

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐIỆN MỘT CHIỀU

①. CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG

Chuyên đề 13:

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT

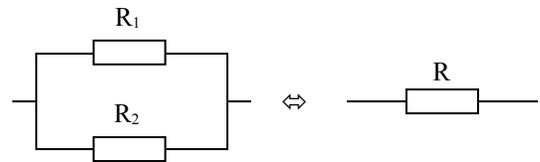
--- A-TÓM TẮT KIẾN THỨC ---

I. PHƯƠNG PHÁP TƯƠNG ĐƯƠNG

Nội dung của *phương pháp tương đương* là thay thế *nhiều nhân tố* bằng *một nhân tố* có tác dụng *tương đương* như nhiều nhân tố đã cho về phương diện nào đó. Chẳng hạn:

-Về phương diện *khối lượng*, ta có thể thay thế hai vật khối lượng 1,5kg và 4,0kg bằng một vật có khối lượng 5,5kg.

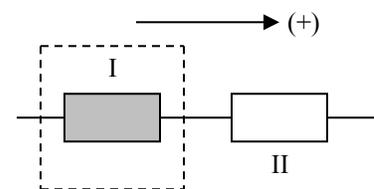
-Về phương diện *điện trở* (tác dụng cản trở dòng điện), ta có thể thay thế hai điện trở $R_1 = 3\Omega$ và $R_2 = 6\Omega$ mắc song song bằng một điện trở $R = 2\Omega$.



Ta nói rằng vật có khối lượng 5,5kg có khối lượng tương đương với hai vật có khối lượng 1,5kg và 4,0kg; điện trở R tương đương với hai điện trở R_1 và R_2 mắc song song.

II. PHƯƠNG PHÁP CÁCH LI

Nội dung của *phương pháp cách li* là *tách* một bộ phận nào đó của hệ ra khỏi hệ để khảo sát, nghiên cứu. Chẳng hạn, với bài toán chuyển động của hệ gồm hai vật ta có thể tách riêng một vật ra để khảo sát, từ đó tính được lực căng dây nối hai vật.

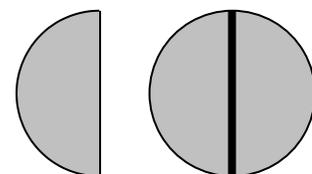


III. PHƯƠNG PHÁP ĐỐI XỨNG

Nội dung của *phương pháp đối xứng* là dựa vào *tính đối xứng* của hệ khảo sát để tìm ra lời giải cho bài toán. Có nhiều bài toán tính đối xứng của hệ được cho sẵn nhưng cũng có nhiều bài toán ta cần phải thêm hoặc bớt một cách thích hợp để tạo ra một hệ có tính đối xứng. Chẳng hạn:

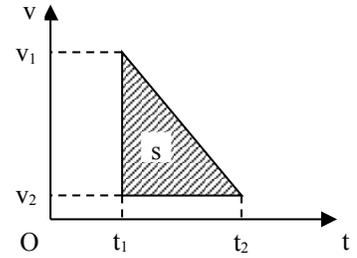
-Tính đối xứng của quả cầu đồng chất, khối lượng phân bố đều cho phép ta xác định được trọng tâm của vật nằm tại tâm quả cầu.

-Bán cầu tích điện đều chưa có tính đối xứng nên ta có thể thêm một bán cầu giống hệt bán cầu đã cho và ghép lại để được quả cầu có tính đối xứng và dễ dàng khảo sát để xác định điện thế do bán cầu đã cho gây ra tại một điểm nào đó (*Bài tập vận dụng 13.3*).



IV. PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

Nội dung của *phương pháp đồ thị* là biến các quan hệ đại số thành quan hệ hình học bằng đồ thị. Vận dụng đặc điểm trực quan của đồ thị để phân tích và giải các bài toán vật lí. Chẳng hạn, để tính quãng đường chuyển động của vật ta có thể tính diện tích giới hạn bởi đồ thị $v - t$; các trục tọa độ hoặc các đường thẳng song song với các trục tọa độ...

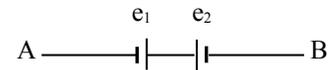


V. PHƯƠNG PHÁP GIẢ ĐỊNH

Nội dung của *phương pháp giả định* là thừa nhận một giả thiết nào đó rồi dựa trên giả thiết đó để tiến hành giải bài toán. Từ kết quả thu được ta kết luận về tính đúng đắn của giả thiết và tìm ra kết quả của bài toán. Cụ thể:

-Có thể lựa chọn một trong các phương án có thể xảy ra như chọn một chiều làm chiều dòng điện (bài toán chưa cho biết chiều dòng điện) và giải bài toán theo phương án đó, nếu tính ra $I > 0$ nghĩa là ta đã giả định đúng chiều dòng điện; nếu tính ra $I < 0$ nghĩa là ta giả định chưa đúng chiều dòng điện và cần phải đổi lại chiều dòng điện trước khi kết luận. Ví dụ, với mạch điện như hình dưới thì:

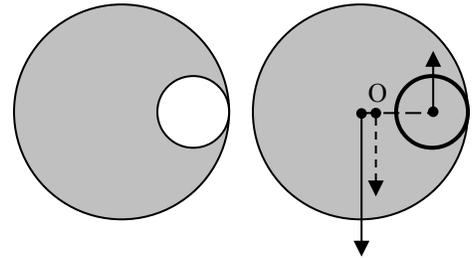
+Nếu chọn chiều dòng điện từ A đến B thì:
$$I = \frac{U_{AB} + e_1 - e_2}{r_1 + r_2}.$$



+Nếu chọn chiều dòng điện từ B đến A thì:
$$I' = \frac{U_{BA} - e_1 + e_2}{r_1 + r_2}.$$

Ta luôn có: $I' = -I$ nên kết quả đúng sẽ là một trong hai phương án trên.

-Có thể thêm bớt một điều kiện nào đó không trái với đề bài để được một hệ hoàn chỉnh, đơn giản đã biết trước tính chất như thêm khối cầu đồng chất có kích thước bằng kích thước lỗ hổng của một quả cầu. Với quả cầu hoàn chỉnh thì ta đã biết trọng tâm tại tâm quả cầu, từ đó vận dụng quy tắc *hợp lực song song ngược chiều* ta tìm được trọng tâm của quả cầu có lỗ hổng ban đầu.



VI. PHƯƠNG PHÁP CHIA NHỎ

Nội dung của *phương pháp chia nhỏ* là chia toàn bộ quá trình phức tạp thành nhiều quá trình nhỏ (quá trình nguyên tố) mà các quá trình nhỏ đó đều tuân theo một quy luật vật lí. Từ việc phân tích một quá trình nguyên tố ta dùng phương pháp suy luận để tìm ra kết quả bài toán. Chẳng hạn, với một xích sắt tiết diện đều khi chuyển động ta không thể coi xích sắt là một chất điểm để khảo sát được nhưng nếu chỉ xét một mắt xích thì có thể coi một mắt xích là một chất điểm. Khảo sát chuyển động của mắt xích và dùng phương pháp ngoại suy vật lí ta suy ra được chuyển động của cả dây xích.

VII. PHƯƠNG PHÁP CỰC TRỊ

Nội dung của *phương pháp cực trị* là khảo sát cực đại, cực tiểu của một đại lượng vật lí (lớn nhất, nhỏ nhất; xa nhất, gần nhất; cao nhất, thấp nhất; tối đa, tối thiểu...). Để giải bài toán bằng phương pháp cực trị ta có thể sử dụng các cách khác nhau như khảo sát hàm số, sử dụng tính chất của bất đẳng thức, tính chất của hàm số,... nhưng phải cần lưu ý đến điều kiện bài toán và lựa chọn cách giải phù hợp để biến bài toán phức tạp thành đơn giản.

VIII. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

Nội dung của *phương pháp quy nạp* là dựa vào sự lặp lại có tính quy luật của các hiện tượng, các quá trình liên tiếp để khái quát thành lời giải cho bài toán. Để giải bài toán bằng phương pháp này ta có thể phân tích một quá trình rồi dựa vào tính lặp lại có quy luật của các quá trình tiếp theo rồi rút ra mối liên hệ giữa quá trình sau với quá trình trước và quy luật chung của các quá trình liên tiếp đó. Chẳng hạn, khi thả quả cầu từ độ cao h thì vận tốc quả cầu ở các lần nảy lên khi tiếp xúc với sàn nhà (giả sử mỗi lần va chạm vận tốc quả cầu giảm đi một nửa) là:

-Khi nảy lên lần thứ 1: $v_1 = \frac{v_0}{2}$, $v_0 = \sqrt{2gh}$ là vận tốc quả cầu khi chạm sàn lần thứ 1.

-Khi nảy lên lần thứ 2: $v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{v_0}{2^2}$.

...

-Khi nảy lên lần thứ n : $v_n = \frac{v_0}{2^n}$.

IX. PHƯƠNG PHÁP ẢNH ĐIỆN

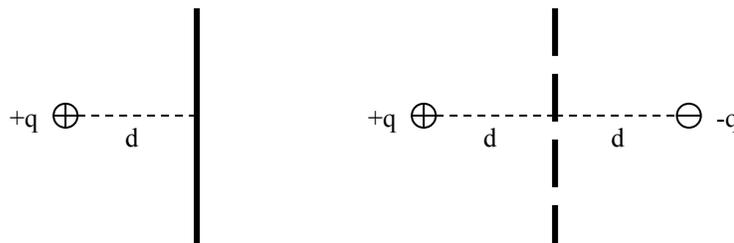
Nội dung của *phương pháp ảnh điện* là thay một mặt đẳng thế nào đó trong điện trường bằng một vật dẫn có cùng hình dạng và cùng điện thế với mặt đẳng thế đang xét thì điện trường ở ngoài vật dẫn ấy sẽ không thay đổi. Chẳng hạn, để xác định lực tác dụng giữa điện tích điểm $+q$ và một mặt phẳng kim loại rộng vô hạn đặt cách $+q$ một đoạn d bằng phương pháp ảnh điện ta làm như sau:

Gọi $-q$ là “ảnh” của $+q$ qua mặt phẳng kim loại rộng vô hạn trên ($-q$ và q đều cách mặt phẳng kim loại trên một đoạn d). Với hệ điện tích “ $+q, -q$ ” thì mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng nối hai điện tích $-q$ và $+q$ là mặt đẳng thế.

-Thay mặt đẳng thế trên bằng mặt phẳng kim loại rộng vô hạn.

-Lực tác dụng giữa điện tích điểm $+q$ và một mặt phẳng kim loại rộng vô hạn đặt cách $+q$ một đoạn d sẽ bằng lực tác dụng giữa hai điện tích $+q$ và $-q$ đặt cách nhau một đoạn $2d$:

$$F = \frac{kq^2}{(2d)^2} = \frac{kq^2}{4d^2}$$



X. CHÚ Ý

Để vận dụng linh hoạt, sáng tạo các phương pháp tổng quát trên trong việc giải nhanh các bài toán vật lý cần chú ý:

-Xác định “dấu hiệu” đặc biệt của bài toán từ đó lựa chọn phương pháp phù hợp để giải nhanh, chính xác bài toán.

-Nắm vững các phương pháp giải để chuyển bài toán từ phức tạp sang đơn giản.

-Mỗi bài toán có thể có nhiều phương pháp giải, mỗi phương pháp có thể vận dụng để giải nhiều dạng bài toán khác nhau, do đó cần luyện tập để trở thành kỹ năng phân tích, nhận dạng và sử dụng phương pháp giải hợp lý. Điều này đạt được khi chúng ta nắm vững lý thuyết ở mục A và rèn luyện kỹ năng giải qua việc giải thật nhiều bài toán vật lý của nhiều dạng khác nhau.

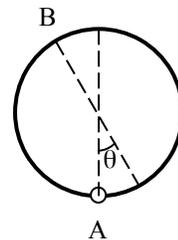
-Các phương pháp trên cũng có thể vận dụng để giải các bài toán thuộc các phần khác nhau của vật lý như cơ học, điện từ, nhiệt học, quang học,...

--- B-CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG---

13.1. Một vòng tròn bán kính R làm bằng nhựa cách điện trơn nhẵn đặt thẳng đứng. Đặt quả cầu nhỏ tích điện, khối lượng m tại điểm A thấp nhất của vòng (hình vẽ). Quả cầu và vòng tròn được đặt trong điện trường đều. Độ lớn của lực điện trường tác dụng lên quả cầu bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}mg$ và

phương của nó nằm ngang, hướng sang phải.

Truyền cho quả cầu vận tốc ban đầu v_0 hướng nằm ngang sang phải làm cho quả cầu chuyển động theo vòng đi lên. Để quả cầu đi hết một vòng thì v_0 phải có giá trị tối thiểu bằng bao nhiêu?



••Bài giải••

-Các ngoại lực tác dụng lên quả cầu: Trọng lực P và lực điện trường F . Trọng lực tương đương tác dụng lên quả cầu là:

$$P' = P + F \Leftrightarrow P' = \sqrt{P^2 + F^2}$$
$$\Leftrightarrow P' = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}mg\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg$$

-Gia tốc trọng trường tương đương có độ lớn: $g' = \frac{2\sqrt{3}}{3}g$ và có phương hợp với phương thẳng đứng góc:

$$\theta = \arctan \frac{F}{P} = \arctan \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}mg}{mg} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

Do đó, B sẽ là điểm “cao nhất” ứng với trọng trường tương đương. Để quả cầu nhỏ thực hiện chuyển động được một vòng thì vận tốc của nó ở điểm cao nhất B phải là: $v_B = \sqrt{g'R}$.

-Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho trọng trường tương đương ta được:

$$W_A = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mg'(R+R\cos\theta) + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2(\sqrt{3}+1)gR}$$

Vậy: Để quả cầu đi hết một vòng thì v_0 phải có giá trị tối thiểu $v_0 = \sqrt{2(\sqrt{3}+1)gR}$.

 Nhận xét:

-Bài toán trên được giải bằng *phương pháp tương đương*. Với bài toán này ta thay hai ngoại lực là trọng lực P và lực điện trường F bằng trọng lực tương đương P' và chuyển lời giải bài toán phức tạp thành bài toán tương đương đơn giản. Phương pháp tương đương là một trong những phương pháp cơ bản của Vật lí.

-Có thể giải bài toán trên bằng phương pháp khác nhưng chắc chắn sẽ phức tạp hơn nhiều. Bạn đọc thử giải bằng phương pháp khác và so sánh với phương pháp này nhé!

13.2. Một viên bi P làm bằng kim loại có thể chuyển động không ma sát trên một vòng tròn tâm O, bán kính R đặt nằm ngang. Viên bi P có điện tích Q. Trên mặt phẳng chứa vòng tròn, tại điểm A cách O một đoạn r ($OA = r < R$) có đặt điện tích q. Trên đường thẳng OA tại điểm A_1 đặt một điện tích q_1 . Xác định điểm A_1 và giá trị điện tích q_1 (theo q) để khi truyền cho viên bi P một vận tốc ban đầu thì nó sẽ chuyển động tròn đều trên vòng tròn.

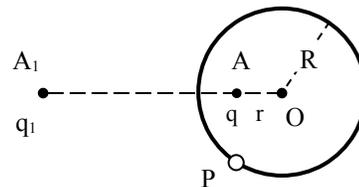
•••**Bài giải**•••

-Vi viên bi P chuyển động tròn đều nên nó chịu tác dụng của lực điện trường có phương trùng với bán kính tại điểm ta xét. Lực này đóng vai trò là lực hướng tâm cho chuyển động tròn đều của viên bi.

-Vi lực điện trường vuông góc với phương chuyển động của viên bi nên công của lực điện trường tác dụng lên viên bi bằng 0, viên bi chuyển động trên một mặt đẳng thế ($V = \text{const}$). Đặt $OA_1 = r_1$, ta có:

$$\frac{kq}{R-r} = \frac{kq_1}{r_1-R} \quad (1)$$

$$\frac{kq}{R+r} = \frac{kq_1}{r_1+R} \quad (2)$$



-Từ (1) và (2): $r_1 = \frac{R^2}{r}$; $q_1 = \frac{R}{r}q$.

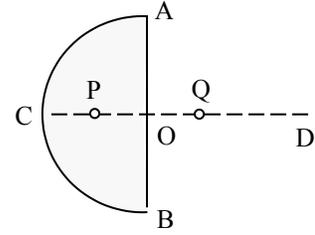
Vậy: Để viên bi P có thể chuyển động tròn đều trên vòng tròn thì $r_1 = OA_1 = \frac{R^2}{r}$; $q_1 = \frac{R}{r}q$.

 Nhận xét:

-Bài toán trên được giải bằng *phương pháp cách li*. Với bài toán này ta xét riêng chuyển động của viên bi dưới góc độ điện thế: viên bi chuyển động tròn đều, lực tác dụng lên viên bi vuông góc với phương chuyển động nên công của lực điện trường bằng 0, do đó viên bi chuyển động trên *mặt đẳng thế*.

-Có thể giải bài toán trên bằng phương pháp khác nhưng chắc chắn sẽ phức tạp hơn nhiều. Bạn đọc thử giải bằng phương pháp khác và so sánh với phương pháp cách li nhé!

13.3. Điện tích q được phân bố đều trên bán cầu ACB, bán kính R . CD là đường thẳng đi qua đỉnh C và tâm O của bán cầu. P và Q là hai điểm trên đường thẳng CD và đối xứng với nhau qua tâm O. Biết điện thế điểm P là V_P , xác định điện thế điểm Q.



••Bài giải••

-Ta tưởng tượng lấy thêm nửa quả cầu bên phải cũng có bán kính R , điện tích q ghép với bán cầu đã cho thành quả cầu có bán kính R , điện tích $2q$.

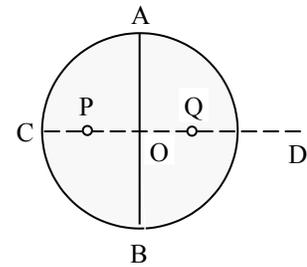
-Do tính đối xứng nên điện thế tại điểm P do bán cầu bên phải tạo ra là: $V'_P = V_Q$.

$$\Rightarrow V_P + V_Q = V_P + V'_P$$

-Mặt khác, $V_P + V'_P$ chính là điện thế do cả quả cầu gây ra tại điểm P. Vì điện tích trên mặt quả cầu là đều nên:

$$V_P + V'_P = k \frac{2q}{R}$$

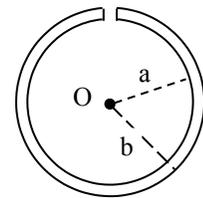
-Điện thế tại Q do bán cầu bên trái gây ra là: $V_Q = k \frac{2q}{R} - V_P$.



Vậy: Điện thế tại Q do bán cầu bên trái gây ra là: $V_Q = k \frac{2q}{R} - V_P$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải bằng *phương pháp đối xứng*. Với bài toán tính đối xứng được suy luận bằng cách bổ sung thêm nửa bán cầu còn thiếu để tạo ra quả cầu hoàn chỉnh có tính đối xứng và khi xác định kết quả cuối cùng ta phải “loại” phần bổ sung thêm để nội dung bài toán trở lại như ban đầu.

13.4. Một vỏ cầu dẫn điện nhưng không tích điện, bán kính trong và ngoài của nó tương ứng là a và b . Trên vỏ cầu có một lỗ nhỏ. Tại tâm O có điện tích điểm Q. Muốn đem điện tích điểm Q từ từ qua lỗ nhỏ ra ngoài xa vô cực thì cần thực hiện một công là bao nhiêu?



••Bài giải••

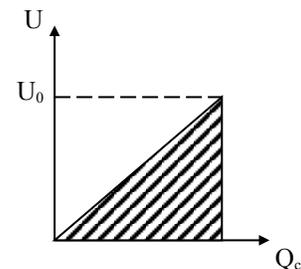
-Điện thế do điện tích cảm ứng trên mặt trong và ngoài quả cầu gây ra ở tâm quả cầu là:

$$U = kQ_c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow U \sim Q_c$$

-Vì $U \sim Q_c$ nên đồ thị $U - Q_c$ được vẽ như hình bên.

-Điện thế do điện tích cảm ứng tạo ra ở ngoài tâm O cũng là:

$$U_0 = U = kQ_c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$



-Công thực hiện để đưa điện tích Q từ tâm O ra xa vô cực bằng phần diện tích gạch gạch trên đồ thị $U - Q_c$:

$$A = \frac{1}{2} Q_c U_0 = \frac{1}{2} kQ^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

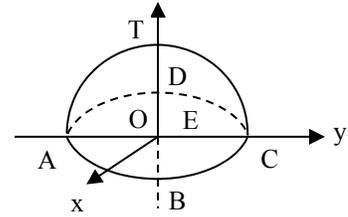
Vậy: Muốn đem điện tích điểm Q từ từ qua lỗ nhỏ ra ngoài xa vô cực thì cần thực hiện một công là $A = \frac{1}{2} kQ^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải theo *phương pháp đồ thị*. Với bài toán trên ta đã dựa vào mối quan hệ $U \sim Q_c$ để vẽ đồ thị và từ đồ thị tính được công A một cách dễ dàng.

13.5. Một vỏ bán cầu mỏng ABCD không dẫn điện, tâm O, đường kính $AC = 2R$, tích điện đều được đặt úp trên mặt phẳng xOy . Tại điểm E trên OC ($OE = r$) có một điện tích điểm q . Biết rằng khi di chuyển điện tích điểm này từ điểm E dần lên đỉnh T của bán cầu, ngoại lực cần phải thực hiện công A ($A > 0$), bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực.

a) Tìm độ lớn và dấu của công ngoại lực làm di chuyển điện tích này từ E đến A.

b) Tìm độ lớn và dấu của công ngoại lực làm di chuyển điện tích này từ E đến P (P là điểm đối xứng với T qua O).



•••**Bài giải**•••

a) Độ lớn và dấu của công ngoại lực làm di chuyển điện tích q từ E đến A

Giả sử lấy một vỏ bán cầu khác, tích điện giống hệt bán cầu nói trên ghép lại thành một vỏ cầu hoàn chỉnh thì vỏ cầu trở thành vật đẳng thế. Gọi U là điện thế của vỏ cầu đẳng thế.

- Vì hai nửa vỏ cầu đối xứng qua mặt ABCD nên các điểm trên mặt này cũng đẳng thế:

$$V_A = V_B = V_C = V_D = V_E$$

- Điện thế các điểm trên mặt hình tròn ABCD của nửa vỏ cầu đã cho khi không có nửa vỏ cầu giả định ghép vào là:

$$V_A = V_B = V_C = V_D = V_E = \frac{U}{2}$$

- Công ngoại lực làm di chuyển điện tích q từ E đến A: $A_{EA} = qU_{EA} = 0$.

Vậy: Công ngoại lực làm di chuyển điện tích q từ E đến A là $A_{EA} = 0$.

b) Độ lớn và dấu của công ngoại lực làm di chuyển điện tích q từ E đến P

- Với vỏ cầu hoàn chỉnh: $V_E = V_T \Rightarrow U_{TE} = 0$.

- Nếu giữa T và E có một hiệu điện thế $U_{TE} \neq 0$ thì $U_{EP} = -U_{TE}$.

$$\Rightarrow A_{EP} = -A_{ET} = -A < 0$$

Vậy: Công ngoại lực làm di chuyển điện tích q từ E đến P là $A_{EP} = -A < 0$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải theo *phương pháp giả định*. Với bài toán trên, ta giả định rằng đã “thêm” một vỏ bán cầu khác, tích điện giống hệt bán cầu nói trên và ghép lại thành một vỏ cầu hoàn chỉnh. Từ đặc điểm vỏ cầu hoàn chỉnh là vật đẳng thế nên lời giải bài toán thật đơn giản phải không các bạn!

13.6. Một vùng hình cầu bán kính R , tâm O. Điện tích điểm $+q$ đặt tại một điểm nằm ngoài vùng hình cầu nói trên, cách tâm O một khoảng r ($r > R$). Tính cường độ điện trường trung bình trong vùng hình cầu này.

•••Bài giải•••

Giả sử vùng hình cầu được tích điện với mật độ điện khối ρ . Trong vùng này, cách điện tích q một đoạn r_i lấy một thể tích rất nhỏ ΔV_i có điện tích $\Delta q = \rho \Delta V_i$.

-Lực điện do vùng hình cầu tác dụng lên điện tích điểm q là:

$$F = \sum_{V_i} \frac{k\Delta q}{r_i^2} q = \sum_{V_i} \frac{k\rho \Delta V_i}{r_i^2} q$$

-Mặt khác, lực điện do điện tích điểm q tác dụng lên cả vùng cầu tích điện là:

$$F' = E\rho V = \sum_{V_i} \frac{k\rho \Delta V_i}{r_i^2} \rho V$$

-Theo định luật III Niu-ton, ta có: $F' = F$.

$$\Leftrightarrow \sum_{V_i} \frac{k\rho \Delta V_i}{r_i^2} q = \sum_{V_i} \frac{k\rho \Delta V_i}{r_i^2} \rho V$$

-Vì cường độ điện trường tại một điểm ở ngoài quả cầu tích điện giống cường độ điện trường của một điện tích điểm đặt tại tâm quả cầu nên:

$$E = \frac{F}{\rho V} = \frac{k \frac{\rho V}{r^2} q}{\rho V} = \frac{kq}{r^2}$$

Vậy: Cường độ điện trường trung bình trong vùng hình cầu này là $E = \frac{kq}{r^2}$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải theo *phương pháp chia nhỏ*. Với bài toán trên, ta đã “chia nhỏ” vùng hình cầu ra thành nhiều vùng thể tích rất nhỏ ΔV_i cách điện tích điểm q một đoạn r_i rồi dùng công thức tính giá trị trung bình để tính cường độ trung bình trong vùng hình cầu đã cho.

13.7. Cho quả cầu nhỏ dẫn điện nhưng không mang điện tiếp xúc với một quả cầu lớn dẫn điện và mang điện tích Q . Sau khi tách ra khỏi quả cầu lớn thì quả cầu nhỏ mang điện tích q . Tiếp theo lại cho quả cầu lớn và quả cầu nhỏ tiếp xúc với nhau. Sau mỗi lần tách ra, quả cầu lớn lại được nạp bổ sung cho đến khi điện tích của nó bằng giá trị ban đầu Q . Hỏi điện tích tối đa quả cầu nhỏ có thể thu được là bao nhiêu?

•••Bài giải•••

***Cách 1:**

Gọi r, R là bán kính của hai quả cầu nhỏ và lớn; ρ là mật độ điện tích phân phối trên các quả cầu. Sau khi hai quả cầu tiếp xúc, tỉ số phân phối điện tích trên hai quả cầu là:

$$\frac{q'}{Q'} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\rho \frac{4}{3} \pi r^3} = \left(\frac{R}{r} \right)^3 = \text{const}$$

-Sau lần tiếp xúc thứ nhất, ta có: $\frac{Q - q}{q} = \left(\frac{R}{r} \right)^3$ (1)

-Sau lần tiếp xúc cuối cùng, ta có: $\frac{Q}{q_m} = \left(\frac{R}{r}\right)^3$ (2)

-Từ (1) và (2): $\frac{Q - q}{q} = \frac{Q}{q_m} \Rightarrow q_m = \frac{qQ}{Q - q}$.

Vậy: Điện tích tối đa mà quả cầu nhỏ có thể thu được là $q_m = \frac{qQ}{Q - q}$.

***Cách 2:**

-Hai quả cầu cô lập tiếp xúc nhau tương đương với hai tụ điện mắc song song có một đầu chung nối đất. Gọi Q_1, Q_2 là điện tích của hai tụ điện đó, ta có:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Leftrightarrow \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = k = \text{const}$$

$$\Rightarrow Q_1 = (Q_1 + Q_2)k \quad (1)$$

-Từ (1) ta thấy, quả cầu nhỏ dù mang điện hay không thì sau khi cho hai quả cầu tiếp xúc nhau, tỉ số điện tích trên quả cầu nhỏ và tổng điện tích trên hai quả cầu luôn là k (hằng số). Do đó nếu gọi q_1, q_2, \dots là điện tích trên quả cầu nhỏ sau lần tiếp xúc thứ 1, thứ 2, Ta có:

$$q_1 = kQ = q; \quad q_2 = k(Q + q_1) = kQ + kq_1 = q + kq;$$

$$q_3 = k(Q + q_2) = kQ + kq_2 = q + kq + k^2q;$$

...

$$q_n = k(Q + q_{n-1}) = kQ + kq_{n-1} = q + kq + k^2q + \dots + k^{n-1}q \quad (2)$$

-Vì $k < 1$ nên với n đủ lớn thì (2) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn nên:

$$q_n = \frac{q}{1 - k} = \frac{qQ}{Q - q}$$

Vậy: Điện tích tối đa mà quả cầu nhỏ có thể thu được là $q_m = \frac{qQ}{Q - q}$.

 Nhận xét:

-Ở cách 1, ta đã giải bài toán trên bằng *phương pháp cực trị*. Ở bài toán trên từ việc phân tích ta suy ra tỉ số $\frac{q'}{Q} = \text{const}$; xét hai lần tiếp xúc đầu tiên và cuối cùng ta xác định được q_m . Thật đơn giản phải không các bạn.

-Ở cách 2, ta đã giải bài toán trên bằng *phương pháp quy nạp* (truy hồi). Với bài toán trên, quy luật điện tích trên quả cầu nhỏ là $Q_1 = (Q_1 + Q_2)k$, từ đó bằng phương pháp quy nạp ta xác định được q_m .

13.8. Phía trước một tấm kim loại rất rộng được nối đất có đặt một điện tích điểm $-q$ tại điểm A cách tấm kim loại một khoảng d.

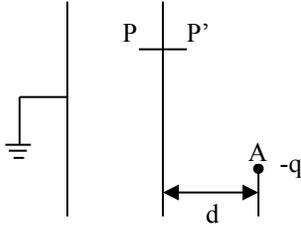
a) Tính cường độ điện trường tại điểm P ở bên trong tấm kim loại do điện tích cảm ứng gây ra.

b) Tính cường độ điện trường tại điểm P' đối xứng với P qua mặt ngoài về phía điểm A của tấm kim loại.

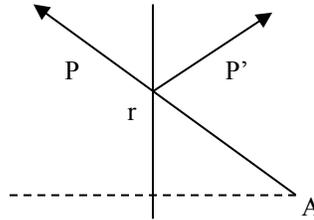
c) Dựa trên phân tích cường độ điện trường hãy chứng minh cường độ điện trường ở gần bề mặt tấm kim loại vuông góc với bề mặt.

d) Hãy tính lực do các điện tích cảm ứng trên tấm kim loại tác dụng lên điện tích điểm $-q$.

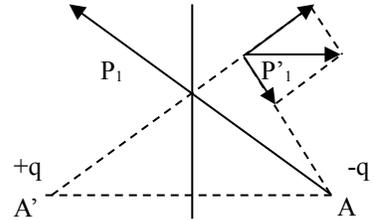
e) Sau khi cắt bỏ dây tiếp đất rồi truyền cho tấm kim loại này đến điện tích $+Q$. Hỏi lượng điện tích này sẽ phân bố như thế nào để tấm kim loại lại trở về trạng thái cân bằng tĩnh điện?



Hình a



Hình b



Hình c

•••Bài giải•••

a) Cường độ điện trường tại điểm P ở bên trong tấm kim loại do điện tích cảm ứng gây ra

-Thay cường độ điện trường do điện tích bề mặt tạo ra bằng cường độ điện trường do điện tích điểm gây ra.

-Khi vật dẫn cân bằng tĩnh điện, ta có: $E_{cảm} = E_{dẫn}$.

$$\Rightarrow E_p = \frac{kq}{r^2}; r = AP \text{ và } E_p \text{ hướng từ A đến P (hình b)}$$

Vậy: Cường độ điện trường tại điểm P ở bên trong tấm kim loại do điện tích cảm ứng gây ra có độ lớn $E_p = \frac{kq}{r^2}$ và có hướng từ A đến P.

b) Cường độ điện trường tại điểm P' đối xứng với P qua mặt ngoài về phía điểm A của tấm kim loại

Vì tấm kim loại tiếp đất nên điện tích cảm ứng phân bố ở mặt ngoài bên phải (phía điểm A). Vì điện trường của điện tích tại P và P' có tính đối xứng nên:

$$E_{p'} = E_p = \frac{kq}{r^2} \text{ và } E_{p'} \text{ có hướng như hình b}$$

Vậy: Cường độ điện trường tại điểm P' có độ lớn $E_{p'} = \frac{kq}{r^2}$ và có hướng như hình b.

c) Chứng minh cường độ điện trường ở gần bề mặt tấm kim loại vuông góc với bề mặt

-Xét hai điểm P₁ và P'₁ nằm ở hai phía rất gần mặt ngoài của tấm kim loại. Độ lớn cường độ điện trường do các điện tích +q và -q đặt tại A và A' gây ra tại P'₁ bên trong tấm kim loại là:

$$E_{+q} = \frac{kq}{r^2}; E_{-q} = \frac{kq}{r^2}$$

-Cường độ điện trường tổng hợp do hai điện tích +q và -q đặt tại A và A' gây ra tại P'₁ là:

$$E_{P'_1} = E_{+q} + E_{-q}$$

-Trên hình vẽ ta dễ dàng chứng minh được rằng $E_{P'_1} = E_{+q} + E_{-q}$ có phương nằm ngang, nghĩa là vuông góc với bề mặt tấm kim loại.

d) Lực do các điện tích cảm ứng trên tấm kim loại tác dụng lên điện tích điểm $-q$

- Cường độ điện trường do điện tích cảm ứng gây ra ở điểm A là:

$$E_A = \frac{kq}{(2d)^2} = \frac{kq}{4d^2}$$

- Lực điện trường tác dụng lên điện tích điểm $-q$ đặt tại A là:

$$F_A = -qE_A = -\frac{kq^2}{4d^2}$$

Vậy: Lực do các điện tích cảm ứng trên tấm kim loại tác dụng lên điện tích điểm $-q$ đặt tại A có

độ lớn $F_A = -\frac{kq^2}{4d^2}$ và có hướng sang trái.

e) Sự phân bố của điện tích sau khi cắt bỏ dây tiếp đất để tấm kim loại lại trở về trạng thái cân bằng tĩnh điện

Sau khi cắt dây nối đất, điện tích cảm ứng vẫn được duy trì và phân bố như trước, cường độ điện trường bên trong tấm kim loại bằng 0. Khi truyền cho tấm kim loại điện tích $+Q$ mà điện trường bên trong tấm kim loại bằng 0 thì cân bằng được thiết lập, điều này thỏa mãn khi hai mặt ngoài của tấm kim loại có điện tích phân bố đều.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải theo *phương pháp ảnh điện*. Ở đây ta thay một mặt đẳng thế trong điện trường bằng một vật dẫn có cùng hình dạng và cùng điện thế với mặt đẳng thế đang xét thì điện trường ở ngoài vật dẫn ấy sẽ không bị thay đổi.

Chuyên đề 14:

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ MẠCH ĐIỆN

--- A-TÓM TẮT KIẾN THỨC ---

I. PHƯƠNG PHÁP KIẾC-XÓP

1. Các khái niệm và định luật

- *Nút* là điểm gặp nhau của một nhóm gồm ít nhất ba dây dẫn.

- *Mắt mạng* (mạch vòng) là một mạch kín bất kì tách ra từ mạch điện phân nhánh.

- *Định luật Kiếc-xốp 1* (định luật về nút mạng): Tổng đại số của các dòng điện đi qua một nút phải bằng 0.

$$\sum_k I_k = 0 \quad (14.1)$$

- *Định luật Kiếc-xốp 2* (định luật về mắt mạng): Trong một mắt mạng bất kì, tổng đại số của các suất điện động luôn bằng tổng đại số các độ giảm thế trên các đoạn mạch thuộc mắt đó.

$$\sum_k e_k = \sum_k I_k R_k \quad (14.2)$$

2. Nội dung phương pháp: Để vận dụng phương pháp Kiếc-xốp cần thực hiện các bước sau:

-Chọn chiều dòng điện trên các đoạn mạch không phân nhánh (nếu *chưa biết* chiều dòng điện trên các đoạn mạch đó).

-Dựa vào định luật Kiéc-xốp lập n phương trình theo n ẩn số phải tìm, trong đó:

+Lập (m – 1) phương trình nút mạng theo định luật Kiéc-xốp 1 (nếu có m nút mạng).

+Lập (n – m + 1) phương trình mắt mạng theo định luật Kiéc-xốp 2.

-Giải hệ gồm n phương trình đã lập.

-Biện luận từ kết quả thu được:

+Nếu $I > 0$, ta đã giả định đúng chiều dòng điện thực tế trên đoạn mạch.

+Nếu $I < 0$, ta đã giả định sai chiều dòng điện thực tế trên đoạn mạch nên phải đổi lại chiều dòng điện đã giả định.

II. PHƯƠNG PHÁP NGUỒN TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Nội dung phương pháp: Đối với trường hợp mạch điện gồm nhiều nguồn điện mắc với nhau $((e_1, r_1); (e_2, r_2); \dots)$ ta có thể thay các nguồn đó bằng một nguồn tương đương (e_b, r_b) : bài toán quy về việc xét một mạch điện đơn giản với chỉ có một nguồn điện (e_b, r_b) .

2. Các trường hợp cụ thể

a) Các nguồn mắc nối tiếp: $e_b = \sum_i e_i$; $r_b = \sum_i r_i$.

b) Các nguồn mắc xung đối: $e_b = \sum_{i_1} e_{i_1} - \sum_{i_2} e_{i_2}$; $r_b = \sum_i r_i$.

(dấu + ứng với nguồn điện; dấu - ứng với máy thu điện)

c) Các nguồn giống nhau mắc song song: $e_b = e$; $r_b = \frac{r}{n}$.

d) Các nguồn giống nhau mắc hỗn hợp đối xứng (n dãy, mỗi dãy m nguồn mắc nối tiếp):

$$e_b = me; r_b = \frac{mr}{n}$$

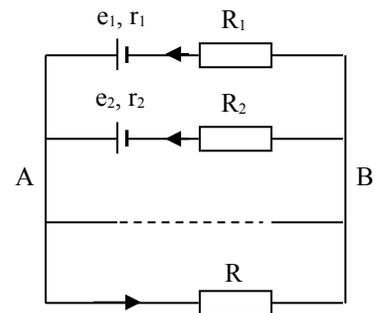
e) Các nguồn khác nhau mắc song song:

$$\frac{e_b}{r_b} = \frac{e_1}{r_1 + R_1} + \frac{e_2}{r_2 + R_2} + \dots \quad (14.3)$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{r_1 + R_1} + \frac{1}{r_2 + R_2} + \dots \quad (14.4)$$

$$U_{AB} = \frac{\frac{e_1}{r_1 + R_1} + \frac{e_2}{r_2 + R_2} + \dots}{\frac{1}{r_1 + R_1} + \frac{1}{r_2 + R_2} + \dots} = \frac{e_b}{R + r_b} \quad (14.5)$$

***Chú ý:** Nếu có nguồn ở nhánh nào mắc ngược lại thì suất điện động đó sẽ có giá trị -; nhánh nào không có e hoặc r thì giá trị tương ứng của nó sẽ bằng 0 trong các biểu thức trên.



III. PHƯƠNG PHÁP CHỖNG CHẤT DÒNG ĐIỆN

1. Cơ sở lý thuyết

-Nếu trong một mạch điện có nhiều nguồn điện, dòng điện qua từng điện trở là tổng hợp các dòng điện do mỗi nguồn cung cấp riêng biệt khi mà suất điện động các nguồn khác coi như bằng 0.

$$I^R = \sum_k I_k^R \quad (14.6)$$

(I^R là dòng tổng hợp qua R; I_k^R là dòng do nguồn thứ k cung cấp qua R)

-Nếu có nhiều dòng điện cùng đi qua điện trở R theo các chiều khác nhau thì dòng điện tổng hợp qua R bằng tổng đại số các dòng thành phần.

2. Nội dung phương pháp: Lần lượt coi dòng qua một điện trở chỉ do một nguồn điện cung cấp còn các nguồn khác đều có suất điện động bằng 0. Áp dụng định luật Ôm cho từng trường hợp rồi áp dụng hệ thức (13.6) ta xác định được dòng qua điện trở đó.

IV. PHƯƠNG PHÁP DÒNG MÁT MẠNG

1. Cơ sở lý thuyết: Phương pháp dòng mắt mạng là sự kết hợp các phương pháp Kiéc-xốp và phương pháp chông chất dòng điện.

2. Nội dung phương pháp

-Chọn chiều cho các dòng mắt mạng.

-Áp dụng định luật Kiéc-xốp II viết m phương trình cho m mắt mạng.

-Giải hệ các phương trình trên được các giá trị I_k .

-Dòng điện qua các đoạn mạch là tổ hợp tương ứng các dòng mắt mạng đi qua đoạn mạch đó.

V. PHƯƠNG PHÁP ĐIỆN THẾ NÚT

1. Cơ sở lý thuyết: Phương pháp điện thế nút là sự kết hợp phương pháp Kiéc-xốp và việc vận dụng định luật Ôm cho đoạn mạch tổng quát.

2. Nội dung phương pháp

-Chọn một nút làm nút nối đất (điện thế bằng 0).

-Áp dụng định luật Kiéc-xốp 1 và định luật Ôm tổng quát để lập $(n - 1)$ phương trình cho n nút.

-Giải hệ các phương trình trên được các giá trị điện thế V_k .

-Từ các giá trị V_k ta tính được các hiệu điện thế, các dòng điện trong mỗi đoạn mạch.

--- B-CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG---

14.1. Cho mạch điện như hình vẽ: $e_1 = 12,5V$; $r_1 = 1\Omega$; $e_2 = 8V$; $r_2 = 0,5\Omega$; $R_1 = R_2 = 5\Omega$; $R_3 = R_4 = 2,5\Omega$; $R_5 = 4\Omega$; $R_A = 0,5\Omega$. Tính cường độ dòng điện qua các đoạn mạch và số chỉ của ampe kế.

•••Bài giải•••

Chọn chiều dòng điện như trên hình vẽ.

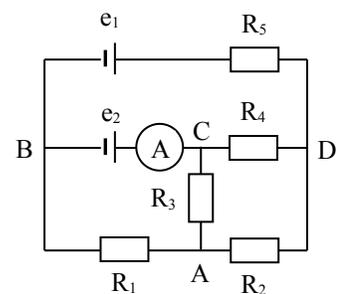
-Áp dụng định luật Kiéc-xốp 1 cho các nút B, C, A và D ta được:

$$I = I_1 + I_5 = I_3 + I_4 \quad (1)$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (2)$$

$$I_4 = I_2 + I_5 \quad (3)$$

-Áp dụng định luật Kiéc-xốp 2 cho các mắt mạng ACBA; BCDB và CDAC ta được:



$$e_2 = R_1 I_1 + R_3 I_3 + (r_2 + R_A) I \quad (4)$$

$$e_1 + e_2 = (R_5 + r_1) I_5 + R_4 I_4 + (r_2 + R_A) I \quad (5)$$

$$0 = R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_3 I_3 \quad (6)$$

$$8 = 5 I_1 + 2,5 I_3 + (r_2 + R_A) I \quad (4')$$

$$\Leftrightarrow 20,5 = 5 I_5 + 2,5 I_4 + I \quad (5')$$

$$0 = 5 I_2 + 2,5 I_4 - 2,5 I_3 \quad (6')$$

$$\text{-Từ (4')} \text{ và (5')}: 2I + 5(I_1 + I_5) + 2,5(I_3 + I_4) = 28,5 \quad (7)$$

$$\text{-Từ (7) và (1)}: 9,5I = 28,5 \Rightarrow I = 3A.$$

$$\text{-Từ (2), (1) và (6')}: 5(I_1 - I_3) + 2,5(I - I_3) - 2,5I_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5I_1 - 10I_3 = -2,5I = -2,5 \cdot 3 = -7,5 \quad (8)$$

$$\text{-Từ (4')} \text{ và (8)}: I_3 = 1A; I_1 = 0,5A.$$

$$\Rightarrow I_5 = I - I_1 = 3 - 0,5 = 2,5A; I_2 = I_1 - I_3 = 0,5 - 1 = -0,5A; I_4 = I_2 + I_5 = -0,5 + 2,5 = 2A.$$

-Vì $I_2 < 0$ nên dòng điện chạy trên đoạn AD theo chiều từ D đến A.

Vậy: Cường độ dòng điện qua các đoạn mạch là $I_1 = 0,5A$; $I_2 = 0,5A$; $I_3 = 1A$; $I_4 = 2A$; $I_5 = 2,5A$; số chỉ của ampe kế là $I_A = I = 3A$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải bằng *phương pháp Kiéc-xốp*. Bạn đọc có thể giải bằng các phương pháp khác.

14.2. Cho mạch điện như hình vẽ: $r = 2\Omega$; đèn Đ: $7V-7W$; $R_1 = 18\Omega$; $R_2 = 2\Omega$; R_b là biến trở. Đóng khóa K và điều chỉnh R_b khi đó đèn sáng bình thường và đạt công suất tiêu thụ cực đại.

a) Tính suất điện động của nguồn và giá trị R_b khi đó.

b) Khi khóa K mở, đèn sáng như thế nào?

•••Bài giải•••

a) Suất điện động của nguồn và giá trị R_b

-Khi khóa K đóng:

+Ghép nguồn (e, r) với R_2 thành nguồn tương đương (e_1, r_1) , với:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \Rightarrow r_1 = \frac{rR_2}{r + R_2} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1\Omega$$

$$\frac{e_1}{r_1} = \frac{e}{r} \Rightarrow e_1 = r_1 \frac{e}{r} = \frac{e}{2}$$

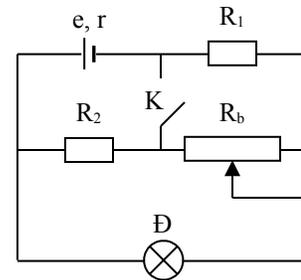
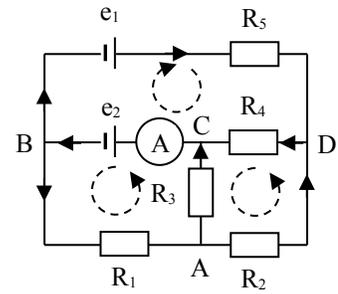
+Ghép nguồn (e_1, r_1) với R_1 và R_b thành nguồn tương đương (e_0, r_0) , với:

$$r_0 = r_1 + R_{1b} = r_1 + \frac{R_1 R_b}{R_1 + R_b} = 1 + \frac{18 R_b}{18 + R_b}$$

$$e_0 = e_1 = \frac{e}{2}$$

+Mạch tương đương gồm (e_0, r_0) và Đ.

$$\text{-Cường độ dòng điện qua đèn: } I = \frac{e_0}{r_0 + R_d}$$



-Công suất tiêu thụ trên đèn: $P = R_d I^2 = R_d \left(\frac{e_0}{r_0 + R_d} \right)^2 = \left(\frac{e_0}{\frac{r_0}{\sqrt{R_d}} + \sqrt{R_d}} \right)^2$.

-Để $P = P_{\max} \Leftrightarrow r_0 = R_d = \frac{U_d^2}{P_d} = \frac{7^2}{2} = 7\Omega$.

$\Leftrightarrow 1 + \frac{18R_b}{18+R_b} = 7 \Rightarrow R_b = 9\Omega$

-Mặt khác, khi $P = P_{\max}$ thì $U_d = \frac{e_0}{2} = \frac{e}{4} \Rightarrow e = 4U_d = 4 \cdot 7 = 28V$.

Vậy: Khi đèn sáng bình thường và đạt công suất tiêu thụ cực đại thì suất điện động của nguồn và giá trị R_b khi đó là $e = 28V$ và $R_b = 9\Omega$.

b) Độ sáng của đèn khi khóa K mở

-Khi khóa K mở, mạch ngoài gồm: $[R_1 \text{ nt } (R_{2b} // R_d)]$, do đó:

$$R = R_1 + \frac{(R_2 + R_b)R_d}{R_2 + R_b + R_d} = 18 + \frac{(2 + 9) \cdot 7}{2 + 9 + 7} = \frac{401}{18} \Omega$$

-Cường độ dòng điện qua mạch chính: $I = \frac{e}{r + R} = \frac{28}{2 + \frac{401}{18}} = 1,153A$.

-Cường độ dòng điện qua đèn: $I' = \frac{I R_{2bd}}{R_d} = \frac{I (R_2 + R_b) R_d}{R_2 + R_b + R_d} = \frac{1,153 \cdot (2 + 9) \cdot 7}{2 + 9 + 7} = 0,705A$.

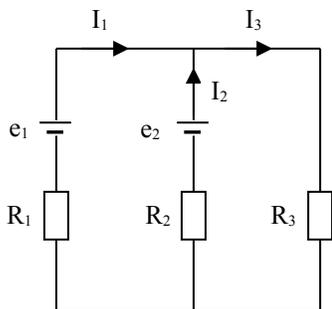
-Vì $I' < I_d = \frac{P_d}{U_d} = \frac{7}{7} = 1A$ nên đèn sáng yếu hơn bình thường.

Vậy: Khi khóa K mở thì đèn Đ sáng yếu hơn bình thường.

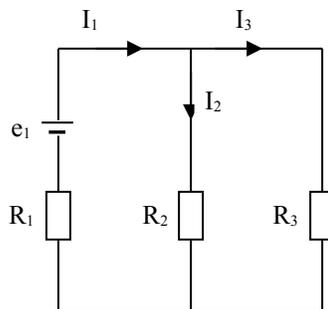
 Nhận xét: Bài toán trên được giải bằng phương pháp tương đương. Bạn đọc có thể giải bằng các phương pháp khác.

14.3. Cho mạch điện như hình vẽ a: $e_1 = 60V$; $e_2 = 30V$; $r_1 = r_2 \approx 0$; $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$. Tính cường độ dòng điện qua các nhánh.

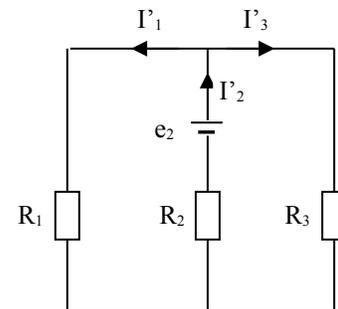
•••Bài giải•••



Hình a



Hình b



Hình c

-Sơ đồ b: Coi nguồn $e_2 = 0$, ta có: $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1\Omega$.

Và $I_1^{R_1} = \frac{e_1}{R_1 + R_{23}} = \frac{60}{2 + 1} = 20A$; $I_2^{R_2} = I_3^{R_3} = \frac{I_1^{R_1}}{2} = \frac{20}{2} = 10A$.

-Sơ đồ c: Coi nguồn $e_1 = 0$, ta có: $R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1\Omega$.

Và $I_2^{R_2} = \frac{e_2}{R_2 + R_{13}} = \frac{30}{2 + 1} = 10A$; $I_1^{R_1} = I_3^{R_3} = \frac{I_2^{R_2}}{2} = \frac{10}{2} = 5A$.

-Áp dụng nguyên lý chồng chất dòng điện, ta có:

$$I_1 = I_1^{R_1} - I_1^{R_1} = 20 - 5 = 15A$$

$$I_2 = I_2^{R_2} - I_2^{R_2} = 10 - 10 = 0$$

$$I_3 = I_3^{R_3} + I_3^{R_3} = 10 + 5 = 15A$$

Vậy: Cường độ dòng điện qua các nhánh của mạch điện là $I_1 = 15A$, $I_2 = 0$, $I_3 = 15A$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải bằng *phương pháp chồng chất dòng điện*. Bạn đọc có thể giải bằng các phương pháp khác.

14.4. Cho mạch điện như hình a: $e_1 = 18V$, $r_1 = 6\Omega$; $e_2 = 3V$, $r_2 = 3\Omega$; $e_3 = 16V$, $r_3 = 2\Omega$. Tính cường độ dòng điện qua các nhánh.

•••Bài giải•••

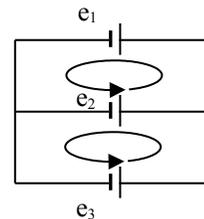
Chọn chiều dòng điện như hình b; gọi dòng điện trong các mắt mạng là I_1 và I_2 . Áp dụng định luật Kiéc-xốp 2 cho hai mắt mạng, ta được:

$$\begin{aligned} e_2 - e_1 &= r_1 I_1 + r_2 (I_1 - I_2) \\ e_3 - e_2 &= r_3 I_2 + r_2 (I_2 - I_1) \end{aligned}$$

hay $3 - 18 = 6I_1 + 3(I_1 - I_2) \Leftrightarrow -15 = 9I_1 - 3I_2$

$16 - 3 = 2I_2 + 3(I_2 - I_1) \Leftrightarrow 13 = -3I_1 + 5I_2$

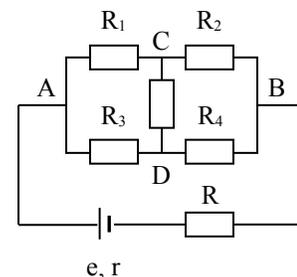
$\Rightarrow I_1 = -1A$; $I_2 = 2A$



Vậy: Cường độ dòng điện qua các nhánh là: $I_{e_1} = -I_1 = 1A$; $I_{e_2} = I_2 - I_1 = 2 - (-1) = 3A$; $I_{e_3} = I_2 = 2A$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải bằng *phương pháp dòng mắt mạng*. Bạn đọc có thể giải bằng các phương pháp khác.

14.5. Cho mạch điện như hình vẽ: $e = 26V$; $r = 1\Omega$; $R = 3\Omega$; $R_1 = 5\Omega$; $R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 10\Omega$; $R_4 = 30\Omega$; $R_5 = 5\Omega$. Tính cường độ dòng điện qua các điện trở và điện trở tương đương của đoạn mạch AB.



•••Bài giải•••

Giả sử dòng điện qua các đoạn mạch có chiều như hình vẽ.

Đặt $U_{AB} = U$, chọn $V_B = 0 \Rightarrow V_A = U$.

-Áp dụng định luật Kiéc-xốp 1 cho các nút C và D, ta được:

$$I_1 = I_2 + I_5; I_4 = I_3 + I_5 \quad (1)$$

-Áp dụng định luật Ôm, ta được:

$$U = e - I(r + R) = 26 - 4I \quad (2)$$

$$I_1 = \frac{V_A - V_C}{R_1} = \frac{U - V_C}{5}; I_2 = \frac{V_C - V_B}{R_2} = \frac{V_C}{2};$$

$$I_3 = \frac{V_A - V_D}{R_3} = \frac{U - V_D}{10}; I_4 = \frac{V_D - V_B}{R_4} = \frac{V_D}{30};$$

$$I_5 = \frac{V_C - V_D}{R_5} = \frac{V_C - V_D}{5}$$

-Thay các biểu thức dòng điện ở trên vào (1), ta được:

$$\frac{U - V_C}{5} = \frac{V_C}{2} + \frac{V_C - V_D}{5} \quad (3)$$

$$\frac{V_D}{30} = \frac{U - V_D}{10} + \frac{V_C - V_D}{5} \quad (4)$$

-Từ (3) và (4): $V_C = \frac{U}{3}; V_D = \frac{U}{2}$ (5)

-Từ đó: $I_1 = \frac{2U}{15}; I_3 = \frac{U}{20}; I = I_1 + I_3 = \frac{11U}{60}$ (6)

$$\Rightarrow R_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{60}{11} = 5,45\Omega$$

-Thay (6) vào (2), ta được: $U = 26 - 4 \cdot \frac{11U}{60} \Rightarrow U = 15V$.

-Từ đó tính được: $I_1 = 2A; I_2 = 2,5A; I_3 = 0,75A; I_4 = 0,25A; I_5 = 0,5A$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải bằng *phương pháp điện thế nút*. Bạn đọc có thể giải bằng các phương pháp khác.

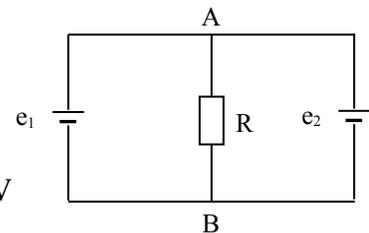
14.6. Cho mạch điện như hình vẽ: $e_1 = 36V = 3e_2; r_1 = R = 2r_2 = 6\Omega$. Xác định biểu thức hiệu điện thế U_{AB} và cường độ dòng điện qua mỗi nhánh.

••Bài giải••

Cách 1: *Phương pháp nguồn tương đương.*

Ta có: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = 1,5\Omega$.

$$\frac{e}{r} = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{0}{R} = \frac{36}{6} + \frac{12}{3} + \frac{0}{6} = 10 \Rightarrow e = 10 \cdot 1,5 = 15V$$



Vì nguồn (e, r) hờ nên: $U_{AB} = e = 15V$.

Áp dụng định luật Ôm cho các nhánh, ta được:

$$I_1 = \frac{-U_{AB} + e_1}{r_1} = \frac{-15 + 36}{6} = 3,5A$$

$$I_2 = \frac{U_{AB} - e_2}{r_2} = \frac{15 - 12}{3} = 1A$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{15}{6} = 2,5A$$

Cách 2: Phương pháp Kiết-xốp.

-Áp dụng định luật Kiết-xốp 1: $I_1 = I_2 + I_3$ (1)

-Áp dụng định luật Kiết-xốp 2 cho các mắt mạng Ae_1BA , Ae_1Be_2A :

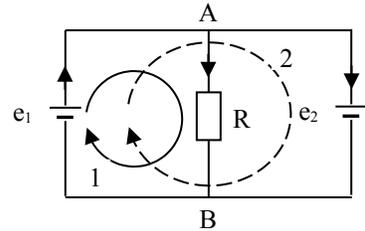
$$e_1 = r_1 I_1 + R I_3 \Leftrightarrow 36 = 6I_1 + 6I_3 \quad (2)$$

$$e_1 - e_2 = r_1 I_1 + r_2 I_2 \Leftrightarrow 24 = 6I_1 + 3I_2 \quad (3)$$

-Từ (1), (2) và (3): $I_1 = 3,5A$; $I_2 = 1A$; $I_3 = 2,5A$;

và $U_{AB} = R I_3 = 6 \cdot 2,5 = 15V$.

Cách 3: Phương pháp chông chất dòng điện.



-Khi nguồn e_1 phát điện (nguồn $e_2 = 0$): $I_1^1 = \frac{e_1}{r_1 + \frac{r_2 R}{r_2 + R}} = \frac{36}{6 + \frac{3 \cdot 6}{3 + 6}} = 4,5A$.

$$I_1^R = \frac{r_2}{r_2 + R} I_1^1 = \frac{3}{3 + 6} \cdot 4,5 = 1,5A; \quad I_1^2 = \frac{R}{r_2 + R} I_1^1 = \frac{6}{3 + 6} \cdot 4,5 = 3A$$

-Khi nguồn e_2 phát điện (nguồn $e_1 = 0$): $I_2^2 = \frac{e_2}{r_2 + \frac{r_1 R}{r_1 + R}} = \frac{12}{3 + \frac{6 \cdot 6}{6 + 6}} = 2A$.

$$I_2^R = \frac{r_1}{r_1 + R} I_2^2 = \frac{6}{6 + 6} \cdot 2 = 1A; \quad I_2^1 = \frac{R}{r_1 + R} I_2^2 = \frac{6}{6 + 6} \cdot 2 = 1A$$

-Theo nguyên lí chông chất dòng điện, ta có:

$$I_1 = I_1^1 - I_2^1 = 4,5 - 1 = 3,5A; \quad I_2 = I_1^2 - I_2^2 = 3 - 2 = 1A;$$

$$I_3 = I_1^R + I_2^R = 1,5 + 1 = 2,5A; \quad U_{AB} = R I_3 = 6 \cdot 2,5 = 15V$$

Cách 4: Phương pháp dòng mắt mạng.

-Chọn chiều cho hai dòng mắt mạng như hình vẽ.

-Áp dụng định luật Kiết-xốp 2 cho hai mắt mạng, ta được:

$$e_1 = r_1 i_1 + R(i_1 - i_2) \quad (1)$$

$$-e_2 = r_2 i_2 + R(i_2 - i_1) \quad (2)$$

$$\text{hay } 36 = 6i_1 + 6(i_1 - i_2) \quad (1')$$

$$-12 = 3i_2 + 6(i_2 - i_1) \quad (2')$$

-Từ (1'), (2'): $i_1 = 3,5A$; $i_2 = 1A$.

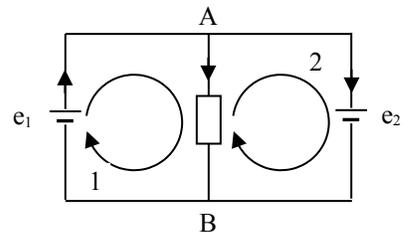
-Cường độ dòng điện trong các nhánh:

$$I_1 = i_1 = 3,5A; \quad I_2 = i_2 = 1A; \quad I_3 = i_1 - i_2 = 3,5 - 1 = 2,5A$$

Và $U_{AB} = R(i_1 - i_2) = 6(3,5 - 1) = 15V$.

Cách 5: Phương pháp điện thế nút.

-Chọn chiều dòng điện như hình vẽ; chọn $V_B = 0 \Rightarrow V_A = U_{AB}$.



-Áp dụng định luật Ôm cho các đoạn mạch, ta được:

$$I_1 = \frac{U_{BA} + e_1}{r_1} = \frac{-V_A + e_1}{r_1} = \frac{-V_A + 36}{6} \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{U_{AB} - e_2}{r_2} = \frac{V_A - e_2}{r_2} = \frac{V_A - 12}{3} \quad (2)$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{V_A}{R} = \frac{V_A}{6} \quad (3)$$

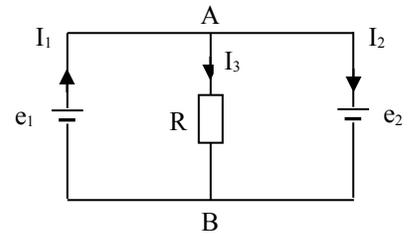
-Mặt khác, tại nút A: $I_1 = I_2 + I_3$ (4)

$$\Leftrightarrow \frac{-V_A + 36}{6} = \frac{-V_A + 36}{6} + \frac{V_A}{6} \Rightarrow V_A = 15V.$$

-Từ đó: $I_1 = \frac{-15+36}{6} = 3,5A$; $I_2 = \frac{15-12}{3} = 1A$; $I_3 = \frac{15}{6} = 2,5A$.

Vậy: Cường độ dòng điện qua các nhánh của mạch điện là $I_1 = 3,5A$; $I_2 = 1A$; $I_3 = 2,5A$; hiệu điện thế giữa A và B là $U_{AB} = 15V$.

 Nhận xét: Bài toán trên được giải bằng 5 *phương pháp* khác nhau. Điều này có nghĩa rằng mỗi bài toán về mạch điện có thể được giải bằng nhiều cách khác nhau. Vấn đề là bạn đọc lựa chọn một phương pháp phù hợp để lời giải bài toán được đơn giản và ngắn gọn.



---Phụ lục---

A. CÁC ĐƠN VỊ ĐO LƯỜNG CHÍNH THỨC

(Trích Nghị định số: 134/2007/NĐ-CP, ngày 15 tháng 8 năm 2007 của Chính phủ nước CHXHCN Việt Nam)

1-Các đơn vị cơ bản

TT	Đại lượng	Tên đơn vị	Ký hiệu đơn vị
1	độ dài	mét	m
2	khối lượng	kilôgam	kg
3	thời gian	giây	s
4	cường độ dòng điện	ampe	A
5	nhiệt độ nhiệt động học	kenvin	K
6	lượng vật chất	mol	mol
7	cường độ sáng	candela	cd

2-Các đơn vị dẫn xuất

TT	Đại lượng	Đơn vị		Thể hiện theo đơn vị cơ bản thuộc hệ đơn vị SI
		Tên	Ký hiệu	
1. Đơn vị không gian, thời gian và hiện tượng tuần hoàn				
1.1	góc phẳng (góc)	radian	rad	m/m
1.2	góc khối	steradian	sr	m ² /m ²
1.3	diện tích	mét vuông	m ²	m.m
1.4	thể tích (dung tích)	mét khối	m ³	m.m.m
1.5	tần số	héc	Hz	s ⁻¹
1.6	vận tốc góc	radian trên giây	rad/s	s ⁻¹
1.7	gia tốc góc	radian trên giây bình phương	rad/s ²	s ⁻²
1.8	vận tốc	mét trên giây	m/s	m.s ⁻¹
1.9	gia tốc	mét trên giây bình phương	m/s ²	m.s ⁻²
2. Đơn vị cơ				
2.1	khối lượng theo chiều dài (mật độ dài)	kilôgam trên mét	kg/m	kg.m ⁻¹
2.2	khối lượng theo bề mặt (mật độ mặt)	kilôgam trên mét vuông	kg/m ²	kg.m ⁻²
2.3	khối lượng riêng (mật độ)	kilôgam trên mét khối	kg/m ³	kg.m ⁻³
2.4	lực	niuton	N	m.kg.s ⁻²
2.5	mômen lực	niuton mét	N.m	m ² .kg.s ⁻²
2.6	áp suất, ứng suất	pascan	Pa	m ⁻¹ .kg.s ⁻²
2.7	độ nhớt động lực	pascan giây	Pa.s	m ⁻¹ .kg.s ⁻¹
2.8	độ nhớt động học	mét vuông trên giây	m ² /s	m ² .s ⁻¹
2.9	công, năng lượng	jun	J	m ² .kg.s ⁻²
2.10	công suất	oát	W	m ² .kg.s ⁻³
2.11	lưu lượng thể tích	mét khối trên giây	m ³ /s	m ³ .s ⁻¹

TT	Đại lượng	Đơn vị		Thể hiện theo đơn vị cơ bản thuộc hệ đơn vị SI
		Tên	Ký hiệu	
2.12	lưu lượng khối lượng	kilôgam trên giây	kg/s	kg.s^{-1}
3. Đơn vị nhiệt				
3.1	nhiệt độ Celsius	độ Celsius	$^{\circ}\text{C}$	$t = T - T_0$; trong đó t là nhiệt độ Celsius, T là nhiệt độ nhiệt động học và $T_0 = 273,15$.
3.2	nhiệt lượng	jun	J	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-2}$
3.3	nhiệt lượng riêng	jun trên kilôgam	J/kg	$\text{m}^2.\text{s}^{-2}$
3.4	nhiệt dung	jun trên kenvin	J/K	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-2}.\text{K}^{-1}$
3.5	nhiệt dung khối (nhiệt dung riêng)	jun trên kilôgam kenvin	J/(kg.K)	$\text{m}^2.\text{s}^{-2}.\text{K}^{-1}$
3.6	thông lượng nhiệt	oát	W	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-3}$
3.7	thông lượng nhiệt bề mặt (mật độ thông lượng nhiệt)	oát trên mét vuông	W/m^2	kg.s^{-3}
3.8	hệ số truyền nhiệt	oát trên mét vuông kenvin	$\text{W}/(\text{m}^2.\text{K})$	$\text{kg.s}^{-3}.\text{K}^{-1}$
3.9	độ dẫn nhiệt (hệ số dẫn nhiệt)	oát trên mét kenvin	$\text{W}/(\text{m.K})$	$\text{m.kg.s}^{-3}.\text{K}^{-1}$
3.10	độ khuếch tán nhiệt	mét vuông trên giây	m^2/s	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
4. Đơn vị điện và từ				
4.1	điện lượng (điện tích)	culông	C	s.A
4.2	điện thế, hiệu điện thế (điện áp), sức điện động	vôn	V	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-3}.\text{A}^{-1}$
4.3	cường độ điện trường	vôn trên mét	V/m	$\text{m.kg.s}^{-3}.\text{A}^{-1}$
4.4	điện trở	ôm	Ω	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-3}.\text{A}^{-2}$
4.5	điện dẫn (độ dẫn điện)	simen	S	$\text{m}^{-2}.\text{kg}^{-1}.\text{s}^3.\text{A}^2$
4.6	thông lượng điện (thông lượng điện dịch)	culông	C	s.A
4.7	mật độ thông lượng điện (điện dịch)	culông trên mét vuông	C/m^2	$\text{m}^{-2}.\text{s.A}$
4.8	công, năng lượng	jun	J	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-2}$
4.9	cường độ từ trường	ampe trên mét	A/m	$\text{m}^{-1}.\text{A}$
4.10	điện dung	fara	F	$\text{m}^{-2}.\text{kg}^{-1}.\text{s}^4.\text{A}^2$
4.11	độ tự cảm	henry	H	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-2}$
4.12	từ thông	vebe	Wb	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$
4.13	mật độ từ thông, cảm ứng từ	tesla	T	$\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$
4.14	suất từ động	ampe	A	A

TT	Đại lượng	Đơn vị		Thể hiện theo đơn vị cơ bản thuộc hệ đơn vị SI
		Tên	Ký hiệu	
4.15	công suất tác dụng (công suất)	oát	W	$m^2.kg.s^{-3}$
4.16	công suất biểu kiến	vôn ampe	V.A	$m^2.kg.s^{-3}$
4.17	công suất kháng	var	var	$m^2.kg.s^{-3}$
5. Đơn vị ánh sáng và bức xạ điện từ có liên quan				
5.1	năng lượng bức xạ	jun	J	$m^2.kg.s^{-2}$
5.2	công suất bức xạ (thông lượng bức xạ)	oát	W	$m^2.kg.s^{-3}$
5.3	cường độ bức xạ	oát trên steradian	W/sr	$m^2.kg.s^{-3}$
5.4	độ chói năng lượng	oát trên steradian mét vuông	W/(sr.m ²)	$kg.s^{-3}$
5.5	năng suất bức xạ	oát trên mét vuông	W/m ²	$kg.s^{-3}$
5.6	độ rọi năng lượng	oát trên mét vuông	W/m ²	$kg.s^{-3}$
5.7	độ chói	candela trên mét vuông	cd/m ²	$m^{-2}.cd$
5.8	quang thông	lumen	lm	cd
5.9	lượng sáng	lumen giây	lm.s	cd.s
5.10	năng suất phát sáng (độ trung)	lumen trên mét vuông	lm/m ²	$m^{-2}.cd$
5.11	độ rọi	lux	lx	$m^{-2}.cd$
5.12	lượng rọi	lux giây	lx.s	$m^{-2}.cd.s$
5.13	độ tụ (quang lực)	điốp®	điốp	m^{-1}
6. Đơn vị âm				
6.1	tần số âm	héc	Hz	s^{-1}
6.2	áp suất âm	pascan	Pa	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
6.3	vận tốc truyền âm	mét trên giây	m/s	$m.s^{-1}$
6.4	mật độ năng lượng âm	jun trên mét khối	J/m ³	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
6.5	công suất âm	oát	W	$m^2.kg.s^{-3}$
6.6	cường độ âm	oát trên mét vuông	W/m ²	$kg.s^{-3}$
6.7	trở kháng âm (sức cản âm học)	pascan giây trên mét khối	Pa.s/m ³	$m^{-4}.kg.s^{-1}$
6.8	trở kháng cơ (sức cản cơ học)	niuton giây trên mét	N.s/m	$kg.s^{-1}$
7. Đơn vị hoá lý và vật lý phân tử				
7.1	nguyên tử khối	kilôgam	kg	kg
7.2	phân tử khối	kilôgam	kg	kg
7.3	nồng độ mol	mol trên mét khối	mol/m ³	$m^{-3}.mol$
7.4	hoá thế	jun trên mol	J/mol	$m^2.kg.s^{-2}.mol^{-1}$
7.5	hoạt độ xúc tác	katal	kat	$s^{-1}.mol$
8. Đơn vị bức xạ ion hoá				

TT	Đại lượng	Đơn vị		Thể hiện theo đơn vị cơ bản thuộc hệ đơn vị SI
		Tên	Ký hiệu	
8.1	độ phóng xạ (hoạt độ)	becoren	Bq	s^{-1}
8.2	liều hấp thụ, kerma	gray	Gy	$m^2.s^{-2}$
8.3	liều tương đương	sivơ	Sv	$m^2.s^{-2}$
8.4	liều chiếu	culông kilôgam	trên C/kg	$kg^{-1}.s.A$

3-Các bội, ước thập phân của đơn vị đo lường chính thức hệ SI

Tên		Ký hiệu	Thừa số
Quốc tế	Việt Nam		
Bội			
yotta	yôtta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{24}
zetta	zetta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{21}
exa	exa	E	1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}
peta	peta	P	1 000 000 000 000 000 = 10^{15}
tera	tera	T	1 000 000 000 000 = 10^{12}
giga	giga	G	1 000 000 000 = 10^9
mega	mega	M	1 000 000 = 10^6
kilo	kilô	k	1 000 = 10^3
hecto	hectô	h	100 = 10^2
deca	deca	da	10 = 10^1
Ước			
deci	deci	d	0,1 = 10^{-1}
centi	centi	c	0,01 = 10^{-2}
mili	mili	m	0,001 = 10^{-3}
micro	micrô	μ	0,000 001 = 10^{-6}
nano	nanô	n	0,000 000 001 = 10^{-9}
pico	picô	p	0,000 000 000 001 = 10^{-12}

Tên		Ký hiệu	Thừa số
Quốc tế	Việt Nam		
femto	femtô	f	0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}
atto	attô	a	0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}
zepto	zeptô	z	0,000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-21}
yocto	yoctô	y	0,000 000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-24}

B. CÁC HẰNG SỐ

- 1-Số Avôgađrô: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- 2-Vận tốc ánh sáng trong chân không: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- 3-Điện tích nguyên tố: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- 4-Hằng số hấp dẫn: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.
- 5-Hằng số Bônzoman: $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.
- 6-Hằng số P-lăng: $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.
- 7-Hằng số các khí lí tưởng: $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.
- 8-Hằng số Faraday: $F = 9,65 \cdot 10^5 \text{ C}$.
- 9-Khối lượng electron: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- 10-Khối lượng prôtôn: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
- 11-Hằng số Rybec: $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.
- 12-Bán kính Bo: $r_0 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.
- 13-Thể tích mol của khí lí tưởng: $V_\mu = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$.
- 14-Trái Đất: $m_{\text{TD}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{TD}} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$; $T_{\text{TD}} = 24 \text{ h}$; $g_{\text{TD}} = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- 15-Mặt Trăng: $m_{\text{MT}} = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $R_{\text{MT}} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$; $T_{\text{MT}} = 27,3 \text{ ngày}$; $g_{\text{MT}} = 1,67 \text{ m/s}^2$.

C. CÔNG THỨC TOÁN HỌC

- 1-Hình tròn: $S = \pi R^2$; $C = 2\pi R$.
- 2-Hình cầu: $S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
- 3-Hình trụ đứng tròn xoay: $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$; $S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$; $V = \pi R^2 h$; h là chiều cao.
- 4-Tam giác: $S = \frac{1}{2}ah$; h là chiều cao ứng với cạnh a . Tam giác vuông: $a^2 + b^2 = c^2$; c là cạnh huyền.
- 5-Định lý hàm số sin và cosin cho tam giác ABC (góc: A, B, C; cạnh a, b, c):

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

6-Một số công thức lượng giác

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha; \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right); \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}; \sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \cot^2\alpha}.$$

7-Tổng số hữu hạn thông dụng

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2; \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1); \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}; x \neq 1.$$

8-Một số bất đẳng thức

-Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a, b: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

-Bất đẳng thức Béc-nu-li: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$; $x > -1, n \in \mathbb{N}$.

9-Công thức gần đúng ($\varepsilon \leq 1$; α rất nhỏ, tính bằng rad)

$$(1 \pm \varepsilon)^m \simeq 1 \pm m\varepsilon; (1 \pm \varepsilon)^m(1 \pm \varepsilon')^{m'} \simeq 1 \pm m\varepsilon \pm m'\varepsilon'; e^x \simeq 1 + x$$

$$\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha$$

10-Công thức tính sai số

Biểu thức	$A \pm B$	AB hoặc $\frac{A}{B}$	A^n	$A^{\frac{1}{n}}$
Sai số	$\left \frac{\Delta A \pm \Delta B}{A \pm B} \right $	$\frac{\Delta A}{ A } + \frac{\Delta B}{ B }$	$n \frac{\Delta A}{ A }$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta A}{ A }$

-----♦♦♦♦♦-----