

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT NÔNG CỐNG I**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**PHÁT TRIỂN TƯ DUY HÀM CHO HỌC SINH
QUA CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ**

**Người thực hiện: Trần Thanh Minh
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc môn: Toán**

THANH HOÁ, NĂM 2016

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
I. MỞ ĐẦU 1. Lí do chọn đề tài. 2. Mục đích của đề tài. 3. Đối tượng, phạm vi. 4. Phương pháp nghiên cứu.	3
II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM. 1. Các mệnh đề và tính chất thường dùng.	
2. Các dạng toán cụ thể. <u>Dạng 1</u> . Các bài toán sử dụng hàm số đại diện.	4
<u>Dạng 2</u> : Các bài toán áp dụng trực tiếp đạo hàm	8
<u>BÀI TẬP TƯƠNG TỰ</u>	12
3. Hiệu quả của sáng kiến III. KẾT LUẬN.	13

TÊN ĐỀ TÀI:

PHÁT TRIỂN TƯ DUY HÀM CHO HỌC SINH QUA CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

I. MỞ ĐẦU.

1. Lý do chọn đề tài.

Như chúng ta đã biết, chuyên đề về phương trình chiếm một lượng khá lớn trong chương trình toán học phổ thông. Tuy nhiên, trong số các bài tập đó có một lượng lớn các bài tập mà ta không thể giải được bằng phương pháp thông thường, hoặc có thể giải được nhưng gặp rất nhiều khó khăn và phức tạp.

Nhưng ta đã biết giữa phương trình và hàm số có mối liên hệ chặt chẽ với nhau, khi định nghĩa phương trình người ta đã dựa trên khái niệm hàm số, nên nếu chúng ta biết sử dụng kiến thức về hàm số để giải các bài toán về phương trình thì chúng ta được những lời giải nhanh gọn và đơn giản hơn rất nhiều. Tuy nhiên, không phải bài toán nào cũng có thể sử dụng hàm số để giải, nhưng những ứng dụng đạo hàm của hàm số để giải phương trình, hệ phương trình..., là rất lớn. Chính vì vậy tôi chọn đề tài “ *Phát triển tư duy hàm cho học sinh qua các bài toán về phương trình vô tỉ*” nhằm giúp các em học sinh có thêm một phương pháp nữa khi giải các bài toán về phương trình vô tỉ.

2. Mục đích yêu cầu.

- Trang bị cho học sinh thêm một phương pháp giải phương trình vô tỉ mang lại hiệu quả cao.
- Bồi dưỡng cho học sinh về phương pháp, kỹ năng giải toán. Qua đó học sinh nâng cao khả năng tư duy, sáng tạo khi giải toán.

3. Đối tượng nghiên cứu.

- Các dạng toán về phương trình vô tỉ trong chương trình toán học phổ thông.
- Phân loại các dạng toán thường gặp và phương pháp giải.

4. Phương pháp nghiên cứu.

Phương pháp chung của dạng bài tập này: Sử dụng các tính chất về tính đơn điệu của hàm số để giải.

II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.

1. Các mệnh đề và tính chất thường dùng.

a) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$. Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$, nếu có nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì nghiệm đó là duy nhất.

b) Cho hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$, $\forall x_1; x_2 \in (a;b)$.
Ta có $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$.

c) Cho phương trình $f(x)=g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$. Nếu một trong hai hàm số $f(x)$ hoặc $g(x)$ là hàm đơn điệu trên khoảng $(a;b)$, hàm còn

lại là hàm hằng số hoặc đơn điệu ngược lại với hàm kia trên khoảng $(a;b)$, thì phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

2. Các dạng toán cụ thể.

Dạng 1. Các bài toán sử dụng hàm số đại diện.

Phương trình đã cho có thể biến đổi được về dạng $f(u) = f(v)$ trong đó $u = u(x), v = v(x)$.

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng $f(u) = f(v)$.

Bước 2: Xét hàm số $y = f(t)$ trên D (với t là biến đại diện cho u, v . D chứa tập giá trị của hàm số $u = u(x); v = v(x)$).

- Tính y' . Xét dấu y' .

- Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên D .

Bước 3: Kết luận.

- Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $u = v$, giải phương trình $u = v$.

- Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

Các ví dụ cụ thể:

Ví dụ 1. Giải phương trình: $(4x^2 + 1)x + (x - 3)\sqrt{5 - 2x} = 0$ (1)

Giải:

Điều kiện xác định của phương trình $x \leq \frac{5}{2}$

Tập xác định: $D = \left[-\infty; \frac{5}{2} \right]$

$$(1) \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = (\sqrt{5 - 2x})^3 + \sqrt{5 - 2x} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}; f'(t) = 3t^2 + 1 > 0; \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{5 - 2x}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{4}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{4}$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $(2x + 1) \cdot (2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 4}) + 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = 0$ (1)

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$(1) \Leftrightarrow (2x + 1) \cdot (2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}) = (-3x) \cdot (2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3}) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t(2 + \sqrt{t^2 + 3})$ trên $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm $f'(t) = 2 + \sqrt{t^2 + 3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0, \forall t \in R$

Vậy hàm số đồng biến trên $D = R$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow f(2x+1) = f(-3x) \Leftrightarrow 2x+1 = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = -\frac{1}{5}$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x+2)\sqrt{3x+1}$ (1)

Giải:

Điều kiện xác định $x \geq -\frac{1}{3}$

Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

(1) $\Leftrightarrow (x+1)^3 + x+1 = (\sqrt{3x+1})^3 + \sqrt{3x+1}$ (2)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in R$.

Đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in R$

Vậy hàm số đồng biến trên R

Đề (2) xảy ra thì $f(x+1) = f(\sqrt{3x+1}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $x^3 + 5x^2 + 17x + 7 = 2(x^2 + 4)\sqrt{2x^2 + 7}$

Giải :

Tập xác định : $D = R$

Phương trình $\Leftrightarrow (x+2)^3 + (x+2)^2 + (x+2) = (2x^2+7)\sqrt{2x^2+7} + (2x^2+7) + \sqrt{2x^2+7}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t, t \in R$.

Đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t \in R. \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên R .

Phương trình trên có dạng $f(x+2) = f(\sqrt{2x^2+7}) \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{2x^2+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $2x^3 + 9x^2 - 6x(1+2\sqrt{6x-1}) + 2\sqrt{6x-1} + 8 = 0$ (1)

Giải:

Điều kiện xác định $x \geq \frac{1}{6}$

Tập xác định: $D = \left[\frac{1}{6}; +\infty \right)$

$$(1) \Leftrightarrow 2(x+1)^3 + 3(x+1)^2 = 2(\sqrt{6x-1})^3 + 3(\sqrt{6x-1})^2 \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 3t^2, t \geq 0$

Đạo hàm $f'(t) = 6t^2 + 6t \geq 0, \forall t \geq 0$ ($f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $[0; +\infty)$)

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

$$(2) \Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt{6x-1}) \Leftrightarrow \sqrt{6x-1} = x+1 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $x\sqrt{x-1} = (2x-3)^2(2x-2) + x - 2$. (1)

Giải:

Điều kiện xác định $x \geq 1$

Tập xác định: $D = [1; +\infty)$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^3 + (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x-1} = (2x-3)^3 + (2x-3)^2 + (2x-3) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t, t \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. vậy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow f(\sqrt{x-1}) = f(2x-3) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 13x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x = 2 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $(x+4)(\sqrt{x+2}+2) = (x+1)(x^2-2x+3)$ (1)

Giải:

Điều kiện xác định $x \geq -2$

Tập xác định: $D = [-2; +\infty)$

$$(1) \Leftrightarrow \left[(\sqrt{x+2})^2 + 2 \right] \cdot (\sqrt{x+2} + 2) = \left[(x-1)^2 + 2 \right] \cdot ((x-1) + 2) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = (t^2+2)(t+2), t \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 4t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 8: Giải phương trình: $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ (1)

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = (\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4})^3 + \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$

Đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ hàm số đồng biến $\mathbb{R}$

$$(2) \Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $x^3 - 15x^2 + 78x - 146 = 10\sqrt[3]{7x - 29} \quad (1)$

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{7x - 9})^3 + 10\sqrt[3]{7x - 9} = (x - 5)^3 + 10(x - 5) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$

Đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ hàm số đồng biến $\mathbb{R}$

$$(2) \Leftrightarrow f(x - 5) = f(\sqrt[3]{7x - 9}) \Leftrightarrow x - 5 = \sqrt[3]{7x - 9} \Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 68x - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = 8 \\ x = 4 \\ x = 3 \end{cases}$

Ví dụ 10: Giải phương trình $(x+5)\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt[3]{3x+4} \quad (1)$

Giải:

Điều kiện xác định $x \geq -1$

Tập xác định: $D = [-1; +\infty)$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 1)^3 + (\sqrt{x+1} + 1) = (\sqrt[3]{3x+4})^3 + \sqrt[3]{3x+4} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$

Đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ hàm số đồng biến $\mathbb{R}$

$$(2) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1} + 1) = f(\sqrt[3]{3x+4}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 = \sqrt[3]{3x+4}$$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{3x+4} = t \Leftrightarrow x = \frac{t^3 - 4}{3}$$

$$\text{Ta có phương trình: } \sqrt{\frac{t^3 - 1}{3}} = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ \frac{t^3 - 1}{3} = (t - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+4}=1 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$.

Dạng 2: Các bài toán áp dụng trực tiếp đạo hàm

Phương trình đã cho biến đổi được về dạng $f(x)=g(x)$ (hoặc $f(u)=g(u)$ trong đó $u=u(x)$)

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng $f(x)=g(x)$ (hoặc $f(u)=g(u)$)

Bước 2: Xét hàm số $y_1=f(x); y_2=g(x)$ trên D .

- Tính y_1' , xét dấu y_1' , kết luận về tính đơn điệu của hàm số $y_1=f(x)$ trên D .
- Tính y_2' , xét dấu y_2' , kết luận về tính đơn điệu của hàm số $y_2=g(x)$ trên D .
- Kết luận hai hàm số $y_1=f(x); y_2=g(x)$ đơn điệu ngược nhau hoặc một trong hai hàm là hàm hằng số.
- Tìm x_0 sao cho $f(x_0)=g(x_0)$ (hoặc tìm u_0 sao cho $f(u_0)=g(u_0)$)

Bước 3: Kết luận.

- Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $x=x_0$ (hoặc $u=u_0$ rồi giải phương trình $u=u_0$).
- Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

Các ví dụ cụ thể:

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sqrt{3+x^2} + \sqrt{x} - 3 = 0$ (1)

Giải

Tập xác định: $D=[0; +\infty)$

Đặt $f(x)=\sqrt{3+x^2} + \sqrt{x} - 3$

(1) $\Leftrightarrow f(x)=0$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3+x^2} + \sqrt{x} - 3$ trên D

Đạo hàm $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0; \forall x > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D

Nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy $x=1$ là nghiệm của (1)

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 9$ (1)

Giải

Tập xác định: $D=[1; +\infty)$

Đặt $f(x) = \sqrt{x-1}$ và $g(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 9$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0; \forall x > 1; g'(x) = -3x^2 + 2x - 1 < 0; \forall x \geq 1$

Vậy hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ đồng biến trên D ; hàm số $g(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 9$ nghịch biến trên D . Nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy $x=2$ là nghiệm của (1)

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=2$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\sqrt[4]{4x-8} + \sqrt{2x+4} = 6$ (1)

Giải

Tập xác định: $D = [2; +\infty)$

Đặt $f(x) = \sqrt[4]{4x-8} + \sqrt{2x+4}$

(1) $\Leftrightarrow f(x) = 6$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{4x-8} + \sqrt{2x+4}$ trên D

Đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(4x-8)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} > 0; \forall x > 2$

Vậy hàm số đồng biến trên D

Nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất, ta thấy $x=6$ là nghiệm của (1)

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=6$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = 6$ (1)

Giải:

Tập xác định: $D = [2; +\infty)$

Đặt $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x-2}$

(1) $\Leftrightarrow f(x) = 6$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x-2}$ trên $D = [2; +\infty)$

Đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0, \forall x > 2$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $D = [2; +\infty)$. Nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy $f(3) = 6$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{3}$ (1)

Giải:

Điều kiện xác định $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x^2 + x - 8) \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$

Tập xác định: $D = [-2; 4]$

Đặt $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$

(1) $\Leftrightarrow f(x) = 2\sqrt{3}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$ trên $D = [-2; 4]$

Ta có đạo hàm $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0, \forall x \in (-2; 4)$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến đoạn $D = [-2; 4]$. Nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất, ta thấy $f(1) = 2\sqrt{3}$

Nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x} = 5 - 4x$ (1)

Giải:

Tập xác định $D = [0; +\infty)$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x} + 4x = 5$ (2)

Đặt $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x} + 4x$

(2) $\Leftrightarrow f(x) = 5$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x} + 4x$ Trên $D = [0; +\infty)$

Đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + 4 > 0; \forall x \neq 0; 1$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên D . Nên phương trình (2) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy $f(1) = 5$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$ (1)

Giải:

Điều kiện xác định $x \leq \frac{1}{3}$

Tập xác định: $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$

Đặt $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$

(1) $\Leftrightarrow f(x) = 0$

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$ trên $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{1-3x}} > 0, \forall x < \frac{1}{3}$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \Rightarrow$ phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$.

Ví dụ 8: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8}$ (1)

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$(1) \Leftrightarrow 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 15} = 0 \quad (2)$$

Nếu $x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 \leq 0, \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 15} < 0$ Vì vậy $\forall x \leq \frac{2}{3}$ đều không là nghiệm của (2).

Xét $x > \frac{2}{3}$

$$\text{Đặt } f(x) = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 15}$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Xét hàm số $f(x) = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 15}$, với $x > \frac{2}{3}$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = 3 + x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 15}} \right) > 0, \forall x > \frac{2}{3}$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \Rightarrow$ phương trình (2) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 1$.

Ví dụ 9. Giải phương trình:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2} \quad (1)$$

Giải:

Điều kiện xác định $x \geq \frac{1}{2}$

Tập xác định: $D = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} - 3)(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}) = 4 \quad (2)$$

Từ (2) ta thấy để phương trình có nghiệm thì $\sqrt{2x-1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{2x-1} - 3 \text{ và } g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}$$

Ta có hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1} - 3$ và $g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}$ Chỉ nhận giá trị dương và đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$. Nên hàm số $f(x).g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; +\infty) \Rightarrow$ phương trình (2) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy $x=7$ là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=7$.

Ví dụ 10. Giải phương trình: $\sqrt{3x-8} - \sqrt{x-1} = \frac{5}{2x-11}$ (1)

Giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ x \neq \frac{11}{2} \end{cases}$

Tập xác định $D = \left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2} \right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty \right)$

Xét $f(x) = \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1}$; $g(x) = \frac{5}{2x-11}$ với $x \in D$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{9x+9} - \sqrt{3x-8}}{2\sqrt{3x-8} \cdot \sqrt{x+1}} > 0 \quad \forall x \in D \setminus \left\{ \frac{3}{8} \right\} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng

$\left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2} \right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{11}{2}; +\infty \right)$

Và $g'(x) = -\frac{10}{(2x-11)^2} > 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2} \right)$ và

đồng biến trên khoảng $\left(\frac{11}{2}; +\infty \right)$

$\Rightarrow$ phương trình (1) có nhiều nhất hai nghiệm trên D . Ta thấy $\begin{cases} x=3 \\ x=8 \end{cases}$ là hai nghiệm của (1).

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $\begin{cases} x=3 \\ x=8 \end{cases}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Giải các phương trình sau:

1) $(5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

2) $\frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} = \frac{1}{x+2}$

3) $x^3 - 15x^2 + 78x - 141 = 5\sqrt[3]{2x-9}$

4) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 54 = 27\sqrt[3]{81x-8}$

5) $2x^3 - 10x^2 + 17x - 8 + 2x^2 \cdot \sqrt[3]{5x-x^3} = 0$

3. Hiệu quả của sáng kiến:

Trong những năm được phân công dạy học sinh khối 12 và đặc biệt là ôn thi đại học cũng như ôn thi học sinh giỏi cấp tỉnh, tôi thấy học sinh gặp rất nhiều khó khăn khi giải những phương trình vô tỉ phức tạp. Điều đó làm tôi phải suy nghĩ và tìm tòi thêm những cách giải khác nữa cho phương trình vô tỉ ngoài các cách giải quen thuộc lâu nay. Chính đề tài “ ***Phát triển tư duy hàm cho học sinh qua các bài toán về phương trình vô tỉ***” đã thúc đẩy được niềm đam mê và tính sáng tạo của học sinh khi giải các phương trình vô tỉ. Để kiểm tra tính hiệu quả của sáng kiến, trong năm học 2014-2015 được phân công dạy ở các lớp 12B1, 12B2 của trường THPT Nông Công 1-Thanh Hoá, tôi đã dùng sáng kiến này dạy trên lớp 12B2 còn lớp 12B1 chỉ dạy các phương pháp quen thuộc đã biết, mặc dù về khả năng nhận thức và tiếp thu kiến thức của hai lớp là tương đương nhau.

Kết quả qua bài kiểm tra thử ở các lớp cụ thể như sau:

Lớp	Số số	Điểm 8 trở lên		Điểm từ 5 đến 8		Điểm dưới 5	
		Số lượng	Tỷ lệ	Số lượng	Tỷ lệ	Số lượng	Tỷ lệ
12B2	41	20	48,8%	18	43,9%	3	7,3%
12B1	41	3	7,3%	20	48,8%	18	43,9%

Qua đó tôi thấy đề tài đã mang lại hiệu quả khá cao khi cho học sinh giải các phương trình vô tỉ.

III. KẾT LUẬN

- Hàm số có rất nhiều ứng dụng và một trong các ứng dụng đó là sử dụng tính đơn điệu của hàm số vào việc giải phương trình vô tỉ mà tôi đã trình bày ở trên.
- Đề tài đã nêu được phương pháp giải cho các dạng toán về các loại phương trình, đồng thời cũng đưa ra được hệ thống bài tập tương đối đầy đủ với các mức độ khác nhau.
- Tuy vậy do nhiều nguyên nhân chủ quan cũng như khách quan nên đề tài không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Rất mong nhận được sự góp ý của các bạn đồng nghiệp, hội đồng khoa học trường THPT Nông Công 1, Hội đồng khoa học sở GD & ĐT Thanh Hoá để đề tài được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 6 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

(Ký và ghi rõ họ tên)

Trần Thanh Minh