

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT HẬU LỘC 3

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**ĐỊNH HƯỚNG CHO HỌC SINH LỚP 12 TRƯỜNG THPT HẬU
LỘC 3 GIẢI NHANH MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ PHỨC Ở MỨC
ĐỘ VẬN DỤNG**

Người thực hiện: Phạm Văn Châu
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc môn: Toán

THANH HOÁ, NĂM 2017

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU 1

1.1. Lí do chọn đề tài 1

1.2. Mục đích nghiên cứu 1

1.3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu 1

1.4. Phương pháp nghiên cứu 1

2. NỘI DUNG 1

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm 1

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm 3

2.2.1. Đối với giáo viên 3

2.2.2. Đối với học sinh 3

- Trường THPT Hậu Lộc 3 đóng trên địa bàn có nhiều xã khó khăn về kinh tế, khó khăn trong việc học tập vì vậy kiến thức cơ sở về môn toán của các em hầu hết tập trung ở mức độ trung bình. 3

2.3. Giải pháp giải quyết vấn đề 4

2.3.1. Phương pháp giải nhanh bài toán tìm tập hợp điểm liên qua đến đường tròn 4

2.3.2. Phương pháp giải nhanh một số bài toán liên đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của 11

2.4. Hiệu quả sáng kiến kinh nghiệm 17

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ 18

3.1. Kết luận 18

3.2. Kiến nghị 19

TÀI LIỆU THAM KHẢO 19

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lí do chọn đề tài

Trong chương trình SGK và nội dung thi tốt nghiệp cũng như thi tuyển sinh đại học trước đây thì các dạng toán về số phức được đưa ra rất căn bản, đa phần chỉ ở mức độ nhận biết, hoặc thông hiểu. Các câu hỏi mang tính vận dụng gần như không xuất hiện. Vì thế, khi Bộ giáo dục và Đào tạo lần lượt đưa ra các đề minh họa môn Toán cho kì thi THPT Quốc gia sắp tới, thì nhiều giáo viên và đa số học sinh gặp khó khăn trong việc tìm lời giải của các bài số phức ở mức độ vận dụng. Ngoài ra, các tài liệu tham khảo cho những dạng toán trên hầu như chưa có và chỉ xuất hiện rời rạc ở những bài toán đơn lẻ. Do đó việc tổng hợp và đưa ra phương pháp giải nhanh các dạng toán trên là rất cần thiết cho học sinh trong quá trình ôn thi THPT quốc gia. Xuất phát từ thực tế trên, với một số kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy và tham khảo một số tài liệu, tôi mạnh dạn chọn đề tài “ ***Định hướng cho học sinh lớp 12 trường THPT Hậu Lộc 3 giải nhanh một số bài tập số phức ở mức độ vận dụng***” nhằm giúp các em hiểu và có kỹ năng giải quyết tốt các bài tập để đạt kết quả tốt nhất trong các kì thi.

1.2. Mục đích nghiên cứu

Thông qua việc nghiên cứu các bài toán tổng quát giúp học sinh hiểu định hướng được cách làm bài tập, từ đó giải quyết một số bài toán số phức mức độ vận dụng một cách chính xác và nhanh chóng. Từ đó kích thích khả năng tư duy, sự ham hiểu biết của học sinh đối với môn học.

1.3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Kiến thức chương số phức trong chương trình toán THPT.
- Hệ thống và hướng dẫn phương pháp giải nhanh bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức trong mặt phẳng liên quan đến đường tròn
- Hệ thống và hướng dẫn phương pháp giải nhanh một số bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của modun số phức.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp nghiên cứu lí thuyết.
- Phương pháp nghiên cứu tài liệu và sản phẩm hoạt động sư phạm.
- Phương pháp tổng hợp.
- Phương pháp thống kê, so sánh.

2. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm

Những kiến thức cơ bản phần số phức

1. Định nghĩa số phức

Một số phức là một biểu thức có dạng $a + bi$, trong đó a và b là những số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$, kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.

i được gọi là *đơn vị ảo*, a được gọi là *phần thực* và b được gọi là *phần ảo* của số phức $z = a + bi$ [1]

2. Biểu diễn hình học của số phức

Số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hoặc $u(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy

3. Phép cộng và phép trừ số phức

a. Tổng của hai số phức:

* **Định nghĩa:** Tổng của hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) là số phức $z + z' = a + a' + (b + b')i$

* **Tính chất:** Cho $z, z', z'' \in \mathbb{C}$

+ Tính giao hoán: $z + z' = z' + z$.

+ Tính kết hợp: $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

+ Cộng với 0: $z + 0 = 0 + z = z$.

+ Số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thì số phức $-z = -a - bi$ được gọi là số phức đối của z . [1]

b. Phép trừ hai số phức:

* **Định nghĩa:** Hiệu của hai số phức z và z' là tổng của z và $-z'$, tức là:

$$z - z' = z + (-z')$$

4. Phép nhân số phức

* **Định nghĩa:** Tích của hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$. ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) là số phức $z.z' = (a.a' - b.b') + (a.b' + a'.b)i$

* **Tính chất:**

+ Tính chất giao hoán: $z.z' = z'.z$

+ Tính chất kết hợp: $(z.z')z'' = z.(z'.z'')$

+ Nhân với 1: $z.1 = 1.z = z$

+ Tính chất phân phối (của phép nhân với phép cộng) $z(z' + z'') = z.z' + z.z''$. [1]

5. Số phức liên hợp và mô đun của số phức

a. Số phức liên hợp:

* **Khái niệm:** Số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta gọi số phức $\bar{z} = a - bi$ là số phức liên hợp của z

* **Một số tính chất của số phức liên hợp**

$$+ \overline{\bar{z}} = z; \quad + \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \quad + \overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'; \quad + \overline{(z.z')} = \bar{z}.\bar{z}'; \quad + \left(\frac{\bar{z}'}{z} \right) = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$$

b. Modun của số phức:

* **Định nghĩa:** Modun của số phức $z = a + bi$, ($a, b \in R$) là một số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$ và được kí hiệu là $|z|$

* **Tính chất:**

$$+ |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}; + |\bar{z}| = |z|; + |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|; + \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}, z \neq 0; + |z + z'| \leq |z| + |z'|. [2]$$

6. Phép chia cho số phức khác 0

a. **Định nghĩa:**

+ Số phức nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$

+ Thương của $\frac{z'}{z}$ của phép chia z' cho z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z , tức là $\frac{z'}{z} = z' \cdot z^{-1}$

b. **Chú ý:** Nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{z \cdot z} [1]$

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

2.2.1. Đối với giáo viên

- Trước đây số phức trong chương trình thi quốc gia (từ năm 2009 – 2016) chỉ dừng lại ở mức độ cơ bản và trên cơ bản một chút (nhận biết, thông hiểu). Vì vậy việc giảng dạy và nghiên cứu của giáo viên chỉ dừng lại ở một mức độ cụ thể giúp các em làm tốt phần kiến thức cơ bản.

- Hiện tại với đề án thi mới của bộ giáo dục. Thông qua các đề minh họa của Bộ đưa ra và các đề thi thử của các sở, các trường, các câu hỏi trong phần số phức đã xuất hiện nhiều hơn. Đặc biệt những câu khó, hoặc rất khó và lạ (mức độ vận dụng cao) mà trước đây chưa xuất hiện thì nay xuất hiện tương đối nhiều. Tuy nhiên lại chưa có nhiều tài liệu nghiên cứu về vấn đề này vì vậy nguồn tham khảo của giáo viên còn hạn chế.

- Các giáo viên chưa có nhiều thời gian nghiên cứu những dạng toán mới, vì vậy chưa có nhiều kinh nghiệm trong giảng dạy và định hướng cho học sinh giải những bài toán số phức khó.

2.2.2. Đối với học sinh

- Trường THPT Hậu Lộc 3 đóng trên địa bàn có nhiều xã khó khăn về kinh tế, khó khăn trong việc học tập vì vậy kiến thức cơ sở về môn toán của các em hầu hết tập trung ở mức độ trung bình.

- Với lớp bài toán vận dụng, các em thường thụ động trong việc tiếp cận và phụ thuộc nhiều vào những kiến thức được giáo viên cung cấp chứ chưa có ý thức tìm tòi, sáng tạo cũng như tìm được niềm vui, sự hưng phấn khi giải các bài toán.

- Số lượng tài liệu tham khảo cho các em còn ít.

- Việc thi trắc nghiệm đòi hỏi học sinh không chỉ hiểu đúng bản chất bài toán mà còn phải tìm ra cách giải nhanh nhất để đạt kết quả tối đa.

- Học sinh còn lúng túng nhiều vì các dạng bài toán số phức vận dụng các em chưa được tiếp xúc nhiều, cũng như chưa được định hướng phương pháp đúng đắn nên chưa có nhiều kỹ năng giải loại bài tập này.

Trước tình hình đó tôi muốn đưa ra một ý tưởng giải quyết các bài toán vận dụng phần số phức bằng cách “định hướng” cho học sinh cách giải một số bài tập tổng quát một cách “chính xác” và “nhanh chóng”, giúp các em phát triển tư duy và kích thích sự ham học tập của các em.

2.3. Giải pháp giải quyết vấn đề

2.3.1. Phương pháp giải nhanh bài toán tìm tập hợp điểm liên qua đến đường tròn

Bài toán cơ bản: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = R > 0$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ

Giải:

Giả sử $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có: $|z - z_1| = R \Leftrightarrow |(x + yi) - (a + bi)| = R \Leftrightarrow |(x - a) + (y - b)i| = R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Như vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(I; R)$ trong đó I là điểm biểu diễn cho số phức z_1 trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Từ bài toán cơ bản trên liệu có giúp ta phát triển lên mức độ cao hơn và việc giải quyết bài toán nâng cao đó như thế nào?

Để trả lời những thắc mắc đó ta xét một ví dụ mở đầu.

Ví dụ mở đầu: (Đề minh họa lần I- Bộ GD-ĐT)^[3]

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 4$ biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = 4$

B. $R = 5$

C. $R = 20$

D. $R = 22$

* Trước hết ta giải bài toán bằng cách thông thường như sau:

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có:

$$w = (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow x + yi = (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow z = \frac{x + (y - 1)i}{3 + 4i} \Leftrightarrow z = \frac{[x + (y - 1)i](3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{[3x + 4(y - 1)] + [-4x + 3(y - 1)]i}{25}$$

Theo giả thiết $|z| = 4 \Leftrightarrow \frac{[3x + 4(y - 1)]^2 + [-4x + 3(y - 1)]^2}{25^2} = 16$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2 + 24x(y - 1) + 16(y - 1)^2 + 16x^2 - 24x(y - 1) + 9(y - 1)^2}{25^2} = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2 + 25(y - 1)^2}{25^2} = 16 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 400$$

suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$ bán kính $R = 20$. Chọn đáp án C.

** Giờ ta sẽ tiếp cận giải bài toán bằng hướng khác*

Cách 1: Xuất phát từ giả thiết:

Ta sẽ biến đổi giả thiết sao cho xuất hiện điều cần đi tìm, đó là xuất hiện w bằng cách thêm bớt (ta sẽ nhân thêm vào z với số $(3 + 4i)$ rồi cộng thêm i)

Từ giả thiết:

$$|z| = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{(3 + 4i)z + i}{3 + 4i} - \frac{i}{3 + 4i} \right| = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{w}{3 + 4i} - \frac{i}{3 + 4i} \right| = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{w - i}{3 + 4i} \right| = 4 \Leftrightarrow \frac{|w - i|}{|3 + 4i|} = 4$$

$$\Leftrightarrow |w - i| = 20$$

Theo bài toán cơ bản ta có tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 20$. Chọn đáp án C.

Cách 2: Xuất phát từ câu hỏi của đề bài:

Ta sẽ rút z từ câu hỏi của đề bài rồi thay vào giả thiết

Ta có: $w = (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow z = \frac{w - i}{3 + 4i}$

Ta thay vào giả thiết: $|z| = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{w - i}{3 + 4i} \right| = 4 \Leftrightarrow \frac{|w - i|}{|3 + 4i|} = 4 \Leftrightarrow |w - i| = 20$

Theo bài toán cơ bản ta có tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 20$. Chọn đáp án C

Nhận xét: Qua cách giải thông thường và cách tiếp cận mới ta thấy:

- Cách thông thường trình bày dài hơn, tính toán phức tạp hơn nên mất nhiều thời gian. Đặc biệt không phù hợp với xu thế của những bài toán thi trắc nghiệm.

- Với cách tiếp cận mới. ta thấy giải quyết bài toán một cách ngắn gọn, không yêu cầu tính toán phức tạp. Đặc biệt với cách giải như vậy không chỉ phù hợp

với bài toán tự luận mà còn rất hiệu quả đối với bài toán thi trắc nghiệm. Trình bày ít, tính toán không phức tạp, giúp học sinh làm đúng và tiết kiệm thời gian làm bài.

Từ nhận xét trên, tôi xây dựng nên hệ thống bài tập điển hình của dạng toán tìm tập hợp điểm dựa vào bài toán cơ bản mà qua đó giúp học sinh giải nhanh nhất, chính xác nhất và phù hợp với cả bài toán tự luận và bài toán trắc nghiệm.

Bài toán 1: Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, số phức z thỏa mãn $|z - z_2| = R$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức.

- a. $w = zz_2$ b. $w = \frac{z}{z_2}, z_2 \neq 0$
c. $w = z + z_2$ d. $w = z - z_2$

Giải:

- a. Từ giả thiết: $w = zz_2 \Leftrightarrow z = \frac{w}{z_2}$

$$\text{Ta có: } |z - z_1| = R \Leftrightarrow \left| \frac{w}{z_2} - z_1 \right| = R \Leftrightarrow \left| \frac{w - z_1 z_2}{z_2} \right| = R \Leftrightarrow |w - z_1 z_2| = |z_2| R$$

Kết luận: Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = zz_2$ là đường tròn tâm là điểm biểu diễn của số phức $z_1 \cdot z_2$ và bán kính $R \cdot |z_2|$ (1).

- b. Từ giả thiết: $w = \frac{z}{z_2} \Leftrightarrow z = w \cdot z_2$

$$\text{Ta có: } |z - z_1| = R \Leftrightarrow |wz_2 - z_1| = R \Leftrightarrow \left| z_2 \left(w - \frac{z_1}{z_2} \right) \right| = R \Leftrightarrow \left| w - \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{R}{|z_2|}$$

Kết luận: Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = \frac{z}{z_2}$ là đường tròn tâm

là điểm biểu diễn của số phức $\frac{z_1}{z_2}$ và bán kính $\frac{R}{|z_2|}$ (2).

- c. Từ giả thiết: $w = z + z_2 \Leftrightarrow z = w - z_2$

$$\text{Ta có: } |z - z_1| = R \Leftrightarrow |w - (z_2 + z_1)| = R$$

Kết luận: Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z + z_2$ là đường tròn tâm là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2$ và bán kính R . (3)

- d. Từ giả thiết: $w = z - z_2 \Leftrightarrow z = w + z_2$

$$\text{Ta có: } |z - z_1| = R \Leftrightarrow |w + z_2 - z_1| = R \Leftrightarrow |w - (z_1 - z_2)| = R$$

Kết luận: Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z - z_2$ là đường tròn tâm là điểm biểu diễn của số phức $z_1 - z_2$ và bán kính R (4).

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = 7$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z$ là một đường tròn. Tâm I và bán kính R của đường tròn đó là:

A. $I(-7; -1), R = 5$ B. $I(1; 7), R = 25$ C. $I(7; 1), R = 35$ D. $I(1; -7), R = 15$

Giải:

* **Cách 1:** Từ $w = (3 + 4i)z \Leftrightarrow z = \frac{w}{3 + 4i}$

$$\text{Ta có: } \left| \frac{w}{3 + 4i} - 1 + i \right| = 7 \Leftrightarrow \left| \frac{w - (7 + i)}{3 + 4i} \right| = 7 \Leftrightarrow |w - (7 + i)| = |3 + 4i| \cdot 7 \Leftrightarrow |w - (7 + i)| = 35$$

Đường tròn biểu diễn w có tâm $I(7; 1)$, bán kính $R = |3 + 4i| \cdot 7 = 35$. Chọn đáp án C

* **Cách 2:** Ta có: $|z - 1 + i| = \left| z - \underbrace{(1 - i)}_{z_1} \right| = 7$ $w = \underbrace{(3 + 4i)}_{z_2} z$

Áp dụng kết quả (1) ta có :

Tâm đường tròn biểu diễn w là điểm biểu diễn số phức $(3 + 4i)(1 - i) = 7 + i$, tức $I(7; 1)$, bán kính $R = |3 + 4i| \cdot 7 = 35$. Chọn đáp án C

Nhận xét: Điểm chú ý của bài toán này ở cách 2 là các em cần xác định chính xác $z_1; z_2; R$. Đặc biệt $z_1 = 1 - i$ chứ không phải $z_1 = -1 + i$.

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{z}{2 + 3i}$ là đường tròn. Tâm I và bán kính R của đường tròn đó là:

$$A. I\left(\frac{6}{13}; \frac{1}{13}\right); R = 3\sqrt{13} \quad B. I\left(\frac{8}{13}; \frac{1}{13}\right); R = 3\sqrt{13}$$

$$C. I\left(\frac{6}{13}; \frac{1}{13}\right); R = \frac{3\sqrt{13}}{13} \quad D. I\left(\frac{8}{13}; \frac{1}{13}\right); R = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Giải:

* **Cách 1:** Từ $w = \frac{z}{2 + 3i} \Leftrightarrow z = (2 + 3i)w$. Ta có:

$$\begin{aligned} |(2 + 3i)w - 1 - 2i| = 3 &\Leftrightarrow \left| (2 + 3i) \left(w - \frac{1 + 2i}{2 + 3i} \right) \right| = 3 \Leftrightarrow |2 + 3i| \left| w - \left(\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i \right) \right| = 3 \\ \Leftrightarrow \left| w - \left(\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i \right) \right| &= \frac{3}{|2 + 3i|} \Leftrightarrow \left| w - \left(\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i \right) \right| = \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

Đường tròn biểu diễn w có tâm $I\left(\frac{8}{13}; \frac{1}{13}\right)$, bán kính $R = \frac{3\sqrt{13}}{13}$. Chọn đáp án D.

* **Cách 2:** Ta có:

$$|z - 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow \left| z - \underbrace{(1 + 2i)}_{z_1} \right| = \underbrace{3}_R \text{ và } w = \frac{z}{\underbrace{2 + 3i}_{z_2}}$$

Áp dụng kết quả (2) ta có :

- Tâm đường tròn biểu diễn w là điểm biểu diễn số phức $\frac{1+2i}{2+3i}$, tức $I\left(\frac{8}{13}; \frac{1}{13}\right)$,

bán kính $R = \frac{3}{|2+3i|} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$. Chọn đáp án D.

Nhận xét: Học sinh cần xác định chính xác các yếu tố $z_1; R; z_2$. Ngoài cách làm trên học sinh cũng có thể vận dụng cách làm ở ví dụ 1)

Chú ý: Nếu là bài toán trắc nghiệm ta áp dụng luôn kết quả bài toán tổng quát để cho kết quả nhanh nhất.

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| = 3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = z + 3 - 4i$ là đường tròn. Tâm I của đường tròn đó là:

A. $I(-5; 1)$ B. $I(5; 5)$ C. $I(5; -1)$ D. $I(5; -5)$

Giải:

$$\text{Ta có: } |z - 2 + i| = 3 \Leftrightarrow \left| z - \underbrace{(2 - i)}_{z_1} \right| = 3 \quad w = z + \underbrace{3 - 4i}_{z_2}$$

Áp dụng kết quả (3) ta có :

- Tâm đường tròn biểu diễn w là điểm biểu diễn số phức $(2 - i) + (3 - 4i) = 5 - 5i$, tức $I(5; -5)$. Chọn đáp án D.

Nhận xét: Học sinh cần xác định chính xác các yếu tố $z_1; R; z_2$ để áp dụng kết quả (3), Ngoài ra ta cũng có thể áp dụng kết quả (4) với chú ý $z_2 = -3 + 4i$

Ví dụ 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 + i| = 2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \bar{z} - (2 + 3i)$ là đường tròn. Tâm I đường tròn đó là:

A. $I(3; 5)$ B. $I(-3; 2)$ C. $I(-3; -2)$ D. $I(-3; -5)$

Giải:

Ta biến đổi giả thiết

$$|z + 1 + i| = 2 \Leftrightarrow \left| \overline{z + 1 + i} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \bar{z} + \overline{1 + i} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \bar{z} - \underbrace{(-1 - i)}_{z_1} \right| = 2 \text{ và } w = \bar{z} - \underbrace{(2 + 3i)}_{z_2}$$

Áp dụng kết quả (4) ta có :

- Tâm đường tròn cần tìm là điểm biểu diễn số phức $(-1+i) - (2+3i) = -3-2i$, tức $I(-3;-2)$. Chọn đáp án C.

*** Nhận xét:** Mấu chốt bài toán này là biến đổi sao cho giả thiết và phần kết luận phải có chung z hoặc $\bar{z}$. Và ta biến đổi giả thiết để dễ dàng hơn dựa vào tính chất số phức liên hợp.

Bài toán 2: Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$ số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = R$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức

Giải:

Từ $w = z_2 z + z_3 \Rightarrow z = \frac{w - z_3}{z_2}$ thay vào giả thiết

$$|z - z_1| = R \Leftrightarrow \left| \frac{w - z_3}{z_2} - z_1 \right| = R \Leftrightarrow \left| \frac{w - z_3 - z_1 z_2}{z_2} \right| = R \Leftrightarrow |w - (z_3 + z_1 z_2)| = |z_2| R.$$

Kết luận: Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn, tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_2 z_1 + z_3$, bán kính $|z_2| R$ (5)

Nhận xét: Thực chất của bài toán 2 là bài toán tổng quát cho bốn kết luận ở bài toán 1 trên. Vì vậy học sinh cũng có thể chỉ cần nắm vững cách giải và kết quả bài toán 2 thì có thể làm được cả hai bài toán.

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 4$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (2+i)z - 5 - 2i$ là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn đó.

A. $I(1;5); R=3$ B. $I(-1;5); R=4\sqrt{5}$ C. $I(-1;-5); R=\sqrt{5}$ D. $I(1;-5); R=2\sqrt{3}$

Giải:

$$\text{Ta có: } |z - 3 - 2i| = 4 \Leftrightarrow \left| z - \underbrace{(3 + 2i)}_{z_1} \right| = 4 \text{ và } w = \underbrace{(2+i)}_{z_2} z + \underbrace{(-5-2i)}_{z_3}$$

Áp dụng kết quả (5) ta có :

- Tâm đường tròn cần tìm là điểm biểu diễn số phức $(2+i)(3+2i) + (-5-2i) = -1+5i$, tức $I(-1;5)$, bán kính $R = |2+i| \cdot 4 = 4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B.

Nhận xét: Học sinh cần xác định chính xác các yếu tố $z_1; R; z_2$ để áp dụng kết quả (5).

Ví dụ 6: (Chuyên đại học Vinh lần 3)^[4]

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1-2i)\bar{z} + 3i$ là:

A. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 20$

B. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 2\sqrt{5}$

C. Đường tròn $x^2 + (y + 3)^2 = 20$

D. Đường tròn $(x - 3)^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$

Giải:

Ta có: $|z| = 2 \Leftrightarrow |\bar{z}| = 2 \Leftrightarrow \left| \bar{z} - \underset{z_1}{0} \right| = 2$

$$w = \underset{z_2}{(1 - 2i)} \bar{z} + \underset{z_3}{3i}$$

Áp dụng kết quả (5) ta có :

- Tâm đường tròn cần tìm là điểm biểu diễn số phức $(1 - 2i)0 + 3i = 3i$, tức $I(0;3)$, bán kính $R = |1 - 2i| = 2\sqrt{5}$. Chọn đáp án A

Nhận xét: ví dụ này ngoài việc học sinh cần xác định chính xác các yếu tố $z_1; R; z_2$ để áp dụng kết quả (5) cần chú ý:

- Biến đổi giả thiết hoặc kết luận(nên biến đổi giả thiết) để cùng xuất hiện z hoặc $\bar{z}$.

- Chú ý $R = 2\sqrt{5}$ thì trong phương trình đường tròn là $R^2 = 20$

Ví dụ 7: Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{1+z}{iz} + i \right| = 1$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số

phức $w = (3 - i)\frac{1}{z} + i$ là một đường tròn. Bán kính đường tròn cần tìm là:

A. $R = \sqrt{10}$

B. $R = 2\sqrt{11}$

C. $R = \sqrt{13}$

D. $R = \sqrt{14}$

Giải:

Đặt $t = \frac{1+z}{iz} \Rightarrow z = \frac{1}{it - 1}$

Ta có $|t + i| = 1$ và $w = (3 - i)(it - 1) + i = (1 + 3i)t + (3 + 2i)$

Áp dụng kết quả (5) ta có :

Bán kính đường tròn cần tìm $R = |1 + 3i| = \sqrt{10}$. Chọn đáp án A

Nhận xét: Bài toán này cần hướng dẫn học sinh cách đặt ẩn phụ t sau đó rút z theo t thay vào. Nếu không nắm được mấu chốt của đặt ẩn phụ thì học sinh sẽ lúng túng vì không biết có phải dạng bài toán đã học để áp dụng.

Ví dụ 8: Cho số phức thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z+i} - 1 \right| = 1$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số

phức $w = \frac{1+i}{z+i} - 2$ là một đường tròn. Tâm đường tròn cần tìm là:

A. $I(1;2)$

B. $I(0;-2)$

C. $I(-1;2)$

D. $I(-2;0)$

Giải:

$$\text{Đặt } t = \frac{z-1}{z+i} \Rightarrow z = \frac{it+1}{1-t}$$

$$\text{Ta có: } |t-1|=1 \text{ và } w=1-t-2=-t-1$$

Tâm đường tròn là điểm biểu diễn cho số phức $(-1)1 + (-1) = -2$

Tâm đường tròn cần tìm $I(-2;0)$. Chọn đáp án D

2.3.2. Phương pháp giải nhanh một số bài toán liên đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Xuất phát vẫn từ bài toán cơ bản: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = R > 0$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ. Ta phát triển bài toán trên theo một hướng khác, đó là tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của modun số phức z và hơn thế nữa không chỉ dừng ở bài toán liên quan đến đường tròn, ta có thể mở rộng bài toán liên quan đến các hình khác.

Bài toán 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = R > 0$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z|$.

Giải:

Theo kết quả bài toán cơ bản:

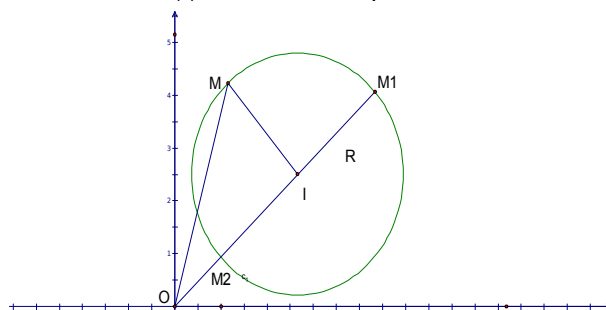
Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm I (I là điểm biểu diễn cho số phức z_1) bán kính R

Khi đó

$$|z| = OM \leq OI + IM = OI + IM_1 = OI + R$$

$$|z| = OM \geq |OI - IM| = |OI - R|$$

$$\text{nên } \begin{cases} \text{Max}|z| = OM_1 = OI + R = |z_1| + R \\ \text{Min}|z| = OM_2 = |OI - R| = ||z_1| - R| \end{cases} \quad (2.1)$$



Nhận xét: Một số bạn nhìn vào hình vẽ (của một trường hợp) dẫn đến kết luận nhầm $\text{Min}|z| = OI - R$.

Từ kết quả bài toán toán 1, ta áp dụng để tìm nhanh kết quả các ví dụ sau:

Ví dụ 1:

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$ thì $|z|$ có giá trị lớn nhất là:

A. $3\sqrt{5}$

B. 5

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{13}$

Giải:

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$. Theo (2.1) ta có

$Max|z| = \sqrt{2^5 + 4^2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. Chọn đáp án A.

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$ thì $|z|$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 4

B. 3

C. 7

D. 6

Giải:

Ta có: $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left| (1+i)z + \frac{(1-7i)(1+i)}{1+i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i||z - (3+4i)| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - (3+4i)| = 1$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R=1$

Theo (2.1) ta có: $Max|z| = OI + R = \sqrt{3^2 + 4^2} + 1 = 6$. Chọn đáp án B.

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$ thì $|z|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. 3

Giải:

$$\text{Ta có: } \Leftrightarrow |-iz + 1| = 1 \Leftrightarrow |-i||z - \frac{1}{-i}| = 1 \Leftrightarrow |z + i| = 1 \Leftrightarrow |z - (-i)| = 1$$

Tập hợp điểm M biểu diễn cho số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$ và bán kính $R=1$.

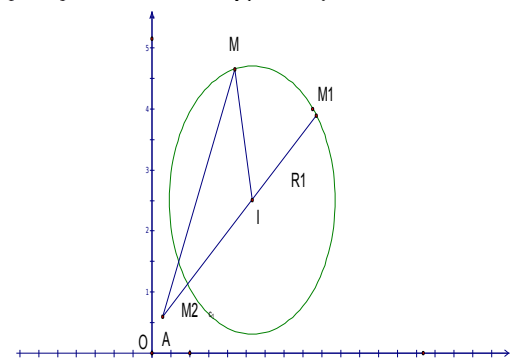
Theo (2.1) ta có: $Max|z| = OI + R = \sqrt{0^2 + 1^2} + 1 = 2$. Chọn đáp án B.

Bài toán 2: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = R_1$ ($R_1 > 0$). Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$

Giải:

Gọi I, A, M lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z . Khi đó $IA = |z_1 - z_2| = R_2$
 $AM \leq AI + IM = R_2 + R_1$ dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_1$
 $AM \geq |AI - IM| = |R_1 - R_2|$ dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} MaxP = AM_1 = R_1 + R_2 \\ MinP = AM_2 = |R_1 - R_2| \end{cases} \quad (2.2)$$



Nhận xét: Muốn tìm các số phức sao cho P_{Max}, P_{Min} ta xác định giao điểm M_1, M_2 của đường tròn (I, R_1) và đường thẳng AI

Từ kết quả bài toán 1, ta áp dụng để tìm nhanh kết quả các ví dụ sau:

Ví dụ 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 - i|$ là

- A. 7 B. 3 C. 2 D. 5

Giải:

Ta có: $|z - (3 - 2i)| = 2 = R_1$ và $|z - (-1 + i)|$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = |(3 - 2i) - (-1 + i)| = 5 = R_2$$

Theo (2.2) ta có: $\min |z + 1 - i| = |R_1 - R_2| = |2 - 5| = 3$. Chọn đáp án B.

Ví dụ 5: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|\bar{z} + 4i|$ bằng

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5} - 1$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. 3

Giải

$$\text{Ta có: } |\bar{z} - 2 - 2i| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z - 2 - 2i}| = 1 \Leftrightarrow \left| z - \underbrace{(2 - 2i)}_{z_1} \right| = 1 \text{ và } |\bar{z} + 4i| = \left| \bar{z} - \underbrace{(-4i)}_{z_2} \right|$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = |(2 - 2i) - (-4i)| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2} = R_2$$

Theo (2.2) ta có: $\min |z + 4i| = |R_1 - R_2| = |1 - 2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} - 1$. Chọn đáp án C

Ví dụ 6: (THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An)[4]

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là:

- A. $\sqrt{13} + 2$ B. 4 C. 6 D. $\sqrt{13} + 1$

Giải:

Từ giả thiết ta có:

$$|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z - (2 + 3i)}| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - (2 - 3i)| = 1 \text{ và } |\bar{z} - (-1 - i)|$$

$$R_2 = |(2 - 3i) - (-1 - i)| = |3 - 2i| = \sqrt{13}$$

Theo (2.2) ta có: $\Rightarrow \max |\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{13} + 1$. Chọn đáp án D.

Bài toán 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = R > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $P = k_1|z - z_1| + k_2|z + z_2|$, ($k_1; k_2 > 0$) biết

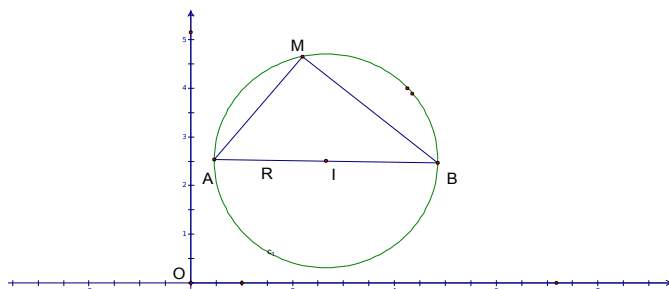
$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = \frac{|z_2 - z_3|}{2} = R (*)$$

Giải:

Gọi M, I, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức z, z_1, z_2, z_3

Bài toán trên ta có thể phát biểu lại bằng ngôn ngữ hình học như sau:

Cho đường tròn (I, R) , AB là đường kính đường tròn (I, R) . Tìm M thuộc đường tròn (I, R) sao cho $k_1MA + k_2MB$ lớn nhất.



$$(k_1MA + k_2MB)^2 \leq (k_1^2 + k_2^2)(MA^2 + MB^2) = (k_1^2 + k_2^2)AB^2$$

$$\Rightarrow MA + MB \leq \sqrt{k_1^2 + k_2^2} AB = 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2} R$$

$$MA + MB \text{ lớn nhất bằng } 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2} R$$

$$\text{Hay } P_{Max} = 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2} R \quad (2.3)$$

Áp dụng bài toán tổng quát ta giải các ví dụ sau đây:

Ví dụ 7: (THPT Chu Văn An – Hà nội)^[4]

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = |z + i| + |z - 2 - i|$

$$A. \text{Max}T = 8\sqrt{2} \quad B. \text{Max}T = 4 \quad C. \text{Max}T = 4\sqrt{2} \quad D. \text{Max}T = 8$$

Giải:

Ta có $z_1 = 0 + i, z_2 = 0 + i, z_3 = 2 + i$ thỏa mãn (*)

Theo (2.3) ta có:

$$T_{Max} = 2\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2} = 4. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Ví dụ 8: (Sở GD và ĐT Bắc Ninh)

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$ là

$$A. 3\sqrt{10} \quad B. 2\sqrt{10} \quad C. 6 \quad D. 4\sqrt{2}$$

Giải:

$$\text{Ta có: } P = |1 + z| + 3|1 - z| = |z + 1| + 3|z - 1|$$

$$z_1 = 0 + 0i, z_2 = 1 + 0i, z_3 = -1 + 0i \text{ thỏa mãn (*)}$$

$$\text{Theo (2.3) ta có: } P_{Max} = 2\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot 1 = 2\sqrt{10}. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Ví dụ 9: (THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội)^[4]

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = |1 + z| + 2|z - 1|$

A. $MaxT = 2\sqrt{5}$ B. $MaxT = 2\sqrt{10}$ C. $MaxT = 3\sqrt{5}$ D. $MaxT = 3\sqrt{2}$

Giải:

Ta có:

$z_1 = 0 + 0i, z_2 = 1 + 0i, z_2 = -1 + 0i$ thỏa mãn (*)

Theo (2.3) ta có: $T_{Max} = 2\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot 1 = 2\sqrt{5}$. Chọn đáp án A.

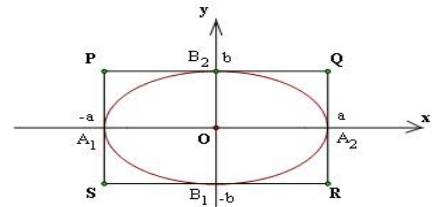
Bài toán 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z - c| + |z + c| = k$ ($k > 2c > 0$) (**). Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $|z|$.

Giải:

Gọi M điểm biểu diễn cho z , $F_1(-c; 0); F_2(c; 0)$

Khi đó ta có $|z - c| + |z + c| = k$ ($k > 0$) $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = k \Leftrightarrow M \in \text{elip}(E)$ nhận F_1, F_2 làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn $2a = k$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Max}|z| = a = \frac{k}{2} \\ \text{Min}|z| = b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{k^2 - 4c^2}}{2} \end{cases} \quad (2.4)$$



Từ kết quả bài toán 4, ta áp dụng để tìm nhanh kết quả các ví dụ sau:

Ví dụ 10: (Đề thi THPT lần 5 – 2017)^[4]

Cho số phức z thỏa mãn $|z + 4| + |z - 4| = 10$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z|$. Tính $P = M - m^2$

A. $P = -6$ B. $P = -13$ C. $P = -5$ D. $P = -4$

Giải:

Đề bài thỏa mãn (**). Theo (2.4) ta có:

$$\begin{cases} \text{Max}|z| = \frac{10}{2} = 5 \\ \text{Min}|z| = \frac{\sqrt{10^2 - 4 \cdot 4^2}}{2} = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow P = M - m^2 = 5 - 3^2 = -4$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| + |z + 1| = 4$, gọi M là giá trị lớn nhất của $w = 2iz$. Khi đó M bằng.

A. $M = 2$ B. $M = 2\sqrt{2}$ C. $M = 4$ D. $M = 6$

Giải:

Ta có: $|w| = |2iz| = |2i||z| = 2|z|$

$|w|$ lớn nhất khi $|z|$ lớn nhất

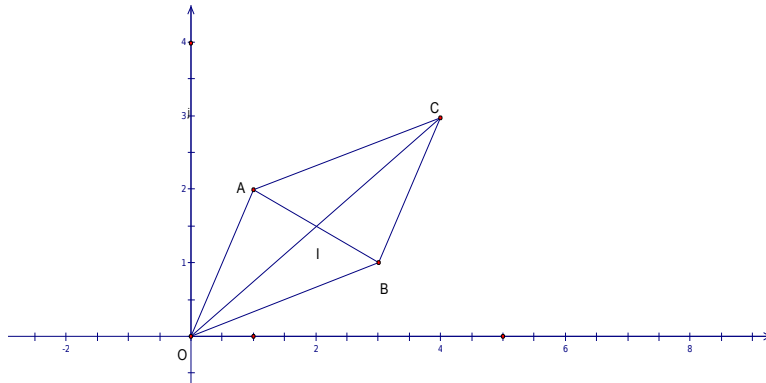
Đề bài thỏa mãn (**). Theo (2.4) ta có: $\text{Max}|z| = \frac{4}{2} = 2$

Vậy $M = 2.2 = 4$. Chọn đáp án C.

Bài toán 5: Cho hai số z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = m + ni$ và $|z_1 - z_2| = p > 0$ (***).
Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

Giải:

Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức $z_1, z_2, z_1 + z_2$



Khi đó ta có thể phát biểu bài toán trên bằng ngôn ngữ hình học như sau:

Cho hình bình hành $OACB$ (O là gốc tọa độ), biết $AB = p$, $C(m; n)$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = OA + OB$

Ta có:

$$P^2 = (OA + OB)^2 \leq 2(OA^2 + OB^2) = 4OI^2 + AB^2 = OC^2 + AB^2 = m^2 + n^2 + p^2$$

$$\Rightarrow P \leq \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

$$P_{\text{Max}} = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } OACB \text{ là hình thoi.}$$

$$\text{Kết luận: } P_{\text{Max}} = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \quad (2.5)$$

Ví dụ 12: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$. [5]

A. $4\sqrt{6}$

B. $5 + 3\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{26}$

D. $34 + 3\sqrt{2}$

Giải:

Đề bài thỏa mãn (***)

Theo (2.5) ta có:

$$P \leq \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = \sqrt{8^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{26} \Rightarrow P_{\text{Max}} = 2\sqrt{26}. \text{ Chọn đáp án C}$$

Ví dụ 13: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\overline{z_1 + z_2} = 10 + 5i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |\overline{z_2}|$

A. $\sqrt{112}$

B. $3\sqrt{15}$

C. $2\sqrt{56}$

D. $\sqrt{127}$

Giải:

Ta có: $\overline{z_1 + z_2} = 10 + 5i \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 10 - 5i$ và $P = |z_1| + |\overline{z_2}| = |z_1| + |z_2|$

Đề bài khi đó thỏa mãn (***)

Theo (2.5) ta có: $P_{\max} = \sqrt{10^2 + (-5)^2} + 2^2 = \sqrt{127}$. Chọn đáp án D.

2.4. Hiệu quả sáng kiến kinh nghiệm

Việc áp dụng sáng kiến kinh nghiệm vào quá trình nghiên cứu và giảng dạy đã mang lại những kết quả tích cực.

- Đối với bản thân tôi sau khi nghiên cứu kỹ những kiến thức liên quan phần số phức, đặc biệt là những bài toán số phức mức độ vận dụng, giúp tôi có những kiến thức mới và kinh nghiệm hơn trong việc giảng dạy cho các em. Từ đó định hướng cho các em cách phát hiện và tư duy trong việc giải các bài toán ở mức độ vận dụng cao.

- Với các đồng nghiệp, việc sử dụng tài liệu nhỏ này như một tài liệu để tham khảo và hướng dẫn cho học sinh khi làm toán.

- Đối với học sinh sau khi được áp dụng cách tiếp cận mới trong việc giải toán giúp học sinh phát triển tư duy hơn. Học sinh có khả năng định hướng được cách làm với những dạng bài tập khó khác. Học sinh tự tin hơn trong quá trình làm bài, tạo hứng thú cho các em trong quá trình học tập. Việc làm các bài tập số phức nói chung và số phức ở mức độ vận dụng cao ở các em trở nên nhanh chóng và chính xác. Cụ thể, tôi cho các em một số bài kiểm tra phần số phức trong từng quá trình trước và sau khi áp dụng phương pháp giải mới bài tập số phức, kết quả như sau:

Bài kiểm tra số 1: (Trước khi áp dụng sáng kiến)

Đề bài:

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - (3 - 4i)| = 2$

A. Đường tròn tâm $I(-2; -1), R = 2$ B. Đường tròn tâm $I(3; -4), R = 1$

C. Đường tròn tâm $I(-2; 1), R = 2$ D. Đường tròn tâm $I(3; -4), R = 2$

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 3 - 2i| = 3$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = z + 1 + 3i$ là

A. Đường tròn tâm $I(-2; -5), R = 3$ B. Đường tròn tâm $I(2; 5), R = 3$

C. Đường tròn tâm $I(-2; 5), R = 3$ D. Đường tròn tâm $I(2; -5), R = 3$

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $|z|_{\max} = \sqrt{2} + 1$ B. $|z|_{\max} = \sqrt{2} - 1$; C. $|z|_{\max} = 1$; D. $|z|_{\max} = 2$

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| + |x + 2| = 6$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là:

A. $|z|_{\min} = 3$ B. $|z|_{\min} = 2$ C. $|z|_{\min} = \sqrt{2}$ D. $|z|_{\min} = \sqrt{5}$

Kết quả:

Lớp 12C4	Chỉ đúng 1 câu	Chỉ đúng 2 câu	Chỉ đúng 3 câu	Đúng 4 câu	Tổng
Số lượng	25 – 52%	15 – 31%	8 – 17%	0 – 0%	48

Bài kiểm tra số 2: (Sau khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm)

Câu 1: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - 2 + i| = 1$ là:

- A. Đường tròn tâm $I(-2; -1), R = 1$ B. Đường tròn tâm $I(2; 1), R = 1$
 C. Đường tròn tâm $I(-2; 1), R = 1$ D. Đường tròn tâm $I(-1; 2), R = 1$

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{iz + 1}{z + 2} - i \right| = 1$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \frac{-1 - i}{z + 2}$ là đường tròn. Tâm đường tròn đó có bán kính là:

- A. $R = 2$ B. $R = \sqrt{2}$ C. $R = \sqrt{3}$ D. $R = 3$

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $P = |z - 2| + 2|z - 1 + i|$ là:

- A. $P = \sqrt{5}$ B. $P = 5\sqrt{2}$ C. $P = \sqrt{3}$ D. $P = 2\sqrt{5}$

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $P = |z + 2| + |z + 2i|$ là

- A. $P = \sqrt{17 - 4\sqrt{2}}$ B. $P = \sqrt{17 - \sqrt{2}}$ C. $P = 17 - \sqrt{2}$ D. $P = 2\sqrt{17}$

Kết quả:

Lớp 12C4	Chỉ đúng 1 câu	Chỉ đúng 2 câu	Chỉ đúng 3 câu	Đúng 4 câu	Tổng
Số lượng	5 – 10%	15 – 31%	15 – 31%	13 – 28%	48

So sánh kết quả thu được từ hai bảng ta thấy sau khi áp dụng phương pháp giải nhanh thì học sinh làm bài tốt hơn và khả năng tư duy phát triển hơn. Diễn hình là có những câu khó dạng mới gặp (Câu 4 đề 2) các em vẫn làm tốt.

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ**3.1. Kết luận**

Qua việc vận dụng đề tài đã nghiên cứu vào trong quá trình giảng dạy và học tập của học sinh đã thu được những kết quả tích cực như bảng số liệu đã phân tích. Đề tài đã giúp cho giáo viên rất nhiều trong việc truyền đạt tư tưởng, phương pháp và kiến thức cho học sinh. Bản thân học sinh khi được giảng dạy thông qua đề tài đã giúp các em phát triển được tư duy, biết định hướng để giải một bài toán. Khơi dậy ở các em niềm thích thú, sự ham học hỏi và đặc biệt giúp các em đạt hiệu quả cao nhất khi làm bài tập cũng như thi THPT quốc gia.

Việc áp dụng đề tài không chỉ dừng lại ở một số bài toán số phức ở mức độ vận dụng cao, mà còn có thể mở rộng hơn nữa ở nhiều dạng toán khác. Bản

thân đề tài là động lực cho mỗi giáo viên và học sinh tìm tòi phát triển hơn nữa để có được những phương pháp cách truyền thụ kiến thức và cảm hứng cho học sinh tốt hơn.

3.2. Kiến nghị

Đối với sở giáo dục và đào tạo Thanh Hóa: Thông qua việc chăm sóc kiến kinh nghiệm hàng năm, lựa chọn những đề tài có chất lượng và cần phổ biến rộng rãi cho các trường trong tỉnh để những trường có điều kiện tương đồng triển khai áp dụng hiệu quả. Nên đưa những SKKN có chất lượng vào mục “tài nguyên” của sở để các giáo viên toàn tỉnh có thể tham khảo một cách rộng rãi.

Đối với trường THPT Hậu lộc 3: Mỗi sáng kiến kinh nghiệm được lựa chọn cần được phổ biến rộng rãi trong phạm vi tổ, nhóm. Cần có những bản lưu trong thư viện để giáo viên và học sinh tham khảo.

Đối với tổ chuyên môn: Cần đánh giá chi tiết những mặt đạt được, những hạn chế và hướng phát triển của đề tài một cách chi tiết cụ thể để hoàn thiện sáng kiến hơn nữa.

Đối với đồng nghiệp: Trao đổi ý tưởng, kinh nghiệm và hỗ trợ trong việc áp dụng rộng rãi sáng kiến trong mỗi lớp học của mình. Phản hồi những mặt tích cực, những mặt hạn chế của sáng kiến.

Đề tài nghiên cứu trong thời gian hạn chế, rất mong Hội đồng khoa học Sở giáo dục và đào tạo Thanh Hóa nghiên cứu, góp ý bổ sung để sáng kiến hoàn thiện hơn nữa.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	Thanh Hóa, ngày 16 tháng 5 năm 2017 Tôi xin cam đoan đây là sáng kiến kinh nghiệm của tôi, không sao chép nội dung của người khác Người viết sáng kiến Gv: Phạm Văn Châu
--------------------------------	---

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. SGK giải tích 12 nâng cao – Nhà xuất bản giáo dục 2009
2. Sách bài tập 12 nâng cao – Nhà xuất bản giáo dục 2009
3. Đề minh họa lần 1, lần 2, lần 3 của bộ giáo dục và đào tạo năm học 2016-2017
4. Website: <http://www.dethithu.net>

5. Website: <http://www.luyenthithukhoa.vn>