

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI

MÔN : Toán 8. Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x}{x+1} - \frac{3-3x}{x^2-x+1} + \frac{x+4}{x^3+1}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Chứng minh rằng giá trị của A luôn dương với mọi $x \neq -1$

Câu 2. (3 điểm)

a) Chứng minh rằng: Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ thì giá trị của đa thức :

$$M = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 16$$
 là bình phương của một số hữu tỉ

b) Giải phương trình : $|x+1| = |x(x+1)|$

Câu 3. (1,5 điểm) Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $P(1) = 0$; $P(3) = 0$; $P(5) = 0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $Q = P(-2) + 7P(6)$

Câu 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Vẽ hình vuông $MNPQ$ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BN và MQ; CM và NP. Chứng minh rằng

a) DE song song với AC

b) $DE = DF$; $AE = AF$

Câu 5. (1 điểm) Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2} \text{ với } a \geq b \geq c > 0$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$A = \frac{x}{x+1} - \frac{3-3x}{x^2-x+1} + \frac{x+4}{x^3+1} = \frac{x(x^2-x+1) - (x+1)(3-3x) + x+4}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

$$A = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

b) Với mọi $x \neq -1$ thì

$$\text{Vì } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \neq -1 \Rightarrow A > 0, \forall x \neq -1$$

Câu 2.

a) Ta có: $M = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 16$

$$\text{Đặt } a = x^2 + 10x + 16$$

$$\text{Suy ra } M = a(a+8) + 16 = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$$

$$\text{Vậy } M = (x^2 + 10x + 20)^2 \text{ (dpcm)}$$

$$b/ |x+1| = |x(x+1)|$$

$$\Leftrightarrow |x(x+1)| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x| \cdot |x+1| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x+1| \cdot (|x| - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = 0 \\ |x| - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ |x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Câu 3.

Ta có: $P(x) : (x-1), (x-3), (x-5)$

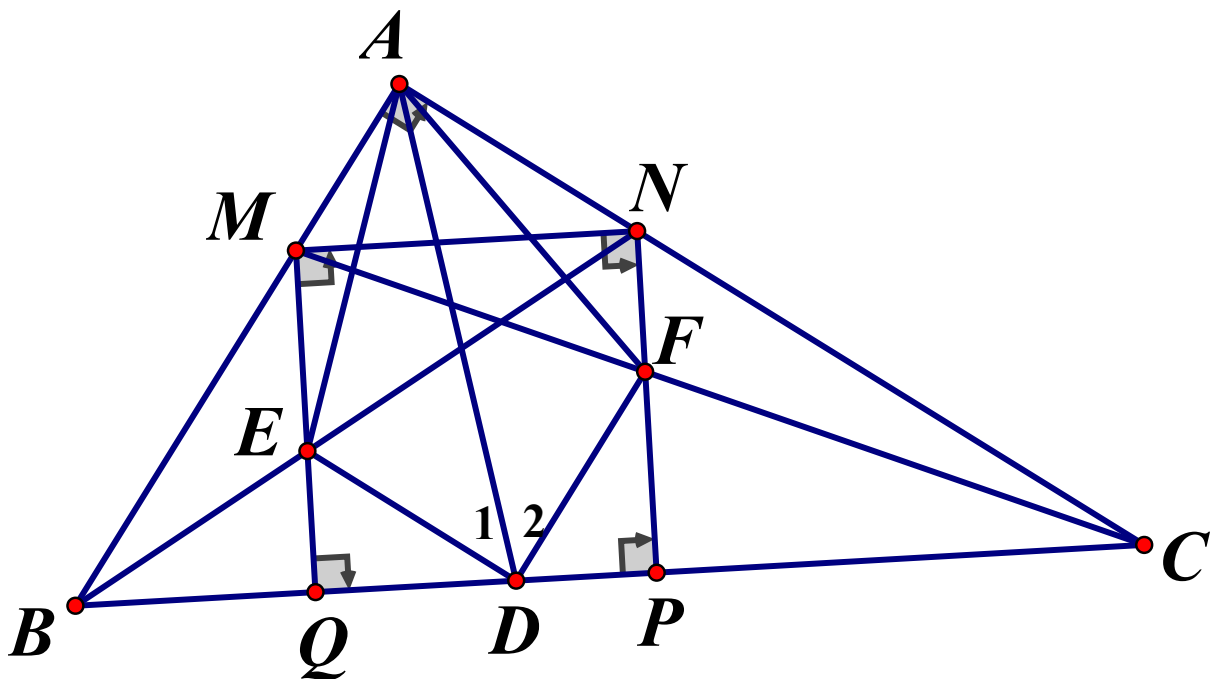
Nên $P(x)$ có dạng $P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x+a)$

$$\text{Khi đó: } P(-2) + 7.P(6) = (-3) \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot (-2+a) + 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (6+a)$$

$$= -105 \cdot (-2+a) + 105 \cdot (6+a)$$

$$= 105 \cdot (2 - a + 6 + a) = 840$$

Câu 4.



a) Chứng minh được $\frac{BE}{EN} = \frac{BQ}{QP} = \frac{BQ}{MQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow DE \parallel NC$ hay $DE \parallel AC$

b) Do $DE \parallel AC \Rightarrow \frac{DE}{CN} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow DE = \frac{BD}{BC} \cdot CN$ (1)

Tương tự: $DF = \frac{CD}{BC} \cdot BM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{DF} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CN}{BM}$

Mà $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ và $\frac{CN}{BM} = \frac{AC}{AB}$ nên $\frac{DE}{DF} = 1 \Rightarrow DE = DF$

Ta có: $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{D} \Rightarrow \triangle ADE = \triangle ADF \Rightarrow AE = AF$

Câu 5.

Gọi vế trái là A , ta có:

$$\begin{aligned}A - \frac{3}{2} &= \left(\frac{a}{a+b} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{1}{2} \right) \\&= \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{b-c}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(c+a)} \\&= \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(b-a)+(a-c)}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(c+a)} \\&= \frac{a-b}{2} \cdot \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} \right) + \frac{a-c}{2} \cdot \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) \\&= \frac{a-b}{2} \cdot \frac{c-a}{(a+b)(b+c)} + \frac{a-c}{2} \cdot \frac{a-b}{(b+c)(c+a)} \\&= \frac{(a-b)(a-c)}{2(b+c)} \cdot \left(\frac{-1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right) \\&= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{2(b+c)(a+b)(c+a)} \geq 0 \text{ (Do } a \geq b \geq c \geq 0\text{)}\end{aligned}$$

Vậy $A \geq \frac{3}{2}$