Người làm : Phạm Thị Thảo
Zalo : Thao - Số đt zalo : 0396464685
Email : thaohp2011@gmail.com

CĐ 11: ĐỒNG DƯ THỨC

Dạng 1. Sử dụng đồng dư thức chứng minh chia hết

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ 2018-2019).

Chứng tỏ rằng $M=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4+1\right)+25$ chia hết cho 10^2

Lời giải.

Ta có : $M=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+4+1\right)+25=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+4\right)+\left(75+25\right)$

$=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)+100$

Ta có : $75\equiv -25\left(\bmod 100\right)$

$\Rightarrow 75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)\equiv -25\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)\left(\bmod 100\right)$

Lại có : $-25.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)=-25.4.\left(4^{2017}+4^{2016}+...+4+1\right)$

$=-100\left(4^{2017}+4^{2016}+...+4+1\right)\vdots 100$

$\Rightarrow 75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)\equiv 0\left(\bmod 100\right)$

Hay $75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)\vdots 100$

Do đó $75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)+100\vdots 100$

Vậy $M=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+4+1\right)+25$ chia hết cho 10^2

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Hiền Quan 2018-2019).

Chứng minh rằng $7^6+7^5-7^4$ chia hết cho 55.

Lời giải.

Ta có : $7^2=49$

Mà $49\equiv -1\left(\bmod 5\right)\Rightarrow 7^2\equiv -1\left(\bmod 5\right)$

$\Rightarrow 7^4=\left(7^2\right)^2\equiv\left(-1\right)^2\left(\bmod 5\right)\Rightarrow 7^4\equiv 1\left(\bmod 5\right)$

Lại có $7^5=7^4.7\equiv 1.7\left(\bmod 5\right)\Rightarrow 7^5\equiv 7\left(\bmod 5\right)$

Và $7^6=7^4.7^2\equiv 1.49\left(\bmod 5\right)\Rightarrow 7^6\equiv -1\left(\bmod 5\right)$

Nên $7^6+7^5-7^4\equiv\left(-1+7-1\right)\left(\bmod 5\right)\Rightarrow 7^6+7^5-7^4\equiv 0\left(\bmod 5\right)$

$\Rightarrow 7^6+7^5-7^4\vdots 5$

Vì $49\equiv 5\left(\bmod 11\right)\Rightarrow 7^2\equiv 5\left(\bmod 11\right)$

$\Rightarrow 7^4=\left(7^2\right)^2\equiv 5^2\left(\bmod 11\right)\Rightarrow 7^4\equiv 3\left(\bmod 11\right)$

Lại có $7^5=7^4.7\equiv 3.7\left(\bmod 11\right)\Rightarrow 7^5\equiv -1\left(\bmod 11\right)$

Và $7^6=\left(7^2\right)^3\equiv 5^3\left(\bmod 11\right)\Rightarrow 7^6\equiv 4\left(\bmod 11\right)$

Nên $7^6+7^5-7^4\equiv\left(4-1-3\right)\left(\bmod 11\right)\Rightarrow 7^6+7^5-7^4\equiv 0\left(\bmod 11\right)$

$\Rightarrow 7^6+7^5-7^4\vdots 11$

Do 5 và 11 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $7^6+7^5-7^4$ chia hết cho 55

Câu 3. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018-2019).

Chứng minh rằng: $2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{99}+2^{100}$ chia hết cho 31.

Lời giải.

Đặt $2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{99}+2^{100}=A$

Ta có $2A=2(2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{99}+2^{100})=2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{100}+2^{101}$

$\Rightarrow 2A-A=(2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{100}+2^{101})-(2+2^2+2^3+2^4+...+2^{99}+2^{100})$

$\Rightarrow A=2^{101}-2$

Vì $2^5=32\equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow 2^{100}=(2^5)^{20}\equiv 1^{20} \pmod{31} \Rightarrow 2^{100}\equiv 1 \pmod{31}$

Nên $2^{101}=2^{100}.2\equiv 1.2 \pmod{31} \Rightarrow 2^{101}\equiv 2 \pmod{31}$

Do đó $2^{101}-2\equiv 2-2 \pmod{31} \Rightarrow A\equiv 0 \pmod{31}$

Vậy $2+2^2+2^3+2^4+2^5+......+2^{99}+2^{100}$ chia hết cho 31

Câu 4. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018-2019).

Cho $S=17+17^2+17^3+....+17^{18}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307.

Lời giải.

Ta có $17S=17.(17+17^2+17^3+...+17^{18})=17^2+17^3+17^4+...+17^{19}$

$\Rightarrow 17S-S=(17^2+17^3+17^4+...+17^{19})-(17+17^2+17^3+...+17^{18})=17^{19}-17$

$\Rightarrow 16S=17^{19}-17$

Vì $17^3=17.289\equiv 17.(-18) \pmod{307} \Rightarrow 17^3\equiv 1 \pmod{307}$

$\Rightarrow 17^{19}=17.(17^3)^6\equiv 17 \pmod{307}$

$\Rightarrow 17^9-17\equiv 0 \pmod{307}$

Hay $16S=17^{19}-17 \vdots 307$

Mà 16 và 307 là hai số nguyên tố cùng nhau nên S chia hết cho 307.

Câu 5. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên năm 2018 - 2019).

Chứng minh rằng: $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+...+3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x\in \mathbb{N}$).

Lời giải.

Ta có : $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+...+3^{x+100}=3^x.(3^1+3^2+3^3+...+3^{100})$

Đặt $3^1+3^2+3^3+...+3^{100}=E$

$\Rightarrow 3E=3.(3^1+3^2+3^3+...+3^{100})=3^2+3^3+3^4+...+3^{101}$

$\Rightarrow 3E-E=(3^2+3^3+3^4+...+3^{101})-(3^1+3^2+3^3+...+3^{100})=3^{101}-3$

$\Rightarrow 2E=3^{101}-3$

Lại có : $3^5=243\equiv 3 \pmod{240}$

$\Rightarrow 3^{101}=(3^5)^{20}.3\equiv 3^{20}.3 \pmod{240} \Rightarrow 3^{101}\equiv 3^{21} \pmod{240}$

Vì $3^{21}=(3^5)^4.3\equiv 3^4.3 \pmod{240} \Rightarrow 3^{21}\equiv 3^5 \pmod{240} \Rightarrow 3^{21}\equiv 3 \pmod{240}$

Do đó $3^{101}\equiv 3 \pmod{240} \Rightarrow 3^{101}-3 \vdots 240 \Rightarrow 3^{101}-3=240k$ (với $k\in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 2E = 3^{101} - 3 = 240k \Rightarrow E = 120k \vdots 120$ (với $k \in \mathbb{N}$)

Vậy $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + ... + 3^{x+100} = 3^x.(3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}) \vdots 120$

Dạng 2. Sử dụng đồng dư thức tìm số dư

Dạng 3. Tìm điều kiện của biến để chia hết

Dạng 4. Sử dụng đồng dư tìm chữ số tận cùng

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019).

Cho $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên.

Lời giải.

Ta có : $2007 \equiv 7 (\text{mod} 10) \Rightarrow 2007^{2009} \equiv 7^{2009} (\text{mod} 10)$

Mà $7^2 = 49 \equiv -1 (\text{mod} 10) \Rightarrow 7^{2009} = (7^2)^{1004}.7 \equiv 1.7 (\text{mod} 10) \Rightarrow 7^{2009} \equiv 7 (\text{mod} 10)$

Nên $2007^{2009} \equiv 7 (\text{mod} 10)$

Lại có : $2013 \equiv 3 (\text{mod} 10) \Rightarrow 2013^{1999} \equiv 3^{1999} (\text{mod} 10)$

Mà $3^4 = 81 \equiv 1 (\text{mod} 10) \Rightarrow 3^{1999} = (3^4)^{499}.3^3 \equiv 27 (\text{mod} 10) \Rightarrow 3^{1999} \equiv 7 (\text{mod} 10)$

Nên $2013^{1999} \equiv 7 (\text{mod} 10)$

Do đó $2007^{2009} - 2013^{1999} \equiv 0 (\text{mod} 10)$

$\Rightarrow 2007^{2009} - 2013^{1999}$ có chữ số tận cùng là 0

Vậy $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$ là số nguyên.

Dạng 5. Sử dụng đồng dư trong bài toán về số chính phương

Dạng 6. Sử dụng đồng dư trong bài toán về số nguyên tố, hợp số

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoằng Hóa năm 2018 - 2019).

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$

Chứng minh rằng: $(p + q) \vdots 12$

Lời giải.

Cách 1.

Vì $q > 3$, q là số nguyên tố nên q không chia hết cho 3

$\Rightarrow q \equiv 1 (\text{mod} 3)$ hoặc $q \equiv -1 (\text{mod} 3)$

Nếu $q \equiv 1 (\text{mod} 3) \Rightarrow p \equiv 2 + 1 (\text{mod} 3) \Rightarrow p \equiv 0 (\text{mod} 3) \Rightarrow p \vdots 3$

Mà $p > 3 \Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

Nên $q \equiv -1 (\text{mod} 3) \Rightarrow p \equiv 2 + (-1) (\text{mod} 3) \Rightarrow p \equiv 1 (\text{mod} 3)$

Khi đó $p + q \equiv 1 - 1 (\text{mod} 3) \Rightarrow p + q \equiv 0 (\text{mod} 3)$

Hay $(p + q) \vdots 3$

Vì $q > 3$, q là số nguyên tố nên q là số lẻ $\Rightarrow q$ là số chia 4 dư 1 hoặc dư 3

$\Rightarrow q \equiv 1 (\text{mod} 4)$ hoặc $q \equiv -1 (\text{mod} 4)$

- Nếu $q \equiv 1 (\text{mod} 4) \Rightarrow p \equiv 2 + 1 (\text{mod} 4) \Rightarrow p \equiv 3 (\text{mod} 4)$

Khi đó $p + q \equiv 3 + 1 (\text{mod} 4) \Rightarrow p + q \equiv 0 (\text{mod} 4)$

- Nếu $q \equiv -1 (\text{mod} 4) \Rightarrow p \equiv 2 + (-1) (\text{mod} 4) \Rightarrow p \equiv 1 (\text{mod} 4)$

Khi đó $p+q\equiv 1-1 \pmod 4 \Rightarrow p+q\equiv 0 \pmod 4$

Do vậy $(p+q)\vdots 4$

Vì 3 và 4 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $(p+q)\vdots 12$

Chú ý ta có thể giải như sau :

Cách 2.

Vì $q>3$, q là số nguyên tố nên q là số lẻ và không chia hết cho 3 $\Rightarrow q$ chia cho 12 dư 1; dư 5; dư 7 hoặc dư 11

$\Rightarrow q\equiv 1 \pmod{12}$ hoặc $q\equiv 5 \pmod{12}$ hoặc $q\equiv -5 \pmod{12}$ hoặc $q\equiv -1 \pmod{12}$

- Nếu $q\equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow p\equiv 2+1 \pmod{12} \Rightarrow p\equiv 3 \pmod{12}$

$\Rightarrow p=12k+3=3(4k+1)\vdots 3$ với k là số tự nhiên

Mà $p>3 \Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

$\Rightarrow q\equiv 1 \pmod{12}$ (loại)

- Nếu $q\equiv -1 \pmod{12} \Rightarrow p\equiv 2+(-1) \pmod{12} \Rightarrow p\equiv 1 \pmod{12}$

Khi đó $p+q\equiv 1-1 \pmod{12} \Rightarrow p+q\equiv 0 \pmod{12}$

Hay $(p+q)\vdots 12$

- Nếu $q\equiv 5 \pmod{12} \Rightarrow p\equiv 2+5 \pmod{12} \Rightarrow p\equiv -5 \pmod{12}$

Khi đó $p+q\equiv -5+5 \pmod{12} \Rightarrow p+q\equiv 0 \pmod{12}$

Hay $(p+q)\vdots 12$

- Nếu $q\equiv -5 \pmod{12} \Rightarrow p\equiv 2+(-5) \pmod{12} \Rightarrow p\equiv -3 \pmod{12}$

$\Rightarrow p=12m-3=3(4m-1)\vdots 3$ với m là số tự nhiên, $m>0$

Mà $p>3 \Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

$\Rightarrow q\equiv 1 \pmod{12}$ (loại)

Vậy $(p+q)\vdots 12$

Dạng 7. Sử dụng đồng dư trong bài toán tìm nghiệm nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện Phú Ninh 2018-2019).

Tìm x, y thuộc $\mathbb{Z}$ biết : $25-y^2=8(x-2015)^2$.

Lời giải.

Ta có: $25-y^2\le 25 \Rightarrow 8(x-2015)^2\le 25 \Rightarrow 0\le (x-2015)^2<4$

Vì với số nguyên a bất kì thì $a\equiv 0 \pmod 3$ hoặc $a\equiv 1 \pmod 3$ hoặc $a\equiv -1 \pmod 3$

$\Rightarrow a^2\equiv 0 \pmod 3$ hoặc $a^2\equiv 1^2 \pmod 3$ hoặc $a^2\equiv (-1)^2 \pmod 3$

$\Rightarrow a^2\equiv 0 \pmod 3$ hoặc $a^2\equiv 1 \pmod 3$

Nên số chính phương chỉ có thể chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow (x-2015)^2\equiv 0 \pmod 3$ hoặc $(x-2015)^2\equiv 1 \pmod 3$ với $x\in \mathbb{Z}$

Nếu $(x-2015)^2\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 8.(x-2015)^2\equiv 8.1 \pmod 3$

$\Rightarrow 8.(x-2015)^2 \equiv 2(\bmod 3)$

$\Rightarrow y^2 = 25 - 8.(x-2015)^2 \equiv 25 - 2(\bmod 3) \Rightarrow y^2 \equiv 2(\bmod 3)$ với $y \in \mathbb{Z}$

(vô lí vì y^2 là số chính phương không chia hết cho 3 thì chia cho 3 dư 1)

Nên $(x-2015)^2 \equiv 0(\bmod 3)$

Mà $0 \le (x-2015)^2 < 4$; $(x-2015)^2$ là số chính phương với $x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (x-2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015$

khi đó $y = 5$ hoặc $y = -5$.

Vậy $x = 2015$; $y = 5$ hoặc $y = -5$

Câu 2. (HSG 7 trường Tôn Đức Thắng 2018-2019).

Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 2x - 8y^2 = 41 \Rightarrow x^2 + 2x = 8y^2 + 41 \Rightarrow x^2 + 2x = 4(2y^2 + 10) + 1$

- Vì $4(2y^2 + 10) + 1 \equiv 1(\bmod 4)$ với $y \in \mathbb{Z}$

Nên $x^2 + 2x \equiv 1(\bmod 4)$

$\Rightarrow x^2 + 2x$ là số lẻ mà $2x \vdots 2$ (với $x \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow x^2$ là số lẻ $\Rightarrow x$ là số lẻ

$\Rightarrow x \equiv 1(\bmod 4)$ hoặc $x \equiv -1(\bmod 4)$

$\Rightarrow x^2 \equiv 1^2(\bmod 4)$ hoặc $x^2 \equiv (-1)^2(\bmod 4)$

$\Rightarrow x^2 \equiv 1(\bmod 4)$

- Nếu $x \equiv -1(\bmod 4) \Rightarrow 2x \equiv -2(\bmod 4)$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv 1 + (-2)(\bmod 4) \Rightarrow x^2 + 2x \equiv -1(\bmod 4)$ (vô lí vì $x^2 + 2x \equiv 1(\bmod 4)$)

-Nếu $x \equiv 1(\bmod 4) \Rightarrow 2x \equiv 2(\bmod 4)$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv 1 + 2(\bmod 4) \Rightarrow x^2 + 2x \equiv 3(\bmod 4)$ (vô lí vì $x^2 + 2x \equiv 1(\bmod 4)$)

Vậy không có giá trị nguyên nào của x, y thỏa mãn đề bài.