

Bài 1. (4,0 điểm)

$$A = \frac{x^2}{x-3} \left(\frac{x^2+9}{x} - 6 \right) + 5$$

Cho biểu thức

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị của x để A đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó

Bài 2. (4,0 điểm)

- Phân tích đa thức sau thành nhân tử:
 $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$
- Hãy viết thêm vào bên phải số 43 hai chữ số để nhận được một số có 4 chữ số chia hết cho 3 và 7
- Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x+3$ dư 5, $f(x)$ chia cho $x+5$ dư 7, $f(x)$ chia cho $(x+3)(x+5)$ được thương là $2x$ và còn dư.

Bài 3. (5,0 điểm)

$$\frac{3x-1}{x-1} - 1 = \frac{2x+5}{x+3} - \frac{4}{x^2+2x-3}$$

- Giải phương trình:
- Năm 2016, số công nhân ở xí nghiệp I và II tỉ lệ với 4 và 5. Năm 2017, xí nghiệp I tăng thêm 60 công nhân nữa, xí nghiệp II tăng thêm 90 công nhân; do đó số công nhân của 2 xí nghiệp tỉ lệ với 5 và 7. Hỏi năm 2017, mỗi xí nghiệp có bao nhiêu công nhân?

- Cho 3 số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$. Tính giá trị của biểu thức $M = (a^{2015} + b^{2015})(b^{2017} + c^{2017})(c^{2019} + a^{2019})$

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn CD . Qua điểm A vẽ đường thẳng $AK \parallel BC$ (K thuộc CD). Qua điểm B vẽ đường thẳng $BI \parallel CD$ (I thuộc CD); BI cắt AC ở F, AK cắt BD ở E. Chứng minh rằng:

- $EF \parallel AB$
- $AB^2 = CD \cdot EF$

Bài 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AK, BD cắt nhau ở điểm G. Vẽ

đường trung trực HE và HF của AC và BC. Chứng minh rằng: $\frac{AG}{BG} = \frac{HF}{HE}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$A = \frac{x^2}{x-3} \cdot \left(\frac{x^2+9}{x} - 6 \right) + 5$$

$$DKXD: x \neq 0; x \neq 3$$

$$A = \frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x} + 5$$

$$= \frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{(x-3)^2}{x} + 5$$

$$= x(x-3) + 5$$

b)

$$A = x(x-3) + 5 = x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{11}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Bài 2.

$$a) ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$$

$$= [ab(a+b) + abc] + [bc(b+c) + abc] + ca(c+a)$$

$$= ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ac(c+a)$$

$$= b(a+b+c)(a+c) + ac(c+a)$$

$$= (a+c)(ab+ac+b^2+bc)$$

$$= (a+c)[a(b+c) + b(b+c)]$$

$$= (a+c)(a+b)(b+c)$$

b) Vì $(3, 7) = 1$, theo bài toán ta có $\overline{43ab} : 21$

Vì 4300 chia 21 dư 16 nên $\overline{ab} \equiv -16 \pmod{21}$ hay $\overline{ab}$ chia 21 dư 5. Vậy

$$\overline{ab} = 21q + 5$$

Cho $q = 0 \Rightarrow \overline{ab} = 05$, số mới là 4305

Cho $q = 1 \Rightarrow \overline{ab} = 26$, số mới là 4326

Cho $q = 2 \Rightarrow \overline{ab} = 47$, số mới là 4347

Cho $q = 3 \Rightarrow \overline{ab} = 68$, số mới là 4368

Cho $q = 4 \Rightarrow \overline{ab} = 89$, số mới là 4389

c)

$$f(x) = (x+3)A(x) + 5$$

$$f(x) = (x+5)B(x) + 7$$

$$f(x) = (x+3)(x+5).2x + mx + n$$

Từ đó suy ra :

$$f(-3) = 5 \Rightarrow -3m + n = 5$$

$$f(-5) = 7 \Rightarrow -5m + n = 7$$

Tìm ra $m = -1; n = 2$

Thay vào ta có đa thức $f(x) = 2x^3 + 16x^2 + 29x + 2$

Bài 3.

$$a) \frac{3x-1}{x-1} - 1 = \frac{2x+5}{x+3} - \frac{4}{x^2+2x-3}$$

ĐKXD: $x \neq 1; x \neq -3$

$$\frac{3x-1}{x-1} - 1 = \frac{2x+5}{x+3} - \frac{4}{x^2+2x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-1)(x+3) - (x^2+2x-3)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(2x+5)(x-1) - 4}{(x-1)(x+3)}$$

$$\Rightarrow (3x-1)(x+3) - (x^2+2x-3) = (2x+5)(x-1) - 4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 - x^2 - 2x + 3 = 2x^2 + 3x - 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow 3x = -9$$

$$\Leftrightarrow x = -3(tm)$$

b) Gọi số công nhân xí nghiệp I năm 2016 là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số công nhân xí nghiệp II năm 2016 là $\frac{5}{4}x$

Theo bài toán, năm 2017 số công nhân xí nghiệp I và xí nghiệp II tăng 60, 90

$$\text{người nên ta có phương trình: } \frac{x+60}{5} = \frac{\frac{5}{4}x+90}{7} \Leftrightarrow x = 40(tm)$$

Vậy số công nhân năm 2017 của xí nghiệp I và xí nghiệp II lần lượt là 100 và 140 công nhân.

$$c)(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c).\frac{ab+bc+ac}{abc}=1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ac)-abc=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

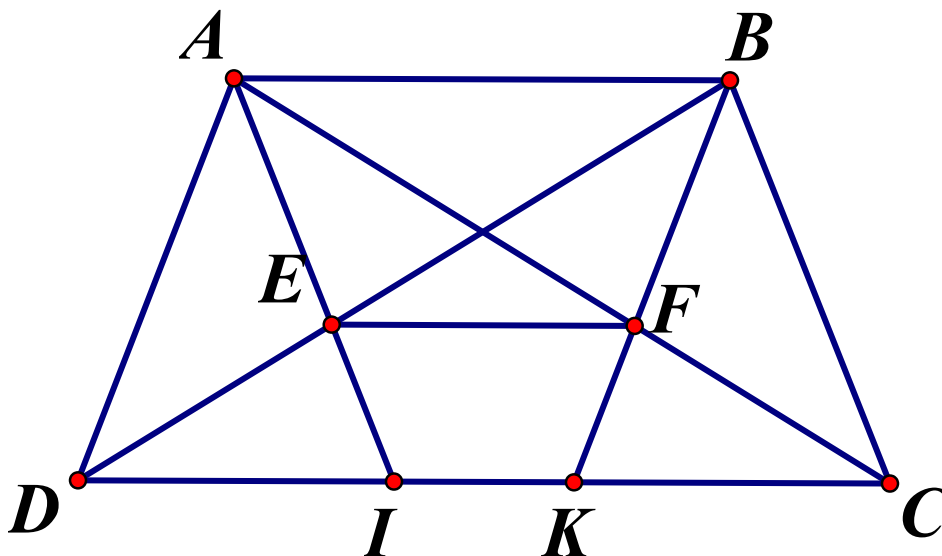
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases}$$

Nếu $a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow (a^{2015}+b^{2015})=0 \Rightarrow M=0$

Nếu $b+c=0 \Rightarrow b=-c \Rightarrow (b^{2017}+c^{2017})=0 \Rightarrow M=0$

Nếu $a+c=0 \Rightarrow a=-c \Rightarrow a^{2019}+c^{2019}=0 \Rightarrow M=0$

Bài 4.



a) Chứng minh $\triangle AEB \sim \triangle KED(g.g) \Rightarrow \frac{AE}{KE} = \frac{AB}{KD}$

Chứng minh $\triangle AFB \sim \triangle CFI(g.g) \Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{AB}{CI}$

Vì $KD=CI$, kết hợp với các điều kiện trên suy ra $\frac{AE}{KE} = \frac{AF}{CF}$

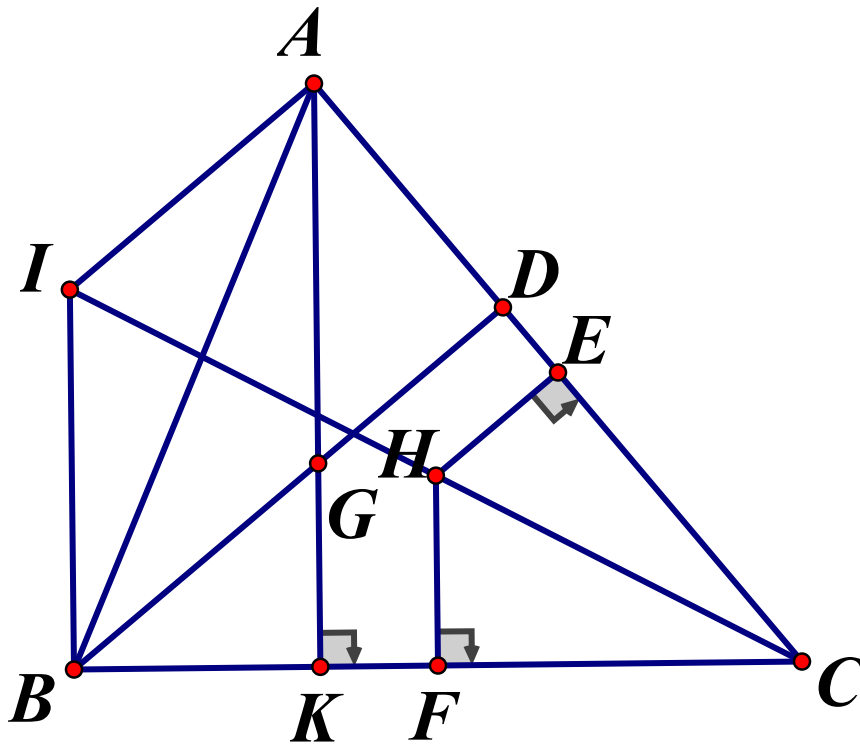
Suy ra $EF \parallel CK \Rightarrow EF \parallel AB$

b) Chứng minh $\triangle AEB \sim \triangle KED (g.g) \Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{DE}{BE}$
 $\Rightarrow \frac{DK + AB}{AB} = \frac{DE + EB}{EB} \Rightarrow \frac{DK + KC}{AB} = \frac{BD}{EB} \Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{BD}{EB} \quad (1)$

Vì $EF \parallel DI \Rightarrow \frac{DB}{EB} = \frac{DI}{EF} \Rightarrow \frac{DB}{EB} = \frac{AB}{EF} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{AB}{EF} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EF$

Bài 5.



Lấy điểm I đối xứng với điểm C qua H

Nối AI, BI ta được HE, HF lần lượt là đường trung bình $\triangle ACI$ và $\triangle BCI$

Chứng minh được $AI = BG, BI = AG \Rightarrow \frac{HF}{HE} = \frac{BI}{AI} = \frac{AG}{BG}$