \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = R^2 \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 = R^2 \\ a = c = -b = R > 0 \quad (do(1)) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 12a + 18 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 3 \\ b = -3 \\ R = 3 \end{cases} &\Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{aligned}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; -2)$ và bán kính bằng 3. Lập phương trình của (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính bằng R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Ta có mặt cầu tâm $I(0; 1; -2)$ bán kính bằng 3 có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$

Mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$ nên có bán kính $R = IA = 3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$. Lập phương trình mặt cầu có đường kính AB .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$

Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB .

Khi đó $I(1;0;2)$.

Bán kính của mặt cầu là: $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{\sqrt{14}}{2}$

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì O, A, B, C thuộc (S) nên ta có:

$$\begin{cases} d=0 \\ 1+2a+d=0 \\ 4-4c+d=0 \\ 9+6b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = 9$

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên $d(I, (Oyz)) = d(I, (Ozx)) = d(I, (Oxy))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = c \\ a = -b = -c \end{cases}$$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a = -b = c$ thì phương trình $AI = d(I, (Oxy))$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a = -b = c$ thì $I(a; -a; a)$

$$AI = d(I, (Oyx)) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Khi đó $P = a - b + c = 9$.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = \sqrt{3}$

Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ có tâm $I(3; 0; 2)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 + 1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy) \Leftrightarrow d(I, (Oxy)) = R$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt{3} \text{ (do } m \text{ dương)}.$$

Câu 68. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $2\sqrt{26}$

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x; y; 0)$.

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow l = 2R = 2\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26}$$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. Tính bán kính của (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $5\sqrt{2}$

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) . Vì (S) tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên ta có $IA \perp Ox$, $IB \perp Oy$, $IC \perp Oz$ hay A , B , C tương ứng là hình chiếu của I trên Ox , Oy , $Oz \Rightarrow I(a;b;c)$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Vì (S) đi qua A , B , C , D nên ta có:
$$\begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = d & (1) \\ 5 - 2b - 4c + d = 0 & (2) \end{cases}$$

Vì $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ nên $0 < d \neq 1$. Mặt khác, từ (1) $\Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{2d}$.

• TH1: Từ (1) $\Rightarrow b = c = \sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 - 6\sqrt{d} + d = 0 \Leftrightarrow d = 25$ (nhận).

$\Rightarrow R = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$.

• TH2: Từ (1) $\Rightarrow b = c = -\sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 + 6\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

• TH3: Từ (1) $\Rightarrow b = \sqrt{d}$, $c = -\sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 + 2\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

• TH4: Từ (1) $\Rightarrow b = -\sqrt{d}$, $c = \sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 - 2\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $R = \sqrt{2}$

Giả sử $M(x;y;z)$.

Ta có: $MA^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$; $MB^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2$; $MC^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$. $MA^2 = MB^2 + MC^2$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow -2x+1 = (y-2)^2 + x^2 + (z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R = \sqrt{2}$.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a \in [-1; 11]$

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a}$.

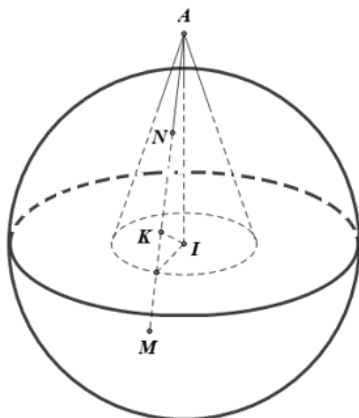
Do đó: $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}$

Câu 72. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3; 2; -2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM = 3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$



Gọi hình chiếu vuông góc của I trên MN là K .

Để thấy $AN = NK = \frac{1}{3}AM$, mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$

Có $AM \cdot AN = AI^2 - R^2 = 4 \Rightarrow AN^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow KN = AN = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IK = \sqrt{IN^2 - KN^2} = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Nhận thấy mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) chính là

mặt cầu tâm $I(1; 2; 3)$ có bán kính $IK = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$.

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(0; -1; 3)$.

Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Gọi $M(x; y; z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

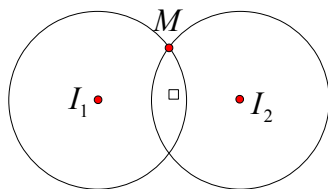
$\overrightarrow{AM} = (x; y+1; z-2)$, $\overrightarrow{BM} = (x-2; y+3; z)$, $\overrightarrow{CM} = (x+2; y-1; z-1)$, $\overrightarrow{DM} = (x; y+1; z-3)$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$

Từ giả thiết:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1; -2; 1)$, $R_1 = 2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1; 0; 2)$, $R_2 = 2$.



Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{5}$.

Để thấy: $r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.