

Tên đề tài: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ.

A. ĐẶT VẤN ĐỀ:

Trong hoạt động dạy và học của nhà trường, quá trình tìm tòi đúc kết nâng tầm giải toán theo hướng tổng quát, từ đó làm rõ nội dung những bài toán ở dạng đặc biệt, giúp cho việc dạy có định hướng cụ thể, logic, người học sẽ tiếp thu và có nhiều cơ hội sáng tạo, đó cũng là đổi mới phương pháp dạy học.

Là giáo viên dạy nhiều năm ở bộ môn toán THPT, tôi đã gặp không ít những rắc rối trong việc giảng dạy ở nhiều bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ. Vì mỗi bài toán có thể có nhiều cách giải khác nhau, mỗi cách giải thể hiện được khái niệm toán học của nó. Trong các cách giải khác nhau đó, có cách giải thể hiện tính hợp lí trong dạy học, có cách giải thể hiện tính sáng tạo của toán học. Trong đề tài này tôi muốn hướng dẫn học sinh giải một số phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ bằng “con mắt” của lượng giác.

Từ những bài toán không chứa những yếu tố lượng giác, bằng phép đổi biến ta chuyển bài toán về lượng giác, cách giải như vậy gọi là phương pháp lượng giác hoá. Do đó, qua công tác giảng dạy, đúc kết những kinh nghiệm nhiều năm của bản thân và việc học tập nghiên cứu khoa học, thử nghiệm trực tiếp nhiều năm của giảng dạy, tôi mạnh dạn trao đổi cùng đồng nghiệp kinh nghiệm của bản thân.

B. CƠ SỞ LÝ LUẬN:

Việc giảng dạy và ôn luyện giúp học sinh giải các bài toán liên quan đến lượng giác hoá, đòi hỏi người giáo viên có phương pháp định hướng cơ bản dạng toán, sử dụng phương pháp nào là logic, biết phân biệt phương pháp nào ngộ nhận là logic. Vấn đề ở chỗ những bài toán nào thích hợp cho việc lượng giác hoá.

Những kiến thức liên quan:

1) Các hàm số cơ bản:

*) Hàm số: $y = \sin x$, $y = \cos x$.

- Miền xác định: R .
- Miền giá trị: $[-1;1]$.
- Chu kì: 2π .

*) Hàm số: $y = \tan x$.

- Miền xác định: $\forall x \in R : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.
- Miền giá trị: R .
- Chu kì: π .

*) Hàm số: $y = \cot x$.

- Miền xác định: $\forall x \in R : x \neq k\pi, k \in Z$.
- Miền giá trị: R .
- Chu kì: π .

2) Một số biểu thức lượng giác cơ bản về miền giá trị:

*) Nếu $A = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ thì ta có $-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$.

*) Nếu $B = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ thì ta có $-\sqrt{2} \leq B \leq \sqrt{2}$.

*) Nếu $C = \alpha \sin x + \beta \cos x$ thì ta có $-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq C \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

*) Nếu $D = \cos^n x + \sin^n x$ thì ta có $-1 \leq D \leq 1$.

3) Phép đổi biến số:

*) Nếu $|x| \leq k, (k > 0)$ thì ta đặt $x = k \cos \alpha, \alpha \in [0; \pi]$ hoặc $x = k \sin \alpha, \alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

*) Nếu $x \in R$ thì ta đặt $x = \tan \alpha, \alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

*) Nếu x, y thoả mãn điều kiện $a^2 x^2 + b^2 y^2 = c^2, (a, b, c > 0)$ thì ta đặt $x = \frac{c}{a} \sin \alpha, y = \frac{c}{b} \cos \alpha, \alpha \in [0; 2\pi]$.

*) Nếu x, y, z thoả mãn $x + y + z = xyz$ hoặc $xy + yz + zx = 1$ thì ta có thể đặt $x = \tan \alpha, y = \tan \beta, z = \tan \gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

*) Một số biểu thức (dấu hiệu) thường gặp:

Biểu thức	Cách đặt	Miền giá trị của biến
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \tan \alpha$ (hoặc $x = a \cot \alpha$)	$\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ (hoặc $\alpha \in (0; \pi)$)
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \alpha$ (hoặc $x = a \cos \alpha$)	$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (hoặc $\alpha \in [0; \pi]$)
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{ a }{\cos \alpha}$ hoặc $a = \frac{ a }{\sin \alpha}$	$\alpha \in [0; \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ hoặc $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cos 2\alpha$	$\alpha \in R$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a) \sin^2 \alpha$	$\alpha \in R$
$\frac{x+y}{1-xy}$ hoặc $\frac{x-y}{1+xy}$	$\begin{cases} x = \tan \alpha \\ y = \tan \beta \end{cases}$	$\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

C. CƠ SỞ THỰC TIỄN:

Trong trường THPT hiện nay có rất nhiều đối tượng học sinh, do đó công việc giảng dạy sao cho đa số học sinh tiếp thu, hiểu và vận dụng giải toán không phải là công việc đơn giản của mỗi giáo viên.

Để giảng dạy nâng cao kết quả học tập của học sinh, tôi đã thực hiện nhiều biện pháp từ giáo dục, động viên giúp đỡ trong đó không thể thiếu phương pháp giảng dạy khoa học logic, tạo động lực để học sinh say mê, tìm tòi, nghiên cứu, trên cơ sở khoa học mà người thầy đã gieo. Trong các biện pháp đó có một vấn đề liên quan đến đề tài mà tôi đang trình bày và đề tài có nhấn mạnh đến một số dạng tổng quát dành cho học sinh giỏi, nó không phải là để dạy ở một lớp có nhiều đối tượng học sinh. Tuỳ thuộc vào yêu cầu rèn luyện, ôn tập cho học sinh mà người thầy linh hoạt giải quyết.

Năm học 2009 – 2010 tôi được phân dạy môn toán lớp 10A1 (là lớp chọn theo khối A của nhà trường), lớp 10A2 và tôi đã theo dạy các em cho đến lớp 12.

Kết quả kiểm tra 2 nhóm học sinh (có học lực từ TB khá trở lên) cuối năm lớp 10 về chủ đề: Giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ thu được kết quả như sau:

Nhóm	Số	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu	
		SL	TL%	SL	TL%	SL	TL%	SL	TL%
Nhóm 1	20	2	10,0%	10	50,0%	7	35,0%	1	5,0%
Nhóm 2	16	0	0,0%	8	50,0%	6	37,5%	2	12,5%

D. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU:

DẠNG 1: Trong bài có chứa biểu thức dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Phương pháp: Ta đặt $x = |a| \sin \alpha$, với $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (hoặc $x = |a| \cos \alpha$, với $\alpha \in [0; \pi]$).

Ví dụ 1: Giải phương trình: $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$.

Nhận xét: Trong phương trình có xuất hiện dấu hiệu $\sqrt{a^2 - x^2}$ với $a = 1$.

Giải:

Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$. (*)

Với điều kiện (*) ta đặt $x = \cos \alpha, \alpha \in [0; \pi]$. (**)

Khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos 3\alpha = |\sin \alpha| \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} \cos 3\alpha = \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\begin{cases} 3\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi \\ 3\alpha = -\frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{8} \\ \alpha = \frac{5\pi}{8} \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos \frac{\pi}{8} \\ x = \cos \frac{5\pi}{8} \\ x = \cos \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x = \cos \frac{\pi}{8}, x = \cos \frac{5\pi}{8}, x = \cos \frac{3\pi}{4}$.

Lưu ý: Ta cũng có thể đặt $x = \sin \alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$.

Nhận xét: Trong phương trình có xuất hiện dấu hiệu $\sqrt{a^2 - x^2}$ với $a = 1$.

Giải:

Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$. (*)

Với điều kiện (*) ta đặt $x = \sin \alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \sin \alpha (1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos \alpha} = \sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha + \sin 2\alpha \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} (1 - \sqrt{2} \sin \frac{3\alpha}{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \\ \sin \frac{3\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Lưu ý: Ta cũng có thể đặt $x = \cos \alpha, \alpha \in [0; \pi]$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\frac{1}{1 - x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}} - 1$.

Giải:

$$\text{ĐK: } 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Ta đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$. (**)

Khi đó BPT được chuyển về dạng:

$$\frac{1}{1 - \cos^2 t} > \frac{3 \cos t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} - 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \cot^2 t - 3 \cot t + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot t > 2 \\ \cot t < 1 \end{cases}$$

$$\stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \cos t > 2 \sin t \\ \frac{\pi}{4} < t < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 t > 4 \sin^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1 \\ -1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của BPT là $T = \left(-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right)$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{1 - x^2} = 1 \\ y + \sqrt{1 - y^2} = 1 \end{cases}$.

Giải:

$$\text{ĐK: } -1 \leq x, y \leq 1.$$

Ta đặt $\begin{cases} x = \sin \alpha \\ y = \sin \beta \end{cases}$ với $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó hệ được đưa về dạng:

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \beta = 1 \\ \sin \beta + \cos \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha + \cos \beta = 1 \\ \sin(\alpha + \beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha + \cos \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = 0 \\ \alpha = \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ có 2 nghiệm (0;0), (1;1).

Ví dụ 5: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{1 - x^2} - y = 0 \\ 3mx - 3y = 5m \end{cases} \quad (1)$

Giải:

$$\text{ĐK: } -1 \leq x \leq 1.$$

Ta đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$.

Khi đó từ (1) có dạng:

$$3m \cos t - 3\sqrt{1 - \cos^2 t} = 5m \Leftrightarrow 3 \cos t - 3 \sin t = 5m \quad (2)$$

Để hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $\sin t \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3m)^2 + 9 \geq (5m)^2 \\ \sin t = 3m \cos t - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq 0.$$

Vậy $-\frac{3}{4} \leq m \leq 0$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ:

Giải các PT, BPT, Hệ PT sau:

1) $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

ĐS: PT có 2 nghiệm: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

2) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left[\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{(1+x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1-x^2}$.

ĐS: PT có 1 nghiệm: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4) $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$.

5) $x + \sqrt{2-x^2} \leq \sqrt{2}$.

6) $\begin{cases} \frac{2x+\sqrt{1-x^2}}{2x+\sqrt{1-x^2}} = 2 \\ \frac{2x+\sqrt{1-x^2}}{2x+\sqrt{1-x^2}} = 2 \end{cases}$.

DẠNG 2: Trong bài có chứa biểu thức dạng $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Phương pháp: Ta đặt $x = \frac{|a|}{\cos \alpha}$, với $\alpha \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

(hoặc $a = \frac{|a|}{\sin \alpha}$, với $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \setminus \{0\}$).

Ví dụ 6: Giải phương trình $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{2}$.

Nhận xét: Trong phương trình có xuất hiện dấu hiệu $\sqrt{x^2 - a^2}$ với $a = 1$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. \quad (*)$

Với điều kiện (*) ta đặt $x = \frac{1}{\cos \alpha}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\frac{1}{\cos \alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 2\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Đặt $u = \sin \alpha + \cos \alpha$ (điều kiện $1 \leq u \leq \sqrt{2}$), ta có $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{u^2 - 1}{2}$.

Kho đó phương trình có dạng:

$$u = \sqrt{2}(u^2 - 1) \Leftrightarrow \sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2} \\ u = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} (l)$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm: $x = \sqrt{2}$.

Lưu ý: Ta cũng có thể đặt $x = \frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 7: Giải bất phương trình $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

HD:

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) ta đặt $x = \frac{1}{\cos t}, t \in (0; \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

$$\text{Bất phương trình trở thành } \frac{1}{\cos t} + \frac{|\cos t|}{\cos t} \cdot \frac{1}{\sin t} > \frac{3\sqrt{5}}{2}. \quad (2)$$

Xét hai trường hợp:

$$\text{TH1: } t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Phương trình (2) có dạng:

$$\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} > \frac{3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2(\sin t + \cos t) > 3\sqrt{5} \sin t \cdot \cos t. \quad (2')$$

$$\text{Đặt } u = \sin t + \cos t (u \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]) \Rightarrow \sin t \cdot \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}.$$

BPT (2') trở thành:

$$2u > 3\sqrt{5} \cdot \frac{u^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{3} < u < \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \dots$$

$$\text{TH2: } t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

Ví dụ 8: Giải bất phương trình $x - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

HD:

$$\text{ĐK: } |x| > 1.$$

$$\text{Ta đặt } x = \frac{1}{\cos t}, t \in (0; \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}. \quad (**)$$

Khi đó BPT có dạng:

$$\frac{1}{\cos t} - \frac{|\cos t|}{\sin t} \cdot \frac{1}{\cos t} < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Xét hai trường hợp:

$$\text{TH1: } t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

TH2: $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ:

1) Giải phương trình: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$.

ĐS: Phương trình có 2 nghiệm: $x = \frac{5}{4}$; $x = \frac{5}{3}$.

2) Giải bất phương trình: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{35}{12}$.

DẠNG 3: Trong bài có chứa biểu thức dạng $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Phương pháp: Ta đặt $x = |a| \tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

(hoặc $x = |a| \cot t$, với $t \in (0; \pi)$).

Ví dụ 9: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 1} = x + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Nhận xét: Trong phương trình có xuất hiện dấu hiệu $\sqrt{x^2 + a^2}$ với $a = 1$.

Giải:

ĐK: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $x = \tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{\tan^2 t + 1} = \tan t + \frac{2}{\sqrt{\tan^2 t + 1}} \Leftrightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 t - \sin t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 1 \\ \sin t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $\sin t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 10: Giải bất phương trình $\sqrt{3^x + 1} \leq 3^{\frac{x}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3^x + 1}}$.

Giải:

ĐK: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $3^{\frac{x}{2}} = \tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{\tan^2 t + 1} \leq \tan t + \frac{2}{\sqrt{\tan^2 t + 1}} \Leftrightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 t - \sin t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \Leftrightarrow \tan t \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ luôn đúng.}$$

Vậy BPT có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 11: Với $a \neq 0$, giải bất phương trình $\sqrt{x^2 + a^2} \leq x + \frac{2a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Nhận xét: Có dạng của ví dụ 10.

Giải:

ĐK: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $x = |a| \tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2} \leq |a| \tan t + \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2}} \Leftrightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 t - \sin t - 1 \leq \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \Leftrightarrow \tan t \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \geq -\frac{|a|}{\sqrt{3}}.$$

Vậy BPT có nghiệm đúng $\forall x \geq -\frac{|a|}{\sqrt{3}}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ:

1) Giải phương trình: $x + \sqrt{x^2 + 11} = 31$.

ĐS: $x = \pm 5$.

2) Giải bất phương trình: $2(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \leq \frac{5a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

DẠNG 4: Dạng khác.

Ví dụ 12: Cho phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = m$ (với m là tham số) (1)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Giải phương trình khi $m = 1$.

Giải:

ĐK: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

Ta thấy rằng $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 1$, nên ta đặt $\begin{cases} \sqrt{x} = \cos t \\ \sqrt{1-x} = \sin t \end{cases}$, với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó phương trình trở thành: $\cos t + \sin t = m \Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m}{\sqrt{2}}$ (1')

a) Điều kiện để (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1') có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{m}{\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

b) Khi $m = 1$, phương trình đã cho trở thành: $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} \\ t = 0 \end{cases} \text{ (do } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right])$$

*) Với $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

*) Với $t = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy khi $m = 1$ phương trình (1) có 2 nghiệm $x = 0, x = 1$.

Lưu ý: Bài toán trên ta có thể giải bằng phương pháp khác.

Ví dụ: Giải bất phương trình $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} < x$.

ĐK: $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. (*)

Với điều kiện (*) ta đặt $x = \cos t$, với $t \in [0; \pi]$.

Khi đó bất phương trình được chuyển về dạng:

$$\sqrt{1+\cos t} - \sqrt{1-\cos t} \leq \cos t \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t} - \sqrt{2\cos^2 \frac{t}{2}} \leq \cos t \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $-1 \leq x \leq 0$.

Ví dụ 13 : Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} > a$.

Giải:

ĐK: $\begin{cases} a-x \geq 0 \\ a+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x \\ a \geq -x \end{cases} \Leftrightarrow a \geq |x|. \quad (*)$

Với điều kiện (*) ta đặt $x = a \cos t$, với $t \in [0; \pi]$. **(**)**

Khi đó bất phương trình được chuyển về dạng:

$$\sqrt{a+a \cos t} - \sqrt{a-a \cos t} > a \cos t \Leftrightarrow \sqrt{2a}(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}) > a \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$\text{Từ (**)} \text{ ta được: } -\frac{\pi}{4} \leq \frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}) \leq 1.$$

Vậy để bất phương trình có nghiệm thì điều kiện là: $\frac{\sqrt{a}}{2} < 1 \Leftrightarrow a < 4$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ:

1) Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \leq x$.

ĐS: $-1 \leq x \leq 0$.

2) Tìm a để BPT sau có nghiệm: $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} > a$.

ĐS: $a < 4$.

E. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU:

Qua quá trình giảng dạy tôi thấy học sinh đã giải quyết các bài toán thuộc các dạng trên một cách nhanh hơn, linh hoạt hơn bằng phương pháp lượng giác hóa. Thực tế, trong nhiều năm liền tôi may mắn được giảng dạy ở các lớp nâng cao có nhiều đối tượng học sinh khá, giỏi. Vào các tiết luyện tập tôi đã có việc lồng ghép phương pháp lượng giác hóa để học sinh giải được các bài tập nâng cao nhằm các em thu thập thêm kiến thức và kinh nghiệm để áp dụng trong các kì thi đại học, cao đẳng.

Kết quả khảo sát sau khi triển khai đề tài.

Nhóm	Số số	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu	
		SL	TL%	SL	TL%	SL	TL%	SL	TL%
Nhóm 1	20	8	40,0%	10	50,0%	2	10,0%	0	0,0%
Nhóm 2	16	4	25,0%	10	62,5,0%	2	12,5%	0	0,0%

F.KẾT LUẬN:

Với kết quả nghiên cứu đã đạt được, tôi đã rất thành công trong việc hướng dẫn, bồi dưỡng đối tượng học sinh khá, giỏi. Tuy nhiên, để giải quyết các bài toán bằng phương pháp lượng giác hóa thì các em học sinh cần phải nắm vững công thức LG cũng như giải phương trình, BPT lượng giác.

G. ĐỀ NGHỊ:

Trong thời gian tới, nếu có điều kiện tôi sẽ mở rộng nghiên cứu đề tài này.

Trên đây là một phương giải phương trình, BPT, hệ phương trình vô tỉ bằng phương pháp lượng giác hóa trong việc bồi dưỡng học sinh khá, giỏi. Tuy nhiên, đề tài trên không tránh khỏi những thiếu sót cần bổ sung. Tôi rất mong được sự góp ý quý đồng nghiệp để SKKN của tôi hoàn thiện hơn.

Xin trân thành cảm ơn!

H.TÀI LIỆU THAM KHẢO:

1. Phương pháp giải toán – Lê Hồng Đức (chủ biên).

2. Phương trình và bất phương trình – Phan Huy Khải.
3. Giải tích hiện đại – Vũ Tuấn (3 tập).
4. Một số số báo “ Toán học và tuổi trẻ”.

XÁC NHẬN CỦA ĐƠN VỊ

Triệu sơn, ngày 10 tháng 4 năm 2013.
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép nội dung của người khác
Người viết

LÊ VĂN THẮNG