CHỦ ĐỀ 01: CƠ BẢN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ **Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng K.**

- **Định nghĩa 1.**

  Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y=f\left(x\right)$ là một hàm số xác định trên K, ta nói:

  Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu

  $$\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$$

  Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu

  $$\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$$

  Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là **đơn điệu** trên K.

❖ **Nhận xét.**

- **Nhận xét 1.**
- Nếu hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ cũng đồng biến *(nghịch biến)* trên D. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f\left(x\right)-g\left(x\right)$.
- **Nhận xét 2.**
- Nếu hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f\left(x\right).g\left(x\right)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f\left(x\right),g\left(x\right)$ không là các hàm số dương trên D.
- **Nhận xét 3.**
- Cho hàm số $u=u\left(x\right)$, xác định với $x\in\left(a;b\right)$ và $u\left(x\right)\in\left(c;d\right)$. Hàm số $f\left[u\left(x\right)\right]$ cũng xác định với $x\in\left(a;b\right)$. Ta có nhận xét sau:
- Giả sử hàm số $u=u\left(x\right)$ đồng biến với $x\in\left(a;b\right)$. Khi đó, hàm số $f\left[u\left(x\right)\right]$ đồng biến với $x\in\left(a;b\right)\Leftrightarrow f\left(u\right)$ đồng biến với $u\in\left(c;d\right)$.
- Giả sử hàm số $u=u\left(x\right)$ nghịch biến với $x\in\left(a;b\right)$. Khi đó, hàm số $f\left[u\left(x\right)\right]$ nghịch biến với $x\in\left(a;b\right)\Leftrightarrow f\left(u\right)$ nghịch biến với $u\in\left(c;d\right)$.

❖ **Định lí 1.**

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

  Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in K$.

  Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'\left(x\right)\le 0,\forall x\in K$.

❖ **Định lí 2.**

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

  Nếu $f'\left(x\right)>0,\forall x\in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.

  Nếu $f'\left(x\right)<0,\forall x\in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

  Nếu $f'\left(x\right)=0,\forall x\in K$ thì hàm số f không đổi trên K.

❖ **Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:**

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

  Nếu $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K.

  Nếu $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f nghịch biến trên K

Bài toán 1. Tìm tham số m để hàm số $y = f(x;m)$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

- **Bước 1:** Ghi điều kiện để $y = f(x;m)$ đơn điệu trên $(\alpha;\beta)$. Chẳng hạn:
- ▪ Đề yêu cầu $y = f(x;m)$ đồng biến trên $(\alpha;\beta) \Rightarrow y' = f'(x;m) \geq 0$.
- ▪ Đề yêu cầu $y = f(x;m)$ nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Rightarrow y' = f'(x;m) \leq 0$.
- **Bước 2:** Độc lập m ra khỏi biến số và đặt vế còn lại là $g(x)$, có hai trường hợp thường gặp :
- ▪ $m \geq g(x)$, $\forall x \in (\alpha;\beta) \Rightarrow m \geq \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.
- ▪ $m \leq g(x)$, $\forall x \in (\alpha;\beta) \Rightarrow m \leq \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.
- **Bước 3:** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D (hoặc sử dụng Cauchy) để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Từ đó suy ra m.

Bài toán 2. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

- Tìm tập xác định, chẳng hạn $x \neq -\dfrac{d}{c}$. Tính đạo hàm y'.
- Hàm số đồng biến $\Rightarrow y' > 0$ (hàm số nghịch biến $\Rightarrow y' < 0$). Giải ra tìm được m (1).
- Vì $x \neq -\dfrac{d}{c}$ và có $x \in (\alpha;\beta)$ nên $-\dfrac{d}{c} \notin (\alpha;\beta)$. Giải ra tìm được m (2).
- Lấy giao của (1) và (2) được các giá trị m cần tìm.

➢ **Cần nhớ**: "Nếu hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên miền D *(luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến)* thì phương trình $f(t) = 0$ có tối đa một nghiệm và $\forall u$, $v \in D$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[f(x^2)\right]'=(x^2)'x^4(x^2-9)(x^2-4)^2=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$.

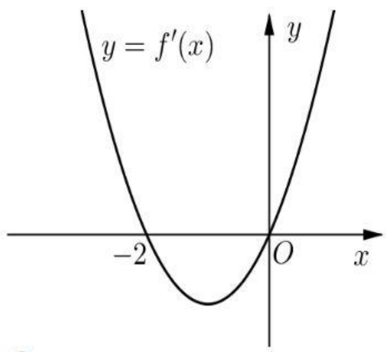
Cho $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=0$ hoặc $x=2$ hoặc $x=3$.

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=2x.f'(x^2-1)$.

$$y'=0\Leftrightarrow 2x.f'(x^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-1=-2\\x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-1\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Nhìn bảng biến thiên hàm số $y=f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x+1).f'(x^2+x-2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x^2+x-2)\ge 0\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x)\left((x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right)\ge 0\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\ge 0\quad (1)\ \forall x\in(1;+\infty)$.

Đặt $t=x^2+x-2$, $x\in(1;+\infty)\Rightarrow t>0$.

Khi đó (1) trở thành $t^2+mt+5\ge 0\ \ \forall t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow t+\dfrac{5}{t}\ge -m\quad (2)\ \forall t\in(0;+\infty)$

Để (1) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow(2)$ nghiệm đúng với mọi $t\in(0;+\infty)$.

Ta có $h(t)=t+\dfrac{5}{t}\ge 2\sqrt{5}$ với $\forall t\in(0;+\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{5}{t}\Leftrightarrow t=\sqrt{5}$.

Suy ra $\underset{t\in(0;+\infty)}{Min}(h(t))=2\sqrt{5}\Rightarrow(2)$ nghiệm đúng $\forall t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\le 2\sqrt{5}\Leftrightarrow m\ge -2\sqrt{5}$.

Vậy số giá trị nguyên âm của m là 4.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(0)-1$. **B.** $m>f(-1)-e$. **C.** $m>f(0)-1$. **D.** $m\ge f(-1)-e$.

Lời giải

Chọn C

Có $f\left(x\right)<e^{x^2}+m,\forall x\in\left(-1;1\right)\Leftrightarrow m>g\left(x\right)=f\left(x\right)-e^{x^2},\forall x\in\left(-1;1\right)$ (1)

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-2x.e^{x^2}$ có nghiệm $x=0\in\left(-1;1\right)$ và $\begin{cases}g'\left(x\right)>0,\forall x\in\left(-1;0\right)\\g'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(0;1\right)\end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f(0)-1$	$\searrow$	

Do đó $\max\limits_{(-1;1)}g\left(x\right)=g\left(0\right)=f\left(0\right)-1$. Ta được $\left(1\right)\Leftrightarrow m>f\left(0\right)-1$.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Bất phương trình $f(x)<3\mathrm{e}^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in\left(-2;2\right)$ khi và chỉ khi:

A. $m\geq f\left(-2\right)-3$. **B.** $m>f\left(2\right)-3e^4$. **C.** $m\geq f\left(2\right)-3e^4$. **D.** $m>f\left(-2\right)-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)<3\mathrm{e}^{x+2}+m\Leftrightarrow f(x)-3\mathrm{e}^{x+2}<m$.

Đặt $h\left(x\right)=f(x)-3\mathrm{e}^{x+2}\Rightarrow h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-3e^{x+2}$.

Vì $\forall x\in\left(-2;2\right),f'\left(x\right)\leq 3$ và $x\in\left(-2;2\right)\Rightarrow x+2\in\left(0;4\right)\Rightarrow 3e^{x+2}\in\left(3;3e^4\right)$

Nên $h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-3e^{x+2}<0,\forall x\in\left(-2;2\right)\Rightarrow f(2)-3\mathrm{e}^4<h\left(x\right)<f(-2)-3$.

Vậy bất phương trình $f(x)<3\mathrm{e}^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in\left(-2;2\right)$ khi và chỉ khi $m>f\left(2\right)-3e^4$.

VÍ DỤ 6. Tổng các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $\left(-2020;2020\right)$ để hàm số $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. -2039187. **B.** 2022. **C.** 2093193. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $\sin x\neq m$

Ta có $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{\cos x(\sin x-m)-(\sin x-3)\cos x}{(\sin x-m)^2}=\dfrac{\cos x(3-m)}{(\sin x-m)^2}$.

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $\cos x>0$; $\sin x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

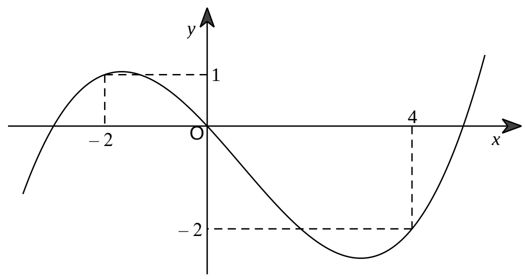
Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}3-m>0\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le m<3\end{array}\right.$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2019;-2018;...;-1;0\}\cup\{1;2\}$

Vậy tổng các giá trị của tham số m là: $S=\dfrac{-2019+0}{2}.2020+1+2=-2039187$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

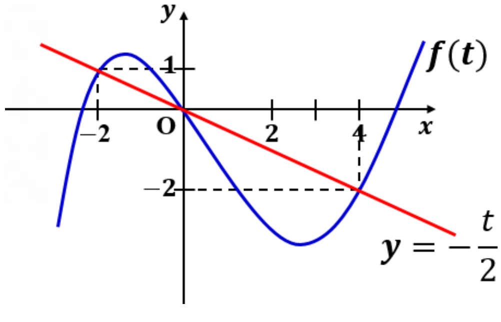
Ta có: $g(x)=f(1-2x)+x^2-x\Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0\Leftrightarrow f'(1-2x)>-\dfrac{1-2x}{2}$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-\dfrac{t}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(t)>-\dfrac{t}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2<t<0\\ t>4\end{array}\right.$.

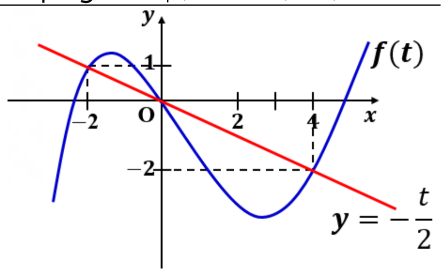
Khi đó: $g'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<1-2x<0\\ 1-2x>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\\ x<-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.



Cách 2:

Ta có: $g(x)=f(1-2x)+x^2-x\Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(1-2x)=-\frac{1-2x}{2}$.



Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-\frac{t}{2}$.

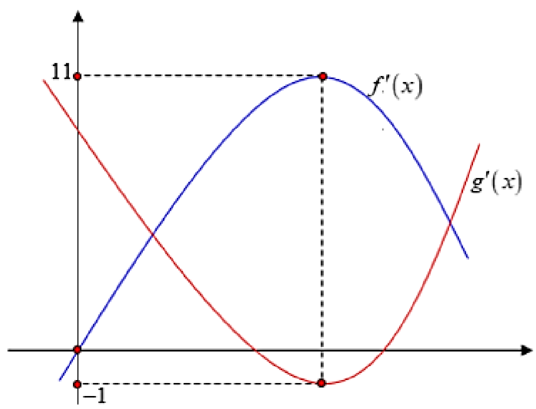
Từ đồ thị ta có: $f'(t)=-\frac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$. Khi đó:

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=-2 \\ 1-2x=0 \\ 1-2x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy: hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)-a^2x+2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến là $(m;n)$. Tổng các giá trị nguyên dương a thỏa mãn là?



A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có đạo hàm: $h'(x)=f'(x)-g'(x)-a^2$. Để hàm số đồng biến thì $h'(x)\ge 0$.

$\Rightarrow a^2 \le f'(x)-g'(x)$. Từ đồ thị, ta có $f'(x)-g'(x)\ge 12 \Rightarrow a^2\le 12$.

Suy ra số giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là $a\in\{1;2;3\}$.

Vậy tổng các giá trị của a thỏa mãn là 6.