NGUYỄN NHẤT HUY

20 THI CHUYÊN TOÁN

LaTeX

BẤT ĐẲNG THỨC 20

Tuyển tập một số bài toán bất đẳng thức trong kì thi chuyên toán 2020

Nguyễn Nhất Huy, Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An

Ngày 15 tháng 10 năm 2020

Tóm tắt nội dung

Vậy là một mùa tuyển sinh vào 10 nữa lại đi qua với sự xuất hiện của nhiều bài toán hay và khó được các sở đưa ra. Và cũng như mọi năm, bất đẳng thức là chủ đề tuy đã quá quen thuộc với chúng ta nhưng nó vẫn là vấn đề tương đối khó và cần các bạn học sinh có kỹ năng phân tích và biến đổi tốt để giải quyết chúng. Với danh nghĩa là một học sinh đã trải qua mùa thi vừa rồi và cũng đã đỗ được 2 ngôi trường chuyên nổi tiếng là Chuyên KHTN Hà Nội và Chuyên Phan Bội Châu, tôi xin mạnh dạn viết lên chuyên đề "Tuyển tập một số bài toán bất đẳng thức trong kì thi chuyên toán 2020" với mục đích nhìn lại các bài toán đã qua và giúp các em khóa sau có một tài liệu để ôn tập đạt kết quả cao. Trong tài liệu này tôi có trình bày những kiến thức cơ bản và lời giải các bài toán đã thi trong mùa thi vừa rồi, tiếp đó là những chuyên đề giúp các bạn nhập môn với những kỹ thuật khó hơn. Để hoàn thành chuyên đề này, tôi xin cảm ơn tới anh Nguyễn Minh Tuấn đã chỉ dạy tôi kĩ năng sử dụng LaTeX và thiết kế lên tài liệu mà các bạn đang đọc, bên cạnh đó anh cũng là người tư vấn giúp tôi những vấn đề thiếu sót về mặt kiến thức. Vì còn chưa có kinh nghiệm nhiều về tuổi đời cũng như kiến thức nên chắc chắn trong quá trình biên soạn sẽ không thể tránh khỏi những thiếu sót, rất mong bạn đọc và các thầy cô góp ý và bỏ qua. Cuối cùng xin cảm ơn mọi người đã ủng hộ và dõi theo tôi.

Mục lục

1 Các kiến thức cơ bản về bất đẳng thức.

1.1 Một số kí hiệu sử dụng trong tài liệu.

$$\sum_{cyc} \frac{1}{ab^2} = \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{bc^2} + \frac{1}{ca^2}$$

$$\sum_{sym} \frac{1}{ab^2} = \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{ba^2} + \frac{1}{ca^2} + \frac{1}{ac^2} + \frac{1}{bc^2} + \frac{1}{cb^2}$$

Ở đây *cyc* là viết tắt của *cyclic* và đôi khi cũng có thể sử dụng $\sum$ để thay thế $\sum_{cyc}$, *sym* là viết tắt của *symetric*.

1.2 Bất đẳng thức AM – GM.

Tổng quát với các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thì ta có $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$.

Dấu "=" khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Với $n = 2$ và $n = 3$ thì ta được 2 hệ quả quen thuộc

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$
$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

Ngoài ra bất đẳng thức $AM - GM$ cũng có thể phát biểu ở dạng mẫu số $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

1.3 Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Cho 2 bộ số $(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $(y_1, y_2, ..., y_n)$ khi đó ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

Dấu "=" khi và chỉ khi các số lập thành các bộ số tỉ lệ.
Dạng cộng mẫu Engel tổng quát

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{a_i}^2}{b_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{-1}$$

Trong đó dạng $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geqslant \frac{(x+y)^2}{a+b}$ là dạng ta hay gặp nhất.

1.4 Điều kiện có nghiệm của phương trình.

Trong một số bài toán đánh giá min - max ta sẽ sử dụng tới điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2.
Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$. Khi đó nếu

1. $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm , đồng nghĩa vế trái luôn không âm hoặc không dương.
2. $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Ứng dụng của kiến thức này sẽ áp dụng cho những bài tìm điều kiện có nghiệm để suy ra min, max.

2 Các bài toán trong các kì thi chuyên toán.

Câu 1 Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=(a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3$.

Quảng Bình

Lời giải.
Ta biến đổi giả thiết

$$\begin{aligned} T &= (a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3 \\ &= a^3-3a^2+3a-1+b^3-3b^2+3b-1+c^3-3c^2+3c-1 \\ &= \left(a^3-3a^2+\frac{9}{4}a\right)+\left(b^3-3b^2+\frac{9}{4}b\right)+\left(c^3-3c^2+\frac{9}{4}c\right)+\frac{3}{4}(a+b+c)-3 \\ &= a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+b\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+c\left(c-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a+b+c)-3 \\ &= a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+b\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+c\left(c-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vì $a \geqslant 0$; $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0, \forall a \in \mathbb{R}$ nên $a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Tương tự với b, c thì ta có $b\left(b-\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$; $c\left(c-\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$, nên $T \geqslant -\frac{3}{4}$

Vậy GTNN của $T=-\frac{3}{4}$ khi (a, b, c) là hoán vị của $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$. ■

Câu 2 Cho các nguyên dương x, y, z thỏa mãn

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z} \geqslant 2020$$

Tìm giá trị nhỏ nhất $P=\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{zy}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{xz}$.

Gia Lai

Lời giải.
Để giải bài toán này ta sử dụng hai bất đẳng thức phụ sau.

i) Cho a, b là các số thực dương ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$

ii) Cho a, b, c, d, e là các số thực ta có

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{e^2+f^2} \geqslant \sqrt{(a+c+e)^2+(b+d+f)^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$. Đây là 1 trường hợp nhỏ của bất đẳng thức Mincopsky.

Phần chứng minh hai bất đẳng thức phụ này xin dành cho bạn đọc. Áp dụng bất đẳng thức i) cho các cặp (x, y); (y, z); (z, x) ta có

$$\frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right); \frac{1}{y+z} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right); \frac{1}{x+z} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$$

Nên theo giả thiết suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 4040$. Ta biến đổi biểu thức P, ta được

$$\begin{aligned}P&=\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{zy}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{xz}\\&=\sqrt{\frac{y^2+2x^2}{x^2y^2}}+\sqrt{\frac{z^2+2y^2}{z^2y^2}}+\sqrt{\frac{x^2+2z^2}{x^2z^2}}\\&=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{y^2}}+\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{z^2}}+\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{2}{x^2}}\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức ii), và bất đẳng thức vừa chứng minh ta có

$$P\geqslant\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}\geqslant\sqrt{4040^2+2.4040^2}=4040\sqrt{3}$$

Vậy GTNN của $P=4040\sqrt{3}$ khi $x=y=z=\frac{3}{4040}$.

Câu 3 Cho x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{1+2yz}+\frac{y^2}{1+2xz}+\frac{z^2}{1+2xy}\geqslant\frac{3}{5}$$

Điện Biên

Lời giải.

Theo bất đẳng thức *Cauchy − Schwarz* ta có

$$\sum\frac{x^2}{1+2yz}=\sum\frac{x^4}{x^2+2x^2yz}\geqslant\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2+y^2+z^2+2xyz\left(x+y+z\right)}$$

Mặt khác thì ta có đánh giá

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\geqslant\left(xy+yz+xz\right)^2\geqslant 3xyz\left(x+y+z\right)\Rightarrow xyz\left(x+y+z\right)\leqslant\frac{1}{3}$$

Như vậy ta suy ra được

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2+y^2+z^2+2xyz\left(x+y+z\right)}\geqslant\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn tất.

Câu 4 Cho $x>1,y>1$, chứng minh rằng $D=\frac{\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)}{\left(x-1\right)\left(y-1\right)}\geqslant 8$.

Trà Vinh

Lời giải.

Biến đổi biểu thức ban đầu, ta được

$$D=\frac{\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)}{\left(x-1\right)\left(y-1\right)}=\frac{x^2\left(x-1\right)+y^2\left(y-1\right)}{\left(x-1\right)\left(y-1\right)}=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geqslant\frac{\left(x+y\right)^2}{x+y-2}$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\left(x+y\right)^2}{x+y-2}\geqslant 8$$

Biến đổi tương đương ta được hằng đẳng thức rất đẹp

$$(x+y-4)^2 \geqslant 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y > 1$

Nhận xét. Đây là bài toán rất cũ nó từng là đề chuyên của Hà Nội năm 2003-2004.

Câu 5 Cho a, b là 2 số thực âm. Chứng minh rằng $\dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{a} \geqslant a^2 + b^2$.

Sóc Trăng

Lời giải.
Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{a^3}{b} = \frac{a^3}{2b} + \frac{a^3}{2b} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3.a^3.b^2}{2b.2b.2}} - \frac{b^2}{2} = \frac{3}{2}a^2 - \frac{b^2}{2}$$

$$\frac{b^3}{a} = \frac{b^3}{2a} + \frac{b^3}{2a} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3.b^3.a^2}{2a.2a.2}} - \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}b^2 - \frac{a^2}{2}$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Câu 6 Cho $a \geqslant 2$, $\dfrac{a}{b} > 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{2a^3+1}{b(a-b)} \geqslant 17$.

Bắc Kạn

Lời giải.
Với $a \geqslant 2$ thì ta luôn có

$$7a^3 \geqslant 14a^2 \Leftrightarrow a^2(7a-14)$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{2a^3+1}{b(a-b)} \geqslant \frac{4(2a^3+1)}{a^2} = \frac{8a^3+4}{a^2} = \frac{\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} + 4 + 7a^3}{a^2} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{a^3.a^3} + 14a^2}{a^2} = 17$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 7 Cho các số thực dương a, b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{a^2}}$$

Kon Tum

Lời giải.
Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}} \geqslant \sqrt{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}} + \sqrt{2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \geqslant 2\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Câu 8 Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{c^2a^2} + \frac{b^2+1}{a^2b^2} + \frac{c^2+1}{b^2c^2} \geqslant a(b+1) + b(c+1) + c(a+1)$$

Kiên Giang

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\sum \frac{a^2+1}{a^2c^2} = \sum \left(\frac{a^2b^2}{c^2a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} \right) \geqslant \frac{(ab+bc+ca)^2}{3} + \frac{a^2+b^2+c^2}{1}$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 + a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca+(a+b+c)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 + (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \geqslant ab+bc+ca+(a+b+c)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 + (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) - (a+b+c) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

1. $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c) \Rightarrow \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 \geqslant a+b+c.$
2. $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca).$

Như vậy bất đẳng thức cần chứng minh luôn đúng, do đó ta có điều phải chứng minh. ■

Câu 9 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá tri nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 1 + \frac{3}{xy+yz+xz}$$

Hậu Giang

Lời giải.
Một bài toán tương đối đơn giản, theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$9 = (x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+xz) \Rightarrow xy+yz+xz \leqslant 3$$

Khi đó biểu thức

$$T = 1 + \frac{3}{xy+yz+xz} \geqslant 1 + \frac{3}{3} = 2$$

Vậy bài toán được giải quyết. ■

Câu 10

1. Cho a, b là hai số dương. Chứng minh rằng.
   (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$.
   (b) $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1} \geqslant \frac{1}{4}(a+5b+2)$.

② Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leqslant 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ac+3a^2+1}}$$

Bình Phước

Lời giải.

① Ý thứ nhất.

(a) Ta cần chứng minh $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geqslant \dfrac{4}{a+b}$. Biến đổi biểu thức ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b} &\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geqslant \frac{4}{a+b}\\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 \geqslant 4ab\\ &\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab\\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức luôn đúng $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$ nên bất đẳng thức được chứng minh.

(b) Ta cần chứng minh $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1} \geqslant \dfrac{1}{4}(a+5b+2)$. Ta biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow a^2-ab+3b^2+1 \geqslant \frac{1}{16}(a+5b+2)^2\\ &\Leftrightarrow 16a^2-16ab+48b^2+16 \geqslant a^2+25b^2+4+10ab+20b+4a\\ &\Leftrightarrow 15a^2-26ab+23b^2-4a-20b+12 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow 13(a-b)^2+2(a-1)^2+10(b-1)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Luôn đúng $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$ nên bất đẳng thức được chứng minh.

② Áp dụng bất đẳng thức (b) ta có

$$P \leqslant \frac{4}{a+5b+2}+\frac{4}{b+5c+2}+\frac{4}{c+5a+2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $i)$ nhiều lần ta được

$$\begin{aligned}\frac{4}{a+5b+2} &\leqslant \frac{1}{a+3b}+\frac{1}{2b+2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16a}+\frac{5}{16b}+\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Tương tự với hai phân thức còn lại kết hợp với giả thiết ta suy ra

$$P \leqslant \frac{3}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3}{8} \leqslant \frac{3}{2}$$

Vậy GTNN của $P=\dfrac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$. Mở rộng đoạn $\dfrac{4}{a+5b+2}$ ta có thể dùng ngược bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* dạng phân thức như sau

$$\frac{4}{a+5b+2}=\frac{64}{16\,(a+5b+2)}=\frac{(1+5+2)^2}{16\,(a+5b+2)} \leqslant \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{5}{b}+2\right)=\frac{1}{16a}+\frac{5}{16b}+\frac{1}{8}$$

Bài toán được chứng minh. ■

Câu 11 Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2z^2 + y^2z^2 + 1 \leqslant 3z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{8}{(y+3)^2} + \frac{4z^2}{(1+2z)^2}$$

Hà Tĩnh

Lời giải.

Để giải bài toán này ta chứng minh bổ đề sau $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geqslant \dfrac{8}{(a+b)^2}$ với $\forall a, b > 0$

Ta có theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geqslant \dfrac{2}{ab}$.

Mặt khác $ab \leqslant \dfrac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{ab} \geqslant \dfrac{4}{(a+b)^2}$.

Nên suy ra $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geqslant \dfrac{8}{(a+b)^2}$ với $\forall a, b > 0$. Khi đó áp dụng bổ đề trên

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2z}+1\right)^2} + \frac{8}{(y+3)^2} \geqslant \frac{8}{\left(x+\frac{1}{2z}+2\right)^2} + \frac{8}{(y+3)^2} \geqslant \frac{64}{\left(x+y+\frac{1}{2z}+5\right)^2}$$

Từ giả thiết suy ra là số dương và $x^2z^2 + y^2z^2 + 1 \leqslant 3z \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{1}{z^2} \leqslant \dfrac{3}{z}$.

Đặt $\dfrac{1}{z} = t$ suy ra $x^2 + y^2 + t^2 \leqslant 3t$. Ta có

$$P = \frac{64}{\left(x+y+\frac{1}{2z}+5\right)^2} = \frac{256}{(2x+2y+t+10)^2}$$

Ta có $\begin{cases} 2x \leqslant x^2+1 \\ 2y \leqslant y^2+1 \\ 4t \leqslant t^2+4 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2y + 4t \leqslant x^2 + y^2 + t^2 + 6 \leqslant 3t + 6.$

Suy ra $2x + 2y + t \leqslant 6$. Suy ra $P \geqslant \dfrac{256}{(6+10)^2} = 1$, dấu " = " xảy ra khi $x = y = 1, z = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Câu 12 Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{2021}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$$

Ninh Bình

Lời giải.

Đặt $x = \sqrt{b^2+c^2},\ y = \sqrt{c^2+a^2},\ z = \sqrt{a^2+b^2}$ với $x,\ y,\ z > 0; x + y + z = \sqrt{2021}$, suy ra

$$a^2 = \frac{y^2+z^2-x^2}{2},\ b^2 = \frac{x^2+z^2-y^2}{2},\ c^2 = \frac{x^2+y^2-z^2}{2}$$

Khi đó áp dụng các bất đẳng thức phụ cơ bản

$$b+c \leqslant \sqrt{2\left(b^2+c^2\right)} = \sqrt{2}x,\ c+a \leqslant \sqrt{2\left(c^2+a^2\right)} = \sqrt{2}y,\ a+b \leqslant \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} = \sqrt{2}z$$

Suy ra

$$\begin{aligned}VT &\geqslant \frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}\\ &\geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}-x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}-y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}-z\right)\right]\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}+2x-3x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}+2y-3y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}+2z-3z\right)\right]\\ &\geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(2(y+z)-3x)+(2(z+x)-3y)+(2(x+y-3z)\right]\end{aligned}$$

Suy ra $VT \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$. ■

Câu 13 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{ca+4}+\frac{b}{ab+4}+\frac{c}{bc+4}\leqslant\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2)$$

Hà Nam

Lời giải.

Vì a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$ nên tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho

$$a=\frac{2x}{y};b=\frac{2y}{z};c=\frac{2z}{x}$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geqslant\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}$$

Ta có

$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\geqslant\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\geqslant 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geqslant\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\quad(2)$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geqslant\frac{x}{y}.\frac{y}{z}+\frac{y}{z}.\frac{z}{x}+\frac{z}{x}.\frac{x}{y}=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\quad(3)$$

Từ (2) và (3) có

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\geqslant\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}&=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ &\geqslant\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$. ■

Câu 14 Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $x^3-y^3\geqslant 2x$. Chứng minh rằng $x^3\geqslant 2y$.

Khánh Hòa

Lời giải.

Biến đổi giả thiết, ta được

$$x^3 - y^3 \geqslant 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x \geqslant y^3 \Leftrightarrow 8x^3 - 16x \geqslant 8y^3$$

Từ đây ta cần chứng minh bất đẳng thức sau $8x^3 - 16x \leqslant x^9$. Ta có

$$8x^3 - 16x \leqslant x^9 \Leftrightarrow x(x^8 - 8x^2 + 16) \geqslant 0$$

Vì $x > 0$ nên

$$x(x^8 - 8x^2 + 16) = x(x^8 - 4x^4 + 4 + 4x^4 - 8x^2 + 4 + 8) = x(x^4 - 2)^2 + 4x(x^2 - 1)^2 + 8x > 0$$

Nên $x^9 \geqslant 8y^3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 2y$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng không xảy ra. ■

Câu 15 Cho các số thực a, b, c sao cho $a \geqslant 0$; $b \geqslant \frac{3}{2}$; $c \geqslant 5$ và $a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{9} \leqslant 12$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = \sqrt{2ab - 3a} + \sqrt{ac + 8c} + 2\sqrt{c - 5}$.

Long An

Lời giải.
Ta có

$$\sqrt{2ab - 3a} = \sqrt{a(2b - 3)} \leqslant \frac{a + 2b - 3}{2}$$
$$\sqrt{c(a + 8)} \leqslant \frac{c + a + 8}{2}; 2\sqrt{c - 5} = \sqrt{4(x - 5)} \leqslant \frac{4 + x - 5}{2}$$

Suy ra $M \leqslant a + b + c + 2$. Ta có

$$a \leqslant \frac{a^2 + 1}{2}; b \leqslant \frac{b^2 + 4}{4}; c \leqslant \frac{c^2 + 81}{18}$$

Suy ra

$$a + b + c \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{18} + 6 \leqslant 12$$

Từ đây suy ra $M \leqslant 14$
Vậy max M=14. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn là $a = 1; b = 2; c = 9$. ■

Câu 16 Cho x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 - xy$.

Tiền Giang

Lời giải.
Biến đổi biểu thức, ta được

$$M = \frac{3x^2 + 3y^2 - 3xy}{3} = \frac{3x^2 + 3y^2 + xy - 4xy}{3} \geqslant \frac{3x^2 + 3y^2 + xy - 2x^2 - 2y^2}{3} = \frac{x^2 + y^2 + xy}{3} = 1$$

Mặt khác ta lại có

$$M = x^2 + y^2 - xy = x^2 + y^2 + 3xy - 4xy \leqslant x^2 + y^2 + 3xy + 2(x^2 + y^2) = 3(x^2 + y^2 + xy) = 9$$

Vậy min $M = 1$ khi và chỉ khi $x = y = 1$ hoặc $x = y = -1$ và max $M = 9$ khi và chỉ khi $x = -y = 1$ hoặc $x = -y = -1$. ■

Câu 17 Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{16a+9}+\sqrt{16b+9}+\sqrt{16c+9} \geqslant 11$$

Bến Tre

Lời giải.

Cách 1.
Có $a+b+c=1$ mà a, b, c là các số thực không âm nên $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$.
Ta có $0 \leqslant a \leqslant 1 \Rightarrow a^2 \leqslant a$. Như vậy ta có đánh giá

$$\sqrt{16a+9}=\sqrt{4a+12a+9} \geqslant \sqrt{4a^2+12a+9}=2a+3$$

Tương tự ta được

$$\sqrt{16b+9} \geqslant 2b+3$$
$$\sqrt{16c+9} \geqslant 2c+3$$

Cộng vế với vế ta được $\sqrt{16a+9}+\sqrt{16b+9}+\sqrt{16c+9} \geqslant 2(a+b+c)+9=11$.
Dấu bằng xảy ra khi $a=0$ hoặc $a=1$ và $b=0$ hoặc $b=1$ và $c=0$ hoặc $c=1$.
Hay dấu bằng xảy ra khi (a, b, c) là các hoán vị của bộ $(1;0;0)$.

Cách 2.
Đặt $x=\sqrt{16a+9}; y=\sqrt{16b+9}; z=\sqrt{16c+9}$, với $x, y, z>0$, suy ra $x^2+y^2+z^2=16.(a+b+c)+27$.
Mà $a+b+c=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=43$.
Tương tự như cách 1, ta chỉ ra được rằng $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Vì

$$0 \leqslant a \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 16a \leqslant 16$$

$$\Leftrightarrow 9 \leqslant 16a+9 \leqslant 25 \Rightarrow 3 \leqslant x \leqslant 5 \Rightarrow (x-3)(x-5) \leqslant 0 \Rightarrow x^2-8x+15 \leqslant 0 \Rightarrow x^2 \leqslant 8x-15 \qquad (1)$$

Tương tự ta được

1. $y^2 \leqslant 8y-15.$ (2)
2. $z^2 \leqslant 8z-15.$ (3)

Cộng vế với vế của $(1),(2),(3)$ ta được $x^2+y^2+z^2 \geqslant 8(x+y+z)-45$, mà $x^2+y^2+z^2=43$ nên

$$8(x+y+z) \geqslant 88 \Leftrightarrow x+y+z \geqslant 11$$

Vậy $\sqrt{16a+9}+\sqrt{16b+9}+\sqrt{16c+9} \geqslant 2(a+b+c)+9=11$.
Dấu bằng xảy ra khi $x=3$ hoặc $x=5$ và $y=3$ hoặc $y=5$ và $z=3$ hoặc $z=5$.

1. Nếu $x=3$ mà $x=\sqrt{16a+9}$ thì $a=0$, thỏa mãn.
2. Nếu $x=5$ mà $x=\sqrt{16a+9}$ thì $a=1$, thỏa mãn

Tương tự với y và z, tóm lại dấu bằng xảy ra khi (a, b, c) là các hoán vị của bộ $(1;0;0)$. ■

Câu 18 Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+abc=4$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ac$.

Chuyên toán Hà Nội

Lời giải.

Cách 1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a; b; c\}$.
Suy ra $a \geqslant 1$ (Vì nếu $a<1$ thì $b, c<1$, dẫn đến $a+b+c+abc<4$, trái với giả thiết). Với $a \geqslant 1$ ta có

$$P=a(a+b+c)-a^2+bc=a(4-abc)-a^2+bc=4-(a-2)^2+bc\left(1-a^2\right) \leqslant 4$$

Vậy Max $P=4$. Dấu " = " xảy ra khi chẳng hạn $a=2; b=2; c=0$. ■

Câu 19 Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2ab+2bc+2ac$. Chứng minh rằng $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{2abc}$.

Chuyên tin Hà Nội

Lời giải.

Cách 1

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9abc\\
&\Leftrightarrow (4ab+4bc+4ca)(a+b+c) \geqslant 54abc\\
&\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2+2ba+2bc+2ca)(a+b+c) \geqslant 54abc\\
&\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geqslant 54abc\\
&\Leftrightarrow a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{2abc}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra, ví dụ $(a,b,c)=(4t,t,t)$ và các hoán vị với $t>0$. ■

Câu 20 Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}$$

Bình Định

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
A&=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}=1+\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2\\
&=3+\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy}\right)+\frac{x^2+y^2}{2xy}
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy} \geqslant \sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}.\frac{x^2+y^2}{2xy}}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{2xy} \Leftrightarrow x^4+y^4-2x^2y^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-y^2\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow x=y$$

Ta có $\dfrac{x^2+y^2}{2xy} \geqslant 1$, do đó

$$A=3+\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy}\right)+\frac{x^2+y^2}{2xy} \geqslant 3+2+1=6$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 6 đạt được khi $x=y$. ■

Câu 21 Với a, b là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=(a+b)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-ab+2a^2}}\right)$$

Bà Rịa - Vũng Tàu

Lời giải.
Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\begin{aligned}S^2&\leqslant 2(a+b)^2\left(\frac{1}{a^2-ab+2b^2}+\frac{1}{b^2-ab+2a^2}\right)\\&=\frac{2(a+b)^2\left(3a^2+3b^2-2ab\right)}{2a^4-3a^3b+6a^2b^2-3ab^3+2b^4}\\&=\frac{2\left(a^2+b^2+2ab\right)\left(3a^2-3b^2-2ab\right)}{2(a^2+b^2)^2-3ab\left(a^2+b^2\right)+2a^2b^2}\end{aligned}$$

Chia tử và mẫu cho a^2b^2 và đặt $t=\dfrac{a^2+b^2}{ab}\geqslant 2$, ta được $S^2\leqslant\dfrac{2(t+2)(3t-2)}{2t^2-3t+2}$. Ta chứng minh

$$\frac{2(t+2)(3t-2)}{2t^2-3t+2}\leqslant 8 \qquad (*)$$

Thật vậy, biến đổi bất đẳng thức tương đương ta được

$$\begin{aligned}(*)\Leftrightarrow 3t^2+4t-4\leqslant 8t^2-12t-8&\Leftrightarrow 5t^2-16t+12\geqslant 0\\&\Leftrightarrow (t-2)(5t-6)\geqslant 0\end{aligned}$$

luôn đúng do $t\geqslant 2$. Do đó $S\leqslant 2\sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$. ■

Câu 22 Cho các số thực $x, y, z\geqslant 1$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z}\geqslant\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

Bình Thuận

Lời giải.
Ta có

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2=\left(\sqrt{x}.\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\sqrt{y}.\sqrt{\frac{y-1}{y}}+\sqrt{z}.\sqrt{\frac{z-1}{z}}\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\left(\sqrt{x}.\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\sqrt{y}.\sqrt{\frac{y-1}{y}}+\sqrt{z}.\sqrt{\frac{z-1}{z}}\right)^2\leqslant(x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)=x+y+z$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$ và $\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{y-1}{y^2}=\dfrac{z-1}{z^2}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{3}{2}$.

! **Nhận xét.** Đây là bài thi Iran 1988 tuy không quá khó nhưng cần sự "khéo léo" vô cùng trong việc vận dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ để giải. ■

Câu 23 Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điền kiện $(a+b)^2 + 4ab \leqslant 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2020ab \leqslant 2021$$

Hưng Yên

Lời giải.
Từ giả thiết ta có $(a+b)^3 + 4ab \leqslant 12 \Rightarrow 12 \geqslant (a+b)^3 + 4ab$.
Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ với a, b là các số dương ta được $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, từ đây suy ra

$$12 \geqslant \left(2\sqrt{ab}\right)^3 + 4ab$$

Giải bất phương trình này theo ẩn $\sqrt{ab}$ ta được

$$\begin{aligned}
8ab\sqrt{ab} + 4ab - 12 \leqslant 0 &\Leftrightarrow 2ab\sqrt{ab} + ab - 3 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 2ab\sqrt{ab} - 2 + ab - 1 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 2\left[\left(\sqrt{ab}\right)^3 - 1\right] + \left(\sqrt{ab}\right)^2 - 1 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{ab} - 1\right)\left[2\left(ab + \sqrt{ab} + 1\right) + \sqrt{ab} + 1\right] \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{ab} - 1\right)\left(2ab + 3\sqrt{ab} + 3\right) \leqslant 0
\end{aligned}$$

Do $a, b > 0$ nên $2ab + 3\sqrt{ab} + 3 > 0 \Rightarrow \sqrt{ab} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow ab \leqslant 1$. Ta chứng minh được bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leqslant \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{ab} - 1\right)}{(1+a)(1+b)\left(1+\sqrt{ab}\right)} \leqslant 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với $a, b > 0$; $ab \leqslant 1$. Như vậy suy ra

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2020ab \leqslant \frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2020ab$$

Đặt $\sqrt{ab} = t\,(0 < t \leqslant 1)$ thì ta cần chứng minh rằng $\dfrac{2}{1+t} + 2020t^2 \leqslant 2021$. Điều này tương đương với

$$(t-1)\left(2020t^2 + 4040t + 2019\right) \leqslant 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do vậy bài toán tới đây được giải quyết trọn vẹn.
Dấu " = " xảy ra khi $t = 1$ hay $a = b = 1$. ■

Câu 24 Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d, e, ta luôn có

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant a(b + c + d + e)$$

Lâm Đồng

Lời giải.
Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant a(b + c + d + e) \\
&\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 \geqslant 4a(b + c + d + e) \\
&\Leftrightarrow \left(a^2 - 4ab + 4b^2\right) + \left(a^2 - 4ac + 4c^2\right) + \left(a^2 - 4ad + 4d^2\right) + \left(a^2 - 4ae + 4e^2\right) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức luôn đúng với mọi a, b, c, d, e. ■

Câu 25 Cho a, b, c là các số thay đổi đồng thời thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a+b+c=8 \\ a^2+b^2+c^2=22 \end{cases}$$

① Tính $ab+bc+ac$.

② Chứng minh rằng $2 \leqslant a, b, c \leqslant \dfrac{10}{3}$.

③ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3$.

Đại học Huế

Lời giải.

① Biến đổi giả thiết ta được

$$ab+bc+ac=\frac{(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}=\frac{64-22}{2}=21$$

② Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{cases} a+b=8-c \\ ab=21-c\,(a+b)=21-c\,(8-c)=21-8c+c^2 \end{cases}$$

Theo định lý Viet đảo thì a, b là nghiệm của phương trình

$$x^2-(8-c)\,x+21-8c+c^2=0$$

Để phương trình có nghiệm thì

$$\Delta=\frac{(8-c)^2-4(21-8c+c^2)}{2}=\frac{-3c^2+16c-20}{2}\geqslant 0$$

Hay $(3c-10)(c-2)\leqslant 0 \Leftrightarrow 2\leqslant c\leqslant \dfrac{10}{3}$. Tương tự với a, b ta có điều phải chứng minh.

③ Biến đổi biểu thức P ta có

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3\,(a+b+c)\,(ab+bc+ac)+3abc=3abc+8$$

Sử dụng bất đẳng thức ở câu b) ta có hệ

$$\begin{cases} (a-2)\,(b-2)\,(c-2)\geqslant 0 \\ \left(\dfrac{10}{3}-a\right)\left(\dfrac{10}{3}-b\right)\left(\dfrac{10}{3}-c\right)\geqslant 0 \end{cases}$$

Sử dụng giả thiết và giải hệ trên ta được $18\leqslant abc\leqslant \dfrac{490}{27}$. Thay vào P ta được

$$64\leqslant P\leqslant \frac{562}{9}$$

Vậy GTLN của $P=\dfrac{562}{9}$, GTNN của $P=62$.

Bài toán được giải quyết.

Câu 26

① Cho 2 số thực a, b. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab + \dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$.

② Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện $a+b \leqslant 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = b - a + \frac{20}{a} + \frac{7}{b}$$

Hồ Chí Minh

Lời giải.

① Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2} &\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \geqslant \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}\\ &\Leftrightarrow (a-b)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2+b^2+2}\right) \geqslant 0\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đầu tiên được chứng minh.

② Theo giả thiết ta có $-a \geqslant b-3$ nên

$$\begin{aligned}Q &= b - a + \frac{20}{a} + \frac{7}{b} \geqslant b + b - 3 + \frac{20}{3-b} + \frac{7}{b} = 2b - 3 + \frac{20}{3-b} + \frac{7}{b}\\ &= 5(3-b) + \frac{20}{3-b} + 7b + \frac{7}{b} - 18 \geqslant 2\sqrt{5.(3-b).\frac{20}{3-b}} + 2\sqrt{7b.\frac{7}{b}} - 18 = 16\end{aligned}$$

Vậy GTNN của $Q = 16$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}5(3-b) = \dfrac{20}{3-b}\\ 7b = \dfrac{7}{b}\end{cases} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2.$

Bài toán được giải quyết. ■

Câu 27 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{ab}{3a+4b+5c} + \frac{bc}{3b+4c+5a} + \frac{ac}{3c+4a+5b} - \frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}$$

Thái Bình

Lời giải.

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, ta có

$$\begin{aligned}&\frac{25}{5(a+c)} + \frac{25}{5(b+c)} + \frac{4}{a+3b} \geqslant \frac{(5+5+2)^2}{6a+8b+10c}\\ \Leftrightarrow &\frac{5}{a+c} + \frac{5}{b+c} + \frac{4}{a+3b} \geqslant \frac{72}{3a+4b+5c}\\ \Leftrightarrow &\frac{ab}{3a+4b+5c} \leqslant \frac{1}{72}\left(\frac{5ab}{a+c} + \frac{5ab}{b+c} + \frac{4ab}{a+3b}\right)\end{aligned}$$

Với hai số dương a, b ta luôn có $\dfrac{4ab}{a+3b} \leqslant \dfrac{3a+b}{4}$.

Thật vậy, $\dfrac{4ab}{a+3b} \leqslant \dfrac{3a+b}{4} \Leftrightarrow 3(a-b)^2 \geqslant 0$, bất đẳng thức luôn đúng, khi đó thì

$$\frac{ab}{3b+4c+5c} \leqslant \frac{1}{72}\left(\frac{5ab}{a+c} + \frac{5ab}{b+c} + \frac{3a+b}{4}\right)$$

Biến đổi tương tự, ta được

$$\frac{bc}{3b+4c+5a} \leqslant \frac{1}{72}\left(\frac{5bc}{b+a}+\frac{5bc}{a+c}+\frac{3b+c}{4}\right)$$

$$\frac{ca}{3c+4a+5b} \leqslant \frac{1}{72}\left(\frac{5ca}{b+c}+\frac{5ca}{b+a}+\frac{3c+a}{4}\right)$$

Do đó, $\frac{ab}{3a+4b+5c}+\frac{bc}{3b+4c+5a}+\frac{ca}{3c+4a+5b} \leqslant \frac{1}{12}(a+b+c)=\frac{3}{4}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned} 4(a+b+c) = 3a+3b+(a+2c)+(b+2c) &\geqslant 4\sqrt[4]{9ab(a+2c)(b+2c)} \\ \Leftrightarrow 9 &\geqslant \sqrt{3}\sqrt[4]{ab(a+2c)(b+2c)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{ab(a+2c)(b+2c)} &\leqslant 27 \\ \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}} &\leqslant \frac{-1}{27} \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $T \leqslant \frac{3}{4}-\frac{1}{27}=\frac{77}{108}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3$.

Vậy, $\max T=\frac{77}{108}$ khi $a=b=c=3$.

! **Nhận xét.** Bài toán này đã từng xuất hiện trong kỳ thi Chọn HSG Quốc Gia của Tỉnh Bắc Ninh 2016-2017 với độ khó so với học sinh THCS được đánh giá rất cao.

Câu 28 Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ac)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)} \geqslant 4$$

Chuyên Khoa Học Tự Nhiên vòng 1

Lời giải.

Cách 1

Áp dụng $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$VT=\frac{(a^2+abc)^2}{ab(ab+2c^2)}+\frac{(b^2+abc)^2}{bc(bc+2a^2)}+\frac{(c^2+abc)^2}{ca(ca+2b^2)} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{(ab+bc+ca)^2} \qquad (1)$$

Trong 3 số $a-1;b-1;c-1$ theo nguyên lý Dirichlet luôn có hai số cùng dấu, ta có thể giả sử rằng $a-1;b-1$ cùng dấu, suy ra

$$(a-1)(b-1) \geqslant 0 \Rightarrow ab \geqslant a+b-1=2-c \Leftrightarrow abc \geqslant c(2-c)$$

Như vậy ta được

$$\begin{aligned} M &= a^2+b^2+c^2+3abc = a^2+b^2+c^2+3abc+2(ac+bc)-2c(a+b) \\ &\geqslant a^2+b^2+c^2+3c(2-c)+2(ac+bc)-2c(3-c) \geqslant 2(ab+bc+ca)+c^2+6c-3c^2-6c+2c^2 \\ &\geqslant 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+3abc \geqslant 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2+3abc}{ab+bc+ca} \geqslant 2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)} \geqslant 4$$

Dấu " = " xảy ra $a = b = c = 1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy − Schwarz* ta có

$$VT = \frac{(a^2+abc)^2}{ab(ab+2c^2)} + \frac{(b^2+abc)^2}{bc(bc+2a^2)} + \frac{(c^2+abc)^2}{ca(ca+2b^2)} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{(ab+bc+ca)^2} \quad (1)$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)}{(ab+bc+ca)} \geqslant 4$$

Thật vậy biến đổi tương đương ta được

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$$
$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$$
$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geqslant 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo bất đẳng thức Schur.
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu " = " xảy ra $a = b = c = 1$. ■

! **Nhận xét.** Bài toán này là một ứng dụng của bất đẳng thức Schur nên với những ai biết rõ về Schur sẽ có hướng giải và cách đi rất nhanh tuy nhiên bài này còn cách giải đặc biệt hơn cả là sử dụng nguyên lý Đirichlet. Để người đọc biết rõ thêm về bất đẳng thức Schur tác giả đã giới thiệu thêm về ứng dụng của nó ở phần sau của tài liệu.

Câu 29 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2+1 \geqslant 4abc+3\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right)$$

Chuyên Khoa Học Tự Nhiên vòng 2

✍ **Lời giải.**

Bất đẳng thức đã cho được viết thành

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-6\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4 \geqslant \frac{4}{abc}+\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc}$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+4 \geqslant \frac{4}{abc}+\frac{3\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)}{abc}$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+4 \geqslant \frac{4}{abc}+\frac{3(a+b+c)^2}{abc} \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+4 \geqslant \frac{31}{abc}$$

Quy đồng và rút gọn ta đưa về chứng minh $3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4a^2b^2c^2 \geqslant 13abc$, tương đương

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-abc(a+b+c)\right) \geqslant 4abc(1-abc)$$
$$\Leftrightarrow 81\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-abc(a+b+c)\right) \geqslant 4abc\left((a+b+c)^3-27abc\right) \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leqslant b \leqslant c$, ta có các phân tích sau

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-abc(a+b+c) = c^2(a-b)^2+ab(a-c)(b-c)$$
$$(a+b+c)^3-27abc = (a+b+7c)(a-b)^2+(4a+4b+c)(a-c)(b-c)$$

Khi đó (1) tương đương

$$81c^2(a-b)^2+81ab(a-c)(b-c) \geqslant 4abc(a+b+7c)(a-b)^2+4abc(4a+4b+c)(a-c)(b-c)$$

Với $a \leqslant b \leqslant c$ và $a+b+c=3$, ta có 3 đánh giá sau

① $81c^2 \geqslant 4abc\,(a+b+7c)$.

② $81ab \geqslant 4abc\,(4a+4b+c)$.

③ $(a-c)\,(b-c) \geqslant 0$.

Vậy ta có điều cần chứng minh. ■

Câu 30 Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ac}{2b^2+a^2+c^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2} \geqslant 0$$

Hội An

✍ **Lời giải.**
Bất đẳng thức được viết lại như sau.

$$\frac{2(a^2-bc)}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{2(b^2-ac)}{2b^2+a^2+c^2}+\frac{2(c^2-ab)}{2c^2+a^2+b^2} \geqslant 0$$

hay

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+c)^2}{2b^2+a^2+c^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \leqslant 3$$

. Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$, ta có

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Tương tự

$$\frac{(a+c)^2}{2b^2+a^2+c^2} \leqslant \frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}$$

$$\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \leqslant \frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}$$

Mà

$$\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2+c^2}{a^2+c^2}=3$$

Cộng các vế theo vế ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$. ■

Câu 31 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{a+c}{b+ac}}$$

Nghệ An

✍ **Lời giải.**
Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$4(c+ab)(a+bc) \leqslant (c+a+ab+bc)^2=[(a+c)(b+1)]^2$$

$$4(b+ac)(c+ab) \leqslant (b+c+ac+ab)^2=[(b+c)(a+1)]^2$$

$$4(a+bc)(b+ac) \leqslant (a+b+ac+bc)^2=[(a+b)(c+1)]^2$$

Nhân vế với vế ta được

$$\begin{aligned}[8(c+ab)(a+bc)(b+ca)]^2 &\leqslant [(a+b)(b+c)(c+a)]^2[(a+1)(b+1)(c+1)]^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)} &\geqslant \frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)} \qquad (1)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho 3 số dương ta có

$$6 = a+1+b+1+c+1 \geqslant 3\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} \Rightarrow 8 \geqslant (a+1)(b+1)(c+1) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$P = \sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}} \geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}}} \geqslant 3$$

Dấu " = " xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy $P_{\min} = 3$ khi $a=b=c=1$. ■

Câu 32 Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z \leqslant 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}} + \sqrt{\frac{x^2+z^2}{xz(x+z)}} + \sqrt{\frac{z^2+y^2}{zy(z+y)}} + 3 \leqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x+y}{xy}} + \sqrt{\frac{z+y}{zy}} + \sqrt{\frac{x+z}{xz}}\right)$$

Đà Nẵng

Lời giải.
Ta có bất đẳng thức phụ cơ bản sau.
Với a, b là 2 số thực dương thì $a+b \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)}$. Áp dụng đánh giá này, ta có

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}} + \sqrt{\frac{2xy}{x+y}} \leqq \sqrt{2(x+y)}$$

Chia cả hai vế cho $\sqrt{xy}$ ta được.

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}} + \sqrt{\frac{2}{x+y}} \leqq \sqrt{\frac{2(x+y)}{xy}}$$

Tương tự kết hợp với bất đẳng thức sau.

$$\sum\sqrt{\frac{2}{x+y}} = \sum\frac{\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{x+y}} \geqslant \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}} \geqslant 3$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ ở trên cho 3 số ta được

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leqslant \sqrt{6(x+y+z)} \leqslant 3\sqrt{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$. ■

Nhận xét. Đây là bài toán rất hay của Belgium đề xuất trong IMO Shorlish 2009 đã được dùng để ra trong rất nhiều đề thi toán của một số tỉnh ở Việt Nam.

Câu 33 Với các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P = 2\left(x^2 + y^2\right) + 4\left(x - y - xy\right) + 7$$

Bình Dương

Lời giải.
Biến đổi biểu thức ta có

$$\begin{aligned} P &= 2\left(x^2 + y^2\right) + 4\left(x - y - xy\right) + 7 = 2(x^2 - 2xy + y^2) + 4(x - y) + 7 \\ &= 2(x - y)^2 + 4(x - y) + 2 + 5 = 2(x - y + 1)^2 + 5 \end{aligned}$$

Vì $2(x - y + 1)^2 \geqslant 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, do vậy $P \geqslant 5$. Vậy GTNN của $P = 5$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$$

Giải ra ta được x, y là các bộ số thỏa mãn $y = x + 1$ và $x \in (0; 4]$. ■

Nhận xét. Đây là bài toán rất hay thoạt nhìn có vẻ như rất "khó" và điều kiện cồng kềnh làm các bạn đi sai hướng nhưng thực tế bài này rất dễ từ ý tưởng đơn giản của bài này bạn đọc có thể phát triển ra một số bài toán tương tự. Dưới đây là một số bài toán tương tự

① Với các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 15$.Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P = 2\left(x^2 + 4y^2\right) + 4\left(3x - 6y - 2xy\right) + 29$$

② Với các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $1 \leqslant y \leqslant x \leqslant 15$.Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P = 2\left(x^2 + 4y^2\right) + 2\left(2x - 5y - 4xy\right) + 11$$

Câu 34 Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng.

$$\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ac} + \frac{27(a + b)(b + c)(c + a)}{(a + b + c)^3} \geqslant 16$$

Vĩnh Phúc

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{8\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{ab + bc + ca} + \frac{27\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)}{\left(a + b + c\right)^3} &\geqslant 2\sqrt{\frac{8\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{ab + bc + ca} . \frac{27\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)}{\left(a + b + c\right)^3}} \\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{8\dfrac{(a + b + c)^2}{3}}{ab + bc + ca} . \frac{27\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)}{\left(a + b + c\right)^3}} \\ &= 12\sqrt{\frac{2\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)}{\left(ab + bc + ca\right)\left(a + b + c\right)}} \end{aligned}$$

Ta sẽ đi chứng minh rằng

$$12\sqrt{\frac{2\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)}{\left(ab + bc + ca\right)\left(a + b + c\right)}} \geqslant 16 \Leftrightarrow 9\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right) \geqslant 8\left(ab + bc + ca\right)\left(a + b + c\right)$$

Bất đẳng thức này tương đương

$$\begin{aligned}
&ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geqslant 6abc\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{c}\right)+\left(\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{c+a}{b}\right)\geqslant 6\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\geqslant 0
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. ■

Câu 35 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$A=(1+2a)(1+2bc)$$

Bắc Ninh

Lời giải.

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $1+2bc\leqslant 1+b^2+c^2=2-a^2$. Từ đó suy ra

$$A=(1+2a)(1+2bc)\leqslant(1+2a)(2-a^2)$$

$$\Rightarrow 6A=(2+4a)(6-3a^2)\leqslant\frac{(2+4a+6-3a^2)^2}{4}=\frac{(-3a^2+4a+8)^2}{4}\qquad(*)$$

Vì $\begin{cases}a,b,c>0\\a^2+b^2+c^2=1\end{cases}$ nên $0<a<1$. Từ điều kiện này ta suy ra

① $-3a^2+4a+8>-3+0+8=5.$

② $-3a^2+4a+8=-\left(\sqrt{3}a-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{28}{3}\leqslant\dfrac{28}{3}\Rightarrow(-3a^2+4a+8)^2\leqslant\dfrac{784}{9}.\qquad(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta suy ra $6A\leqslant\dfrac{196}{9}\Rightarrow A\leqslant\dfrac{98}{27}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=1\\2+4a=6-3a^2\\b=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\b=c=\dfrac{\sqrt{10}}{6}\end{cases}$

Vậy $\max A=\dfrac{98}{27}$. ■

Câu 36 Cho $\dfrac{-1}{3}\leqslant a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2}{1+3b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+3c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+3a+b^2}\geqslant\frac{6}{5}$$

Đồng Nai

Lời giải.

Bằng phương pháp biến đổi tương đương bạn đọc dễ dàng chứng minh 3 bất đẳng thức phụ sau

$$3a\leqslant\frac{3(a^2+1)}{2};3b\leqslant\frac{3(b^2+1)}{2};3c\leqslant\frac{3(c^2+1)}{2}$$

Áp dụng các bất đẳng thức phụ trên ta có

$$\sum\frac{1+a^2}{1+3b+c^2}\geqslant 2\sum\frac{1+a^2}{2(1+c^2)+3(1+b^2)}$$

Đặt $x=1+a^2$; $y=1+b^2$; $z=1+c^2$ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{2z+3y}+\frac{y}{2x+3z}+\frac{z}{2y+3x}\geqslant\frac{3}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\sum\frac{x}{2z+3y}=\sum\frac{x^2}{2zx+3xy}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{5\left(xy+yz+xz\right)}\geqslant\frac{3\left(xy+yz+xz\right)}{5\left(xy+yz+xz\right)}=\frac{3}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$ kết hợp với bất đẳng thức phụ ta được dấu bằng khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Bài toán này thực chất được phát triển từ bài thi JBMO 2003.
JBMO 2003. Cho $-1\leqslant x,y,z\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geqslant 2$$

Câu 37 Cho 3 số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+xz+4(x^2+y^2+z^2)=15$. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 3$$

Ninh Thuận

Lời giải.
Ta chứng minh bất đẳng thức phụ cơ bản sau

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz$$

Chứng minh.

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)\geqslant 2(xy+yz+xz)\Leftrightarrow((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geqslant 0$$

Vậy bất đẳng thức phụ được chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức phụ trên ta có

$$5(x^2+y^2+z^2)=4(x^2+y^2+z^2)+x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz+4(x^2+y^2+z^2)=15$$

Nên $x^2+y^2+z^2\geqslant 3$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$.

Câu 38 Cho ba số thực x,y,z dương thỏa mãn $xy+yz+xz+2xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{x+1}+\frac{y^2z}{y+1}+\frac{z^2x}{z+1}\geqslant 2xyz$$

Hải Dương

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$VT=\frac{x^2y^2}{xy+y}+\frac{y^2z^2}{yz+z}+\frac{z^2x^2}{xz+x}\geqslant\frac{(xy+yz+zx)^2}{xy+yz+zx+x+y+z}\qquad(1)$$

Ta có theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $xy+yz+zx\geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$. Đặt $t=xy+yz+zx$, từ giả thiết có

$$(1-t)^2=4x^2y^2z^2\leqslant\frac{4t^3}{27}\Leftrightarrow(4t-3)\left(t-3\right)^2\geqslant 0\Rightarrow t\geqslant\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\geqslant\frac{3}{4}$$

Thay vào giả thiết được $2xyz = 1 - (xy + yz + zx) \leqslant \frac{1}{4}$ hay $xyz \leqslant \frac{1}{8}$. Do đó

$$xy + yz + zx \geqslant 6xyz \Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \geqslant 6xyz\,(xy + yz + zx) \tag{2}$$

Mặt khác ta lại có

$$(xy + yz + zx)^2 \geqslant 3\,(xy.yz + yz.zx + zx.xy) \Leftrightarrow 2(xy + yz + zx)^2 \geqslant 6xyz\,(x + y + z) \tag{3}$$

Cộng vế (2) và (3) thì ta được

$$3(xy + yz + zx)^2 \geqslant 6xyz\,(xy + yz + zx + x + y + z) \tag{4}$$

Kết hợp các đánh giá ở trên ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{2}$. ■

Câu 39 Cho $x > 0, y > 0$ và $xy = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{x^3}{4(y+2)} + \frac{y^3}{4(x+2)}$$

Phú Yên

✍ **Lời giải.**

Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$Q = \frac{x^3(x+2) + y^3(y+2)}{4(y+2)(x+2)} = \frac{x^4 + y^4 + 2(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{4\,[2(x+y) + xy + 4]} \tag{1}$$

Ta có các đánh giá

1. $x^4 + y^4 \geqslant 2x^2y^2$ (2)
2. $x^2 - xy + y^2 \geqslant xy$ (3)

Dấu "$=$" trong (2) và (3) xảy ra khi $x = y = 2$ (do $xy = 4$). Do đó

$$Q \geqslant \frac{2x^2y^2 + 2(x+y)xy}{4\,[2(x+y) + xy + 4]}.$$

Cũng do $xy = 4$ nên

$$Q \geqslant \frac{32 + 8\,(x+y)}{4\,[2\,(x+y) + 8]} = \frac{x+y+4}{x+y+4} = 1 \Rightarrow Q \geqslant 1 \tag{4}$$

Dấu "$=$" trong (4) xảy ra khi dấu "$=$" xảy ra trong (2) và (3). Vậy $\min Q = 1$ khi $x = y = 2$. ■

Câu 40 Cho x, y là các số thực dương và $x + y \leqslant 1$.

1. Chứng minh rằng $\frac{x^3 + y^3}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^3$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 + y + \frac{1}{y}\right)^3$.

Vĩnh Long

✍ **Lời giải.**

① Đặt $\begin{cases} x+y=s \\ xy=v \end{cases}$ $(s,v>0)$.

Giả thiết và các bất đẳng thức cơ bản giúp ta có nhưng hệ quả sau đây $\begin{cases} s \leqslant 1 \\ v \leqslant \dfrac{s^2}{4} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Bất đẳng thức cần chứng minh sẽ trở thành

$$\frac{s^3-3sv}{2} \geqslant \frac{s^3}{8} \Leftrightarrow s^3 \geqslant 4sv.$$

Mà $s>0$ nên ta có thể rút gọn s và từ đó ta có điều phải chứng minh.

② Theo bất đẳng thức a) ta sẽ có

$$P \geqslant \frac{1}{4}\left(2+x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3 \geqslant \left(2+x+y+\frac{4}{x+y}\right)^3$$

$$\left(2+x+y+\frac{4}{x+y}\right)^3 = \left(2+\left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)+\frac{3}{x+y}\right)^3 \geqslant \frac{1}{4}.(2+2+3)^3 = \frac{343}{4}$$

Dấu bằng xảy ra tại $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán được giải quyết. ■

> **!** Bất đẳng thức ở ý ① còn phát biểu tổng quát dưới dạng
>
> $$\frac{a^n+b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$
>
> trong đó $a,b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$. Bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng kiến thức về đạo hàm mà chúng ta sẽ được học ở lớp 11.

Câu 41 Cho a,b,c là các số thực có tổng bằng 0 và $-1 \leqslant a,b,c \leqslant 1$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+2b^2+c^2$.

Tây Ninh

Lời giải.

Cách 1. Vì $-1 \leqslant a \leqslant 1$ nên $(a-1)(a+1) \leqslant 0$ suy ra $a^2 \leqslant 1$. Tương tự $b^2, c^2 \leqslant 1$. Do $a+b+c=0$ nên sẽ có 2 số cùng $\leqslant 0$ hoặc cùng $\geqslant 0$, khi đó tích của chúng $\geqslant 0$.

- ✔ **Trường hợp 1.** Nếu $ac \geqslant 0$. Khi đó thì

$$P=a^2+2(-a-c)^2+c^2=3a^2+4ac+3c^2 \leqslant 3a^2+6ac+3c^2=3(a+c)^2=3b^2 \leqslant 3$$

  Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a=0, b=1, c=-1$.

- ✔ **Trường hợp 2.** Nếu $ab \geqslant 0$. Khi đó thì

$$P=a^2+2b^2+(-a-b)^2=2a^2+2ab+3b^2 \leqslant 3a^2+6ab+3b^2=3(a+b)^2=3c^2 \leqslant 3$$

  Dấu bằng xảy ra khi $a=0, b=1, c=-1$.

- ✔ **Trường hợp 3.** Nếu $bc \geqslant 0$. Tương tự trường hợp 2.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, đạt được chẳng hạn khi $a=0, b=1, c=-1$.
Cách 2. Ta có

$$\begin{cases}(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 0\\(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc\geqslant 0\\1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow ab+bc+ca\geqslant -1$$

Như vậy ta được

$$P=b^2+(a^2+b^2+c^2)=b^2+(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=b^2-2(ab+bc+ca)\leqslant 1+2=3$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a=0, b=1, c=-1$.

! **Nhận xét.** Đây có thể xem là bài bất đẳng thức có thể được xem là dễ nhất trong tập bất 2020 bởi ý tưởng quá đơn giản của nó.

Câu 42 Cho các số thực $a, b.c$ thỏa mãn $3a^2+3b^2+8c^2=32$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ac$.

Quảng Trị

Lời giải.
Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}; bc\leqslant\frac{b^2+4c^2}{4}; ca\leqslant\frac{a^2+4c^2}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{4}(3a^2+3b^2+8c^2)=8$$

Dấu " = " xảy ra khi $a=b=2c=2$.
Vậy giá trị lớn nhất của P là 8.

Câu 43 Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27$.
Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $M=x+2y$.

Quảng Ninh

Lời giải.
Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27&\Leftrightarrow(x+2y)^2+3(x+2y)+(y-1)^2=28\\&\Leftrightarrow\left(x+2y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{121}{4}-(y-1)^2\\&\Leftrightarrow\left(x+2y+\frac{3}{2}\right)^2\leqslant\frac{121}{4}\\&\Leftrightarrow\left|x+2y+\frac{3}{2}\right|\leqslant\frac{11}{2}\\&\Leftrightarrow -7\leqslant x+2y\leqslant 4\end{aligned}$$

Vậy M lớn nhất là khi $x=2, y=1$, M nhỏ nhất là khi $x=-9, y=1$

Câu 44 Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H = 3xy + yz^2 + zx^2 - x^2y$.

Quảng Nam

Lời giải.
Không mất tính tổng quát giả sử $0 < x \leqslant y \leqslant z$. Ta có

$$\begin{aligned}(y-z)(y-x) \leqslant 0 &\Leftrightarrow y^2 - xy - zy + xz \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow y^2 + xz \leqslant xy + zy\\ &\Leftrightarrow y^2x + x^2z \leqslant xyz + x^2y\\ &\Leftrightarrow x^2z + y^2x + z^2y \leqslant xyz + x^2y + z^2y = y\left(2xz + x^2 + z^2\right) - xyz\\ &\Leftrightarrow x^2z + y^2x + z^2y \leqslant y(x+z)^2 - xyz = \frac{1}{2}.2y\left(x+z\right)\left(x+z\right) - xyz\\ &\leqslant \frac{1}{2}.\frac{1}{27}(2x+2y+2z)^3 - xyz = 4 - xyz\\ &\Leftrightarrow x^2z + y^2x + z^2y + xyz \leqslant 4.\end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$H = 3xy + yz^2 + zx^2 - x^2y = (x+y+z)xy + yz^2 + zx^2 - x^2y = x^2z + y^2x + z^2y + xyz$$

Áp dụng kết quả trên ta được $H \leqslant 4$.
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức H bằng 4. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. ■

Câu 45 Cho x, y, z là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{\sqrt{2x^2 - xy + 2y^2}}{x + y + 2z} + \frac{\sqrt{2y^2 - yz + 2z^2}}{y + z + 2x} + \frac{\sqrt{2z^2 - zx + 2x^2}}{z + x + 2y}$$

Quốc Học Huế

Lời giải.
Ta có đánh giá sau

$$\sqrt{2x^2 - xy + 2y^2} = \sqrt{2(x+y)^2 - 5xy} \geqslant \sqrt{2(x+y)^2 - \frac{5}{4}(x+y)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y).$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{2y^2 - yz + 2z^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)$$
$$\sqrt{2z^2 - zx + 2x^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(z+x)$$

Từ đây ta suy ra $S \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{x+y}{x+y+2z} + \dfrac{y+z}{y+z+2x} + \dfrac{z+x}{z+x+2y}\right)$.
Đặt $a = x + y + 2z, b = y + z + 2x, c = z + x + 2y$, suy ra

$$x + y = \frac{b+c-a}{2}, y + z = \frac{c+a-b}{2}, z + x = \frac{a+b-c}{2}$$

Khi đó thì

$$\begin{aligned}S &\geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{b+c-a}{2a} + \frac{c+a-b}{2b} + \frac{a+b-c}{2c}\right)\\ &\geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - 3\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(6-3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Vậy GTNN của biểu thức $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$ ■

Câu 46 Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất cuả biểu thức.

$$P = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{17}{16}$$

Cao Bằng

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có $1 = x + y \geqslant 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leqslant \frac{1}{4}$ (1)

Biến đổi biểu thức P ta có

$$P = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{17}{16} = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2 - \frac{17}{16} = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{15}{16}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ và bất đẳng thức (1) ta có

$$P = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{15}{16} = \left(x^2y^2 + \frac{1}{256x^2y^2}\right) + \frac{255}{256x^2y^2} + \frac{15}{16} \geqslant \frac{1}{8} + \frac{255}{16} + \frac{15}{16} = 17$$

Vậy GTNN của biểu thức $P = 17$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Bài toán trên là bài toán tiêu biểu cho dạng toán về điểm rơi một dạng toán quan trọng xuất hiện rất nhiều trong đề thi chuyên lẫn đề thi vào cấp 3 là dạng toán dễ nặng về kỹ thuật để giải dạng toán này các bạn cần có sự nhìn nhận nhanh về điểm rơi của bài toán để có hướng đi đúng.

Câu 47 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (a+c)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leqslant \frac{1}{3}$$

Bắc Giang

Lời giải.

Biến đổi vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{(2a^2 + bc).2 + (a^2 + b^2 + c^2)} = \sum_{cyc} \frac{1}{9} \cdot \frac{(2a + a)^2}{(2a^2 + bc).2 + (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ngược, ta được

$$VT \leqslant \frac{1}{9} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{9}\left(\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}\right)$$

Để chứng minh bất đẳng thức đầu cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leqslant 1$$

Đặt $(a, b, c) \to \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum \frac{a^2}{2a^2 + bc} = \sum \frac{\frac{1}{x^2}}{2.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{yz}} = \sum \frac{yz}{x^2 + 2yz}$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwar$ ta đã chứng minh được

$$\sum \frac{yz}{x^2+2yz} = \frac{1}{2}\left(3 - \sum \frac{x^2}{x^2+2yz}\right) \leqslant \frac{1}{2}(3-1) = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leqslant 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng mình. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

Câu 48 Cho số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$ Chứng minh

$$\sqrt{\frac{x}{3y^2z^2+xyz}} + \sqrt{\frac{y}{3x^2z^2+xyz}} + \sqrt{\frac{z}{3x^2y^2+xyz}} \leqslant \frac{3}{2}$$

Chuyên tin Phú Thọ

Lời giải.

Từ giả thiết $xy + yz + zx = 3xyz$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$.

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, ta được $a, b, c > 0; a + b + c = 3$. Khi đó ta phải chứng minh

$$\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3a+bc}} \leqslant \frac{3}{2}$$

Thật vậy, thay $a + b + c = 3$ vào bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b+c)a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 2 số $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}$ ta được

$$\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leqslant \frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right)$$

Tương tự thì ta cũng có các đánh giá

$$\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \leqslant \frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c}\right)$$

$$\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leqslant \frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b}\right)$$

Cộng vế với vế và biến đổi $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leqslant \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 1$.

Câu 49 Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}} \geqslant 2$$

Phú Thọ

Lời giải.

Đặt $\sqrt{xy} = a; \sqrt{yz} = b$ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a}{1+b} + \frac{1}{a+b} + \sqrt{\frac{2b}{1+a}} \geqslant 2$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta được

$$\frac{a}{1+b}+\frac{1}{a+b}+\sqrt{\frac{2b}{1+a}}=\frac{a}{1+b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2b}{\sqrt{2b(1+a)}}\geqslant\frac{a}{1+b}+\frac{1}{a+b}+\frac{4b}{1+a+2b}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{a}{1+b}+\frac{1}{a+b}+\frac{4b}{1+a+2b}\geqslant 2$$

Đến đây biến đổi tương đương ta được 1 hằng đẳng thức rất đẹp

$$(a-1)^2(a+b+1)\geqslant 0$$

luôn đúng vì $a,b>0$.
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1$ hay $x=y=z=1$. ■

! **Nhận xét.** Bài toán này không quá khó nhưng cách đặt ẩn có phần đơn giản đã làm bài toán có vẻ nhìn lạ mắt. Ngoài ra để chứng minh bất đẳng thức cuối chúng ta có tới 2 cách làm để giải ngoài trừ cách 1 đã nêu ở trên đó là sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ công việc này tác giả xin dành cho bạn đọc.

Câu 50 Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3(ab+bc+ac)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b+c)^3}{abc}$$

Đắk Lăk

Lời giải.
Ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^3}{abc}=\frac{(a+b+c)(a+b+c)^2}{abc}&=\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)\left[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right]\\&\geqslant\frac{9}{bc+ca+ab}\left[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right]\\&=\frac{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}{bc+ca+ab}+18\end{aligned}$$

Khi đó thì

$$P\geqslant\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}{bc+ca+ab}+18$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{bc+ca+ab}\geqslant 6$$

Mặt khác thì $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$, nên $\dfrac{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}{bc+ca+ab}\geqslant 6$. Suy ra $P\geqslant 6+6+18=30$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 30 khi $a=b=c$. ■

Câu 51 Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+3b+5c=2020$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{3ab}{a+3b}+\frac{15bc}{3b+5c}+\frac{5ac}{a+5c}$$

Thái Nguyên

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho hai số dương a và b ta có

$$\frac{3ab}{a+3b} \leqslant \frac{\left(\frac{a+3b}{2}\right)^2}{a+3b} = \frac{a+3b}{4}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{15bc}{3b+5c} \leqslant \frac{3b+5c}{4}; \frac{5ca}{5c+a} \leqslant \frac{5c+a}{4}$$

Từ đó suy ra $P \leqslant \dfrac{2\left(a+3b+5c\right)}{4} = 1010.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1010 khi và chỉ khi $a = 3b = 5c = \dfrac{2020}{3}$ hay $a = \dfrac{2020}{3}; b = \dfrac{2020}{9}; c = \dfrac{404}{3}$ ∎

Câu 52 Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{18}, y > \dfrac{1}{7}, z > -\dfrac{1}{2020} \\ \dfrac{18}{18x+17} + \dfrac{7}{7y+6} + \dfrac{2020}{2020z+2021} \geqslant 2 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = (18x-1)(7y-1)(2020z+1)$.

Tin Thanh Hóa

Lời giải.
Ta có

$$\frac{18}{18x+17} \geqslant 1 - \frac{7}{7y+6} + 1 - \frac{2020}{2020z+2021} = \frac{7y-1}{7y+6} + \frac{2020z+1}{2020z+2021}$$

Áp dụng bất đằng thức $AM - GM$ cho hai số dương ta có

$$\frac{18}{18x+17} \geqslant \frac{7y-1}{7y+6} + \frac{2020z+1}{2020z+2021} \geqslant 2\sqrt{\frac{7y-1}{7y+6} \cdot \frac{2020z+1}{2020z+2021}}$$

Tương tự ta có

$$\frac{7}{7y+6} \geqslant 2\sqrt{\frac{18x-1}{18x+17} \cdot \frac{2020z+1}{2020z+2021}}$$

$$\frac{2020}{2020z+2021} \geqslant 2\sqrt{\frac{18x-1}{18x+17} \cdot \frac{7y-1}{7y+6}}$$

Nhân các bất đẳng thức (1), (2) và (3) vế với vế ta được

$$\frac{18.7.2020}{(18x+17)(7y+6)(2020z+2021)} \geqslant 8.\frac{(18x-1)(7y-1)(2020z+1)}{(18x+17)(7y+6)(2020z+2021)}$$

Suy ra $A \leqslant \dfrac{18.7.2020}{8} = 31815$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{5}{9}; y = \dfrac{9}{14}; z = \dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $\max A = 31815$ khi $x = \dfrac{5}{9}; y = \dfrac{9}{14}; z = \dfrac{1009}{2020}$.

Nhận xét. Bài toán này thực chất được phát triển từ một bài toán rất cũ và kì thi chuyên của sở Thanh Hóa đã từng sử dụng dạng toán này ra đề vào năm 2005-2006. Dưới đây là các bài toán tương tự dành cho bạn đọc

1. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức abc.
2. **Thanh Hóa 2005 - 2006.** Cho ba số thực $x, y, z>2$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $(x-2)(y-2)(z-2)$.

Câu 53 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $2a+2b+2c+ab+bc+ca=24$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

Nam Định đề thi thi chung

Lời giải.
Ta có bất đẳng thức $a^2+b^2 \geqslant 2ab, b^2+c^2 \geqslant 2bc, c^2+a^2 \geqslant 2ca$.

$$a^2+4 \geqslant 4a, b^2+4 \geqslant 4b, c^2+4 \geqslant 4c$$

Cộng trừ vế ta được $3(a^2+b^2+c^2)+12 \geqslant 2(2a+2b+2c+ab+bc+ca)=48$.
Suy ra $P \geqslant 12$ với $a=b=c=2$ thì $P=12$.
Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 12.

Câu 54 Xét a, b, c là các số dương thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

Nam Định vòng 1

Lời giải.
Trước tiên áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 \geqslant 2ab & \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)+3a^2+4ab+3b^2 \geqslant 3a^2+6ab+3b^2 \\
& \Leftrightarrow 4a^2+4ab+4b^2 \geqslant 3a^2+6ab+3b^2 \\
& \Leftrightarrow 4\left(a^2+ab+b^2\right) \geqslant 3(a+b)^2 \\
& \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+ab+b^2} \geqslant \sqrt{3}(a+b)
\end{aligned}$$

Tương tự thì ta cũng có

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{b^2+bc+c^2} \geqslant \sqrt{3}(b+c) \\
& 2\sqrt{a^2+ac+c^2} \geqslant \sqrt{3}(a+c)
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra được $P \geqslant \sqrt{3}(a+b+c)$. Ta có đánh giá cơ bản sau

$$(x+y+z)^2 \leqslant 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0$$

Áp dụng đánh giá này ta suy ra

$$\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\right)^2 \leqslant 3(a+b+c+3) \Rightarrow a+b+c \geqslant 9$$

Mặt khác $P \geqslant \sqrt{3}(a+b+c) \Rightarrow P \geqslant 9\sqrt{3}$.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=3$.
Vậy GTNN của biểu thức là $P=9\sqrt{3}$ khi $a=b=c=3$.

Câu 55 Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3 \leqslant \frac{1}{8}+a^4+b^4+c^4$$

Nam Định vòng 2

Lời giải.

Đặt $p=a+b+c=1$, $q=ab+bc+ac$, $r=abc$.
Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại.

$$1-3q+3r \leqslant \frac{1}{8}+1-4q+2q^2+4r$$

Hay bất đẳng thức được viết lại thành.

$$\frac{1}{8}-q+2q^2+r \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(4q-1)^2}{8}+r \geqslant 0$$

Vì bất đẳng thức trên luôn đúng nên bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi (a, b, c) là hoán vị của bộ $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Câu 56

① Cho $x \geqslant 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2x^2+\frac{1}{3x}$.

② Cho a, b, c thực dương $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+\sqrt{a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{b+ac}}+\frac{c}{c+\sqrt{c+ab}} \leqslant 1$$

Lào Cai vòng 1

Lời giải.

① Một câu tương đối đơn giản, thêm bớt và áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta được

$$2x^2+\frac{1}{3x}=\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6x}+\frac{1}{6x}+\frac{11x^2}{6} \geqslant \frac{1}{2}+\frac{11}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

② Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c) \geqslant \left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\right)^2$$

Do đó ta được

$$\frac{a}{a+\sqrt{a+bc}} \leqslant \frac{a}{a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Ta cũng có các đánh giá tương tự

$$\frac{b}{b+\sqrt{b+ac}} \leqslant \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{c}{c+\sqrt{c+ab}} \leqslant \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức lại, ta được

$$\frac{a}{a+\sqrt{a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{b+ac}}+\frac{c}{c+\sqrt{c+ab}}\leqslant\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Câu 57

① Cho a,b là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2}+a^2+b^2\geqslant 2-2ab$$

② Cho $a,b>0$ thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+3a}}\leqslant 2.$

Lào Cai vòng 2

Lời giải.

① Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh, tương đương

$$\frac{1}{(a+b)^2}+a^2+b^2\geqslant 2-2ab\Leftrightarrow\frac{1}{(a+b)^2}+(a+b)^2\geqslant 2\Leftrightarrow\frac{\left((a+b)^2-1\right)^2}{(a+b)^2}\geqslant 0$$

Như vậy bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

② Đây là một câu tương đối quen thuộc, áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}\leqslant\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a+3b};\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{2b}{a+3b}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\leqslant\frac{3}{4}+\frac{a}{2(a+b)}$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\leqslant\frac{b}{a+b}+\frac{a+b}{b+3a};\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b+3a}}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{2a}{b+3a}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\leqslant\frac{3}{4}+\frac{b}{2(a+b)}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên với nhau ta có điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=1\end{cases}\Rightarrow a=b=\dfrac{1}{4}$

Bài toán được giải quyết.

Nhận xét. Bất đẳng thức ở ý ② là một bài toán phụ tương đối nổi tiếng, các bạn sẽ gặp bài toán này rất nhiều về sau ở mảng phương trình - hệ phương trình đại số, cũng như là nền tảng của nhiều bất đẳng thức khác. Ngoài cách chứng minh ngắn gọn ở trên thì bạn đọc cũng có thể đưa về phương trình đẳng cấp, rồi đánh giá khéo léo để giải quyết nó. Công việc này xin nhường lại cho bạn đọc.

Câu 58 Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+xz=5$. Chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+5}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+5}}\leqslant\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Hải Phòng

Lời giải.
Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{3z}{\sqrt{6(z+x)(z+y)}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{x+y}\cdot\frac{3}{x+z}} + \frac{y}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{3}{y+z}\cdot\frac{2}{y+x}} + \frac{3z}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{1}{z+x}\cdot\frac{1}{z+y}} \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{2x}{x+y}+\frac{3x}{x+z}+\frac{3y}{y+z}+\frac{2y}{y+x}+\frac{3z}{z+x}+\frac{3z}{z+y}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}}(2+3+3) = \frac{2\sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{3}{y+z} = \dfrac{3}{z+x} \\ xy+yz+zx=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x=2y \\ 5x^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow z=2x=2y=2.$ ■

Câu 59 Cho các số thực a, b, c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P = \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

Yên Bái

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{\left(\frac{2a}{a+b}\right)\left(\frac{2a}{a+c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}\right)\left(\frac{2b}{b+a}\right)} + \sqrt{\left(\frac{2c}{c+a}\right)\left(\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}+\frac{2b}{b+a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2c}{c+a}+\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{b+a}\right) + \left(\frac{2a}{a+c}+\frac{2c}{c+a}\right) + \left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}+\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2+2+\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{2a}{a+b} = \dfrac{2a}{a+c} \\ \dfrac{\frac{b}{2}}{b+c} = \dfrac{2b}{b+a} \\ \dfrac{\frac{c}{2}}{c+b} = \dfrac{2c}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x=2y \\ 5x^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow a=7b=7c.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{9}{4}$ khi $a=7b=7c$. ■

Câu 60 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant 3$$

Lai Châu

Lời giải.
Ta biến đổi giả thiết tương đương

$$a + b + c + ab + bc + ca = 6abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geqslant \frac{2}{ab}; \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{2}{bc}; \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \geqslant \frac{2}{ca}$$

Từ đây ta suy ra được

$$2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqslant 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \qquad (1)$$

Tương tự thì ta cũng có

$$\frac{1}{a^2} + 1 \geqslant \frac{2}{a}; \frac{1}{b^2} + 1 \geqslant \frac{2}{b}; \frac{1}{c^2} + 1 \geqslant \frac{2}{c}$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geqslant 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 3 \geqslant 2.\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2.6 = 12$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqslant 9 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Câu 61

1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{36x} + \frac{1}{9y} + \frac{1}{z}$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)} + \frac{b^3}{(b+1)(c+1)} + \frac{c^3}{(c+1)(a+1)} \geqslant \frac{3}{4}$$

Lạng Sơn

Lời giải.

1. Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\frac{1}{36x} + \frac{1}{9y} + \frac{1}{z} = \frac{\frac{1}{36}}{x} + \frac{\frac{1}{9}}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 1\right)^2}{x + y + z} = \frac{9}{4}$$

Trường hợp dấu "=" xảy ra xin dành bạn đọc giải quyết nốt.

② Dự đoán dấu "=" xảy ra tại $a=b=c=1$, khi đó thêm bớt và áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$,

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{8}(a+1)+\frac{1}{8}(b+1)\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3.(a+1)(b+1)}{8.8.(a+1)(b+1)}}=\frac{3}{4}a\Rightarrow\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}\geqslant\frac{5}{8}a-\frac{1}{8}b-\frac{1}{4}$$

Như vậy suy ra được

$$\sum\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}\geqslant\sum\left(\frac{5}{8}a-\frac{1}{8}b-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}(a+b+c)-\frac{1}{8}(a+b+c)-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Bài toán được giải quyết.

Câu 62 Cho hai số dương x,y thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}$$

Đăk Nông

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức phụ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$ và bất đẳng thức $(x+y)^2\geqslant 4xy$.

Phần chứng minh bất đẳng thức phụ này dành cho bạn đọc chứng minh bằng biến đổi tương đương. Ta có

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}\geqslant\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{2}{4xy}\geqslant\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{2}{(x+y)^2}=\frac{6}{(x+y)^2}=6$$

Vậy GTNN của $A=6$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 63

① Với x,y là các số thực dương thỏa mãn $x+y=2$.
Xét biểu thức $P=\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{x}-xy$. Chứng minh rằng $xy\leqslant 1$ và $P\geqslant x^2+y^2-xy\geqslant 1$.

② Với x,y là các số thực dương thỏa mãn $x-y=2$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{x}-xy$.

Đại học Sư Phạm - Thành phố Hồ Chí Minh

Lời giải.

① Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $2=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy\leqslant 1$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$P=\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{x}-xy=\frac{x^4+y^4}{xy}-xy\geqslant\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2xy}-xy=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{2xy}-xy$$

Tiếp đến sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{2xy}-xy\geqslant\frac{\left(x^2+y^2\right).2xy}{2xy}-xy$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ và bất đẳng thức (1) ta có

$$P\geqslant x^2+y^2-xy\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}-xy=2-xy\geqslant 1$$

Vậy các bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.
Nhận xét. Nếu đề bài yêu cầu chứng minh $P \geqslant 1$ ở câu a) thì ta còn cách giải sau chỉ dùng bất đẳng thức $AM - GM$. Khi đó lời giải của chúng ta sẽ như sau. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có
$2 = x + y \geqslant 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leqslant 1$ (1)
Biến đổi biểu thức P ta có

$$\begin{aligned}P &= \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} - xy = \frac{x^4 + y^4}{xy} - xy = \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2}{xy} - xy\\ &= \frac{\left((x+y)^2 - 2xy\right)^2 - 2x^2y^2}{xy} - xy = \frac{(4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2}{xy} - xy\\ &= \frac{2x^2y^2 - 16xy + 16}{xy} - xy = 2xy - 16 + \frac{16}{xy} - xy = xy + \frac{16}{xy} - 16\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ và bất đẳng thức (1) ta có

$$P = xy + \frac{16}{xy} - 16 = \left(xy + \frac{1}{xy}\right) + \frac{15}{xy} - 16 \geqslant 2 + 15 - 16 = 1$$

Vậy các bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$. Đây là cách giải sử dụng kỹ năng biến đổi đại số khéo léo là hướng giải hay để các bạn sử dụng khi tiến đến giải câu 2.

2 Biến đổi biểu thức P ta có

$$\begin{aligned}P &= \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} - xy = \frac{x^4 + y^4}{xy} - xy = \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2}{xy} - xy\\ &= \frac{\left((x-y)^2 + 2xy\right)^2 - 2x^2y^2}{xy} - xy = \frac{(4 + 2xy)^2 - 2x^2y^2}{xy} - xy\\ &= \frac{2x^2y^2 + 16xy + 16}{xy} - xy = 2xy + 16 + \frac{16}{xy} - xy = xy + \frac{16}{xy} + 16\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$P = xy + \frac{16}{xy} + 16 \geqslant 8 + 16 = 24$$

Vậy GTNN của $P = 24$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $xy = 4$ và $x - y = 2$.
Giải ra ta được dấu bằng khi $x = \sqrt{5} + 1$ và $y = \sqrt{5} - 1$.

Bài toán được giải quyết. ■

3 Giới thiệu một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức khác.

3.1 Tam thức bậc 2 và phương pháp miền giá trị.

3.1.1 Phương pháp.

Phương pháp này khá cơ bản và thường được sử dụng trong các bài toán tìm cực trị với các bất đẳng thức có dạng $a \leqslant f(x) \leqslant b$ với $x \in D$. Nguyên tắc chung là đưa về tìm điều kiện để phương trình $m = f(x)$ có nghiệm trên D. Trong trường hợp có nhiều biến ta cần đưa về phương trình với một biến hoặc đưa về hệ phương trình nếu có

3.1.2 Tìm miền giá trị bằng cách xét điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Một phương trình bậc hai có dạng $Ax^2 + Bx + C = 0$ với $A \neq 0$, thì khi đó điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta = B^2 - 4AC \geqslant 0$. Vì vậy cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một biểu thức $m = f(x, y, z)$. Ta biến đổi tương đương m để đưa về một phương trình bậc của x hoặc y hoặc của z, khi đó sử dụng điều kiện có nghiệm ta tìm được max và min của m.

Phương pháp tưởng chừng như rất đơn giản, nhưng với phương pháp này ta có thể giải quyết được các bài toán cực kì khó mà các phương pháp khác rất khó để thực hiện. Sau đây ta cùng tìm hiểu một số ví dụ trước.

Câu 1 Cho a, b là các số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$a^2b^4 + 2\left(a^2 + 2\right)b^2 + 4ab + a^2 \geqslant 4ab^3$$

Lời giải.
Bất đẳng thức có hai biến và biến a có bậc cao nhất là 2, do đó ta biến đổi bất đẳng thức theo hướng xuất hiện một tam thức bậc hai có biến là a như sau

$$\left(b^2+1\right)^2a^2 + 4b\left(1-b^2\right)a + 4b^2 \geqslant 0$$

Ta xem vế trái của bất đẳng thức là tam thức bậc hai, để ý đến $\left(b^2+1\right)^2 > 0$, ta cần chứng minh được biệt thức Δ của tam thức có giá trị âm. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(b^2+1\right)^2a^2 + 4b\left(1-b^2\right)a + 4b^2 \geqslant 0$$

Xét đa thức $f(a) = \left(b^2+1\right)^2a^2 + 4b\left(1-b^2\right)a + 4b^2$, khi đó ta có

$$\Delta = \left[4b\left(1-b^2\right)\right]^2 - 4\left(b^2+1\right)^2.4b^2 = -16b^2 \leqslant 0$$

Do đó ta có $\left(b^2+1\right)^2 f(a) \geqslant 0$ mà $\left(b^2+1\right)^2 > 0$ nên ta được

$$f(a) = \left(b^2+1\right)^2a^2 + 4b\left(1-b^2\right)a + 4b^2 \geqslant 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. ■

Câu 2 Cho a, b là các số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$3\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right) \geqslant 2\left(1-ab+a^2b^2\right)$$

Lời giải.
Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy, bất đẳng thức có tính đối xứng với hai biến a, b và là có bậc hai đối với mỗi biến do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng tính chất tam thức bậc hai để chứng minh. Trước hết ta viết lại bất đẳng thức

$$\left(b^2-3b+3\right)a^2 + \left(3b^2-5b+3\right)a + 3b^2 - 3b + 1 \geqslant 0$$

Xem vế trái là một tam thức bậc hai biến a khi đó, để ý đến $b^2 - 3b + 3 > 0$ ta cần chứng minh được biệt thức $\Delta \leqslant 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(b^2-3b+3\right)a^2 + \left(3b^2-5b+3\right)a + 3b^2 - 3b + 1 \geqslant 0$$

Xét tam thức bậc hai $f(a) = \left(b^2-3b+3\right)a^2 + \left(3b^2-5b+3\right)a + 3b^2 - 3b + 1$. Khi đó ta được

$$\Delta = \left(3b^2-5b+3\right)^2 - 4\left(b^2-3b+3\right)\left(3b^2-3b+1\right) = -\left(b^2-3b+3\right) \leqslant 0$$

Để ý ta thấy $b^2 - 3b + 3 = \left(b - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, do đó ta được $f(a) \geqslant 0$, hay

$$\left(b^2-3b+3\right)a^2 + \left(3b^2-5b+3\right)a + 3b^2 - 3b + 1 \geqslant 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b^2 - 3b + 1 = 0 \\ a = \dfrac{3b^2 - 5b + 3}{2\left(b^2 - 3b + 3\right)} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bài toán được giải quyết. ■

Câu 3 Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng

$$3\left(1 - a + a^2\right)\left(1 - b + b^2\right)\left(1 - c + c^2\right) \geqslant 1 + abc + a^2b^2c^2$$

Lời giải.

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bất đẳng thức có tính đối xứng và có bậc hai đối với mỗi biến, do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến tam thức bậc hai. Như vậy ta cần chọn một biến chính, là c chẳng hạn, khi đó các biến a, b đóng vai trò tham số. Để ý thấy vế trái của bất đẳng thức có đại lượng $\left(1 - a + a^2\right)\left(1 - b + b^2\right)$ rất cồng kềnh khi biến đổi, do đó ta cần thay đại lượng đó bằng một đại lượng bé hơn, chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có hai ý tưởng là

$$\left(1 - a + a^2\right)\left(1 - b + b^2\right) \geqslant (2a - a)(2b - b) = ab$$

Hoặc

$$\left(1 - a + a^2\right)\left(1 - b + b^2\right) = \frac{1 + a^2b^2 + (a - b)^2 + (1 - a)^2(1 - b)^2}{2} \geqslant \frac{1 + a^2b^2}{2}$$

Nhận thấy ngay ý tưởng đầu không thực hiện được vì chẳng hạn $ab = 0$ thì bất đẳng thức

$$3ab\left(1 - c + c^2\right) \geqslant \left(1 + abc + a^2b^2c^2\right)$$

là bất đẳng thức không đúng. Do đó ta chỉ có thể theo ý tưởng thứ hai. Lúc ta được bất đẳng thức

$$2\left(1 - a + a^2\right)\left(1 - b + b^2\right)\left(1 - c + c^2\right) \geqslant \left(1 + a^2b^2\right)\left(1 - c + c^2\right)$$

Bây giờ ta cần chứng minh

$$3\left(1 + a^2b^2\right)\left(1 - c + c^2\right) \geqslant 2\left(1 + abc + a^2b^2c^2\right)$$

Bất đẳng thức trên viết thành $f(c) = \left(3 + a^2b^2\right)c^2 - \left(3 + 2ab + 3a^2b^2\right)c + 1 + 3a^2b^2 \geqslant 0$. Công việc cuối cùng là chứng minh $\Delta = \left(3 + 2ab + 3a^2b^2\right)^2 - 4\left(3 + a^2b^2\right)\left(1 + 3a^2b^2\right) \leqslant 0$ thì bài toán xem như được chứng minh. Ở đây nếu như ta không chứng minh được biệt thức $\Delta \leqslant 0$ thì ý tưởng trên hoàn toàn phá sản. Cũng may trong bài toán này ta thu được $\Delta = -3(1 - ab)^4 \leqslant 0$. Đến đây chỉ cần trình bày lại lời giải nữa là xong. Ta có

$$2\left(1 - a + a^2\right)\left(1 - b + b^2\right) = 1 + a^2b^2 + (a - b)^2 + (1 - a)^2(1 - b)^2 \geqslant 1 + a^2b^2$$

Do đó ta được bất đẳng thức

$$2\left(1 - a + a^2\right)\left(1 - b + b^2\right)\left(1 - c + c^2\right) \geqslant \left(1 + a^2b^2\right)\left(1 - c + c^2\right)$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} &3\left(1 + a^2b^2\right)\left(1 - c + c^2\right) \geqslant 2\left(1 + abc + a^2b^2c^2\right) \\ \Leftrightarrow &\left(3 + a^2b^2\right)c^2 - \left(3 + 2ab + 3a^2b^2\right)c + 1 + 3a^2b^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Xét tam thức bậc hai

$$f(c) = \left(3 + a^2b^2\right)c^2 - \left(3 + 2ab + 3a^2b^2\right)c + 1 + 3a^2b^2$$

Khi đó ta được

$$\Delta = \left(3 + 2ab + 3a^2b^2\right)^2 - 4\left(3 + a^2b^2\right)\left(1 + 3a^2b^2\right) = -3(1 - ab)^4 \leqslant 0$$

Dễ thấy $3 + a^2b^2 > 0$ nên ta được $f(c) \geqslant 0$ hay

$$\left(3 + a^2b^2\right)c^2 - \left(3 + 2ab + 3a^2b^2\right)c + 1 + 3a^2b^2 \geqslant 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ■

Câu 4 Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+y-2}{z+2}$.

Lời giải.

Trong biểu thức của P có z khác so với x và y do vậy ta tìm cách rút $x+y$ theo z và đưa về phương trình bậc hai đối với z. Việc tìm max và min của P ta chặn bằng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai đối với z. Ta có $(z+2)P=x+y-2 \Rightarrow [(z+2)P+2]^2=(x+y)^2$. Chú ý

$$\begin{cases} x-y=3-z \\ x^2+y^2=5-z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3-z \\ \dfrac{1}{2}(x+y)^2+\dfrac{1}{2}(x-y)^2=5-z^2 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2=-3z^2+6z+1$$

Vì vậy $\left(P^2+3\right)z^2+\left(4P^2+4P-6\right)z+4P^2+8P+3=0$ (1)

Ta có (1) là phương trình bậc hai đối với z điều kiện có nghiệm là

$$\Delta'=\left(2P^2+2P-3\right)^2-\left(P^2+3\right)\left(4P^2+8P+3\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow 23P^2+36P\leqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{23}\leqslant P\leqslant 0$$

1. Với $x=2, y=0, z=1$ ta có P bằng 0 vậy giá trị lớn nhất của P bằng 0.
2. Với $x=\dfrac{20}{31}, y=-\dfrac{66}{31}, z=\dfrac{7}{31}$ thì P bằng $\dfrac{-36}{23}$ vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{36}{23}$.

Bài toán được giải quyết. ■

Câu 5 Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ chứng minh $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}\geqslant\dfrac{7}{5}$.

Lời giải.

Một bài toán rất nổi tiếng của Vasile Cirtoaje được trích trong cuốn sách **Algebraic Inequalities**, hiện nay đã có nhiều lời giải cho bài toán này, từ dồn biến tới khảo sát hàm số, đánh giá biên,... Tuy nhiên sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu lời giải sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 cực kì tự nhiên và ngắn gọn. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(3a-2b)c^2-\left(2a^2-ab-3b^2\right)c+3a^2b-2ab^2\geqslant 0$$

Vì $3a-2b>0$ ta chỉ cần chứng minh

$$\left(2a^2-ab-3b^2\right)^2-4(3a-2b)\left(3a^2b-2ab^2\right)\leqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-9b)\left(4a^2+b^2\right)\leqslant 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $a-b\geqslant 0; a-9b\leqslant 3-9.\dfrac{1}{3}=0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=3, b=\dfrac{1}{3}, c=1$. ■

Câu 6 Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x+y+z=xy+yz+zx$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}+\dfrac{z}{z^2+1}\geqslant-\dfrac{1}{2}$

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $z(x+y-1)=x+y-xy$.

✔ Nếu $x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=1 \end{cases}$ vô nghiệm.

✔ Nếu $x+y\neq 1$ và $z=\dfrac{x+y-xy}{x+y-1}$, vậy ta cần chứng minh

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{\dfrac{x+y-xy}{x+y-1}}{\left(\dfrac{x+y-xy}{x+y-1}\right)^2+1}\geqslant -\frac{1}{2}$$

Điều này tương đương với

$$\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2y}{y^2+1}+\frac{2\left(x+y-xy\right)\left(x+y-1\right)}{\left(x+y-xy\right)^2+\left(x+y-1\right)^2}\geqslant -1$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1}\geqslant \frac{(xy-1)^2}{\left(x+y-xy\right)^2+\left(x+y-1\right)^2}$$

Chú ý theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1}=\frac{(x+1)^2(1-y)^2}{\left(x^2+1\right)\left(1-y\right)^2}+\frac{(y+1)^2(1-x)^2}{\left(y^2+1\right)\left(1-x\right)^2}$$
$$\geqslant \frac{\left(\left(x+1\right)\left(1-y\right)+\left(y+1\right)\left(1-x\right)\right)^2}{\left(x^2+1\right)\left(1-y\right)^2+\left(y^2+1\right)\left(1-x\right)^2}=\frac{4(xy-1)^2}{\left(x^2+1\right)\left(1-y\right)^2+\left(y^2+1\right)\left(1-x\right)^2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$4(x+y-xy)^2+4(x+y-1)^2\geqslant \left(x^2+1\right)\left(1-y\right)^2+\left(y^2+1\right)\left(1-x\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(y^2-3y+3\right)x^2-\left(3y^2-8y+3\right)x+3y^2-3y+1=0$$

Vế trái bất đẳng thức là tam thức bậc hai của x với hệ số của x^2 dương và có

$$\Delta_x=\left(3y^2-8y+3\right)^2-4\left(y^2-3y+3\right)\left(3y^2-3y+1\right)=-3\left(y^2-1\right)^2\leqslant 0$$

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=-1, z=1$ hoặc các hoán vị. ■

3.1.3 Bài tập

① Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases}x-y+z=3\\ x^2+y^2+z^2=5\end{cases}$.
Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+y-1}{z+2}$.

② Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $\dfrac{2}{11}\leqslant\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}\leqslant 2$.

③ Cho x,y là hai số thực thoả mãn điều kiện $\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2-x^2-y^2=0$. Chứng minh rằng $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

④ Cho x,y là các số thực thay đổi thoả mãn điều kiện $x+y-2=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)^2$.

⑤ Cho x,y là 2 số thực và $x\neq 0, y\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $xy(x+y)=x^2+y^2-xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$.

⑥ Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}\leqslant 2$.

7 Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta có

$$\left(\frac{\cos 3x + y\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right)^2 \leqslant \frac{3y^2 + 2 + 2\sqrt{3y^2+1}}{9}$$

8 Cho 2 số thực x, y thỏa mãn

$$x^2 - y^2 + \frac{5}{4} = 3.\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

9 Cho x, y là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + xy + y^2 \leqslant 3$.
Chứng minh rằng $-4\sqrt{3} - 3 \leqslant x^2 - xy - 3y^2 \leqslant 4\sqrt{3} - 3$.

10 Cho x, y là hai số thực thay đổi thoả mãn điều kiện $\sqrt{2x+3} + \sqrt{y+3} = 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+2} + \sqrt{y+9}$.

11 Chứng minh rằng với x, y, z là các số thực có tổng bằng 1 ta có

$$(3x + 4y + 5z)^2 \geqslant 44\left(xy + yz + zx\right)$$

12 Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d ta có

$$3(a^2 - ab + b^2)(c^2 - cd + d^2) \geqslant 2(c^2a^2 - abcd + b^2d^2)$$

13 Cho x và y là hai số thực không cùng dương ta luôn có

$$\frac{4}{3}\left(x^2 - x + 1\right)\left(y^2 - y + 1\right) \geqslant x^2y^2 - xy + 1$$

14 Cho x, y, z là các số thực không cùng dương ta luôn có

$$\frac{16}{9}\left(x^2 - x + 1\right)\left(y^2 - y + 1\right)\left(z^2 - z + 1\right) \geqslant 1 - xyz + x^2y^2z^2$$

15 Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.
Chứng minh rằng $1 + 2abc \geqslant ab + bc + ac$.

16 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $(a+1)(b+1)(c+1) = 1 + 4abc$.
Chứng minh rằng $a + b + c \leqslant 1 + abc$.

17 Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4$.

18 Cho các số thực thay đổi x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{16}{25}xy = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{3}{5}(x^2 + y^2) + \dfrac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)}$.

19 Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + 2yz$.

20 Cho các số $x, y, z \in [1; 4]$ thỏa mãn điều kiện $x \geqslant y, x \geqslant z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x}$.

21 Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geqslant 2(ab+bc+ca)$.

22 Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$và $a^3+b^3+c^3-3abc=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\}$.

23 Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác và x, y, z là các số thực thay đổi thỏa mãn $ax+by+cz=0$. Chứng minh $xy+yz+zx \leqslant 0$.

24 Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+2y^2+3z^2=4 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của x.

25 Cho x, y là hai số thực thoả mãn điều kiện $x^2+xy+y^2-6(x+y)+11=0$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=y+2x$.

26 Cho x, y, z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=9xy+10yz+11zx$$

27 Cho hai số thực dương x, y thoả mãn điều kiện $x^2y=1$. Chứng minh rằng $x\sqrt{x^2+y^2}+x^2 \geqslant 2$.

28 Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thuộc đoạn $[0;1]$ chứng minh

$$(1+a_1+a_2+...+a_n)^2 \geqslant 4\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)$$

29 Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho với mọi số thực $x_1, x_2, .., x_n$ ta có

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \geqslant (x_1+x_2+...+x_{n-1})\,x_n$$

30 Chứng minh với mọi số thực x, y, z và a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác ta có

$$a(x-y)(x-z)+b(y-z)(y-z)+c(z-x)(z-y) \geqslant 0$$

31 [**Vasile-Cirtoaje**] Chứng minh với mọi số thực a, b, c ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geqslant 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$$

32 Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3 chứng minh $a+ab+2abc \leqslant \frac{9}{2}$.

33 Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geqslant (1+a)(1+b)(1+c)$$

34 Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8 \geqslant 5(a+b+c)$$

35 Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geqslant 9(ab+bc+ca)$$

36 Cho tam giác có ba góc A, B, C chứng minh với mọi số thực x ta có

$$1+\frac{1}{2}x^2 \geqslant \cos A+x(\cos B+\cos C)$$

37 Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta có

$$x^2\left(1+\sin^2 y\right)+2x\left(\sin y+\cos y\right)+1+\cos^2 y>0$$

38 Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta luôn có

$$(x+y)^2-xy+1\geqslant\sqrt{3}\left(x+y\right)$$

39 Chứng minh rằng với mọi số thực x,y,z và ba góc A,B,C của một tam giác ta có

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B$$

40 Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xyz+x+y+z=4$. Chứng minh rằng $x+y+z\geqslant xy+yz+zx$.

41 Cho $0<a\leqslant b\leqslant c; x,y,z>0$ chứng minh rằng

$$ac\left(xa+yb+zc\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\leqslant\frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2$$

42 Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2=1; c+d=3$. Chứng minh rằng

$$ac+bd+cd\leqslant\frac{9+6\sqrt{2}}{4}$$

43 Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn $b>c>d$. Chứng minh

$$(a+b+c+d)^2>8\left(ac+bd\right)$$

44 Cho a,b,c,d,p,q là các số thực thỏa mãn điều kiện $p^2+q^2-a^2-b^2-c^2-d^2>0$. Chứng minh

$$\left(p^2-a^2-b^2\right)\left(q^2-c^2-d^2\right)\leqslant(pq-ac-bd)^2$$

45 Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác và p,q,r là ba số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $p+q+r=0$. Chứng minh rằng $a^2qr+b^2rp+c^2pq\leqslant 0$

46 Chứng minh rằng với mọi số thực a,b ta có $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\geqslant 3\left(ab+a+b\right)$.

3.2 Phương pháp đổi biến PQR và bất đẳng thức Schur

Kỹ thuật *pqr* là một trong những kỹ thuật hay, hữu ích và hiệu quả nhất đối với bất đẳng thức 3 biến. Rất nhiều các bài toán đối xứng trong kì thi HSG đều có thể sử dụng được phương pháp này. Ta sẽ thấy được những điều ngạc nhiên, lạ lẫm khi mà không chỉ có những bài toán đối xứng mới có thể được giải quyết theo *pqr* mà thậm chí cả những bài toán dạng hoán vị vòng quanh, ta cũng có thể dùng nó để giải trong khi những phương pháp, những kỹ thuật khác lại không đủ khả năng để thực hiện điều này. Sau đây ta sẽ bắt đầu đi tìm hiểu với bất đẳng thức Schur.

3.2.1 Cơ sở và các đánh giá cơ bản.

Định lý. Với mọi a,b,c,k là các số thực không âm ta có

$$a^k\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^k\left(b-c\right)\left(b-a\right)+c^k\left(c-a\right)\left(c-b\right)\geqslant 0$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát giả sử $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$, khi đó ta có

$$VT=c^k\left(c-a\right)\left(c-b\right)+\left(a-b\right)\left(a^k\left(a-c\right)-b^k\left(b-c\right)\right)\geqslant 0$$

Điều này hiển nhiên là đúng, do đó bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Hệ quả. Như vậy từ bất đẳng thức Schur ta có các hệ quả sau

1. Nếu $k=0$ thì $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.
2. Nếu $k=1$ thì $a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$
3. Nếu $k=2$ thì $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geqslant ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)$

Nhận xét. Cho $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$ là 3 đa thức đối xứng theo a,b,c và được gọi là đa thức đối xứng Viete, khi đó mọi đa thức đối xứng $F(a,b,c)$ đều biểu diễn được qua $S(p,q,r)$.

Như vậy thì ta có một số đẳng thức cần nhớ như sau

$$\begin{aligned}
ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) &= pq-3r\\
(a+b)(b+c)(c+a) &= pq-r\\
ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right) &= p^2q-2q^2-pr\\
(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b) &= p^2+q\\
a^2+b^2+c^2 &= p^2-2q\\
a^3+b^3+c^3 &= p^3-3pq+3r\\
a^4+b^4+c^4 &= p^4-4p^2q+2q^2+4pr
\end{aligned}$$

Ngoài ra nếu đặt $L=p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r$, khi đó

$$\begin{aligned}
a^2b+b^2c+c^2a &= \frac{pq+3r\pm\sqrt{L}}{2}\\
(a-b)(b-c)(c-a) &= \pm\sqrt{L}
\end{aligned}$$

Sau đây ta sẽ xây dựng một số bất đẳng thức đáng chú ý bằng bất đẳng thức $AM-GM$ và bất đẳng thức *Schur*.

1. $p^2-3q \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum(a-b)^2 \geqslant 0$
2. $q^2 \geqslant 3pr \Leftrightarrow \sum b^2(a-c)^2 \geqslant 0$
3. $p^3 \geqslant 27r$, đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$.
4. $p^2q+3pr \geqslant 4q^2 \Leftrightarrow \sum ab(a-b)^2 \geqslant 0$
5. $pq^2+3qr \geqslant 4p^2r \Leftrightarrow \sum a^3(b-c)^2 \geqslant 0$
6. $p^4+3q^2 \geqslant 4p^2q \Leftrightarrow \left(p^2-3q\right)\left(p^2-q\right) \geqslant 0$
7. $p^2q \geqslant 3pr+2q^2 \Leftrightarrow \sum\left(ab+c^2\right)(a-b)^2 \geqslant 0$
8. $pq^2 \geqslant 2p^2r+3qr \Leftrightarrow \sum\left(abc+c^3\right)(a-b)^2 \geqslant 0$
9. $2p^3+9r \geqslant 7pq \Leftrightarrow 2\left(p^3-4pq+9r\right)+(pq-9r) \geqslant 0$, bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức *Schur* và $AM-GM$.
10. $q^3+9r^2 \geqslant 4pqr \Leftrightarrow \sum ab(ab-bc)(ab-ca) \geqslant 0$, đây chính là bất đẳng thức *Schur* bậc 2 cho 3 biến ab, bc, ca.
11. $2q^3+9r^2 \geqslant 7pqr \Leftrightarrow 2\left(q^3-4pqr+9r^2\right)+r(pq-9r) \geqslant 0$
12. $p^3r+q^3 \geqslant 6pqr \Leftrightarrow pr\left(p^2-3q\right)+q\left(q^2-3pr\right) \geqslant 0$

Tuy nhiên khi làm bài ta thường cố gắng tách bài toán về tổng của các bất đẳng thức luôn đúng khi phân tích theo pqr hoặc dồn về 2 biến, sau đó chuẩn hóa hoặc lợi dụng giả thiết để đưa về 1 biến, ở đó ta hay dùng đánh giá sau

$$r \geqslant \max\left\{0; \frac{p\left(4q-p^2\right)}{9}\right\}$$
$$r \geqslant \max\left\{0; \frac{\left(p^2-q\right)\left(4p-q^2\right)}{6p}\right\}$$

Hai bất đẳng thức trên suy ra từ bất đẳng thức Schur bậc 1 và bậc 2

1. $p^3-4pq+9r \geqslant 0$
2. $p^4-5p^2q+4q^2+6pr \geqslant 0$

3.2.2 Các bài toán minh họa.

Câu 1 Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+7abc \geqslant 10$$

Lời giải.
Bất đẳng thức tương đương với

$$10r+p^3-9p-10 \geqslant 0$$

Chú ý tới điều kiện $q=3 \Rightarrow p \geqslant 3$, tuy nhiên thì không phải lúc nào áp dụng bất đẳng thức Schur cũng thành công, đến đây ta xét 2 trường hợp.
Nếu $p \geqslant 2\sqrt{3}$ thì ta có

$$p^3-9p-10 \geqslant 3p-10 \geqslant 6\sqrt{3}-10>0$$

Nếu $2\sqrt{3} \geqslant p \geqslant 3$ thì theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$r \geqslant \frac{p\left(12-p^2\right)}{9}$$

Do đó

$$10r+p^3-9p-10 \geqslant \frac{10\left(p\left(12-p^2\right)\right.}{9}+p^3-9p-10=\frac{1}{9}(p-3)\left(30-p^2-3p\right)$$

Mà $30-p^2-3p \geqslant 30-(2\sqrt{3})^2-3\cdot 2\sqrt{3}=18-6\sqrt{3}>0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Câu 2 Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)(ab+bc+ca) \geqslant \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Lời giải.
Do $(*)$ là bất đẳng thức thuần nhất bậc 6 nên không mất tính tổng quát ta chuẩn hóa $ab+bc+ca=1$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
&\left(a^4+b^4+c^4\right)(ab+bc+ca) \geqslant \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left(p^4-4p^2q+2q^2+4pr\right)q \geqslant \left(p^2-2q\right)\left(q^2-2pr\right)\\
\Leftrightarrow\ &p^4-4p^2+2+4pr \geqslant p^2-2p^3r-2+4pr\\
\Leftrightarrow\ &p^4-5p^2+2p^3r+4 \geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ &\left(p^4-5p^2+4+6pr\right)+2pr\left(p^2-3\right) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Mà theo bất đẳng thức Schur ta có

$$p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geqslant 0 \Leftrightarrow p^4 - 5p^2 + 6pr + 4 \geqslant 0$$

Và $p^2 \geqslant 3q = 3$ nên bất đẳng thức cuối luôn đúng, ta có điều phải chứng minh.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ cùng các hoán vị. ∎

Câu 3 Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{3a}{a^2+2bc} + \frac{3b}{b^2+2ca} + \frac{3c}{c^2+2ab}$$

Lời giải.
Đặt $a := \frac{1}{a}, b := \frac{1}{b}, c := \frac{1}{c}$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} a \geqslant 3abc \sum_{cyc} \frac{1}{2a^2+bc} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a\left(a^2-bc\right)}{2a^2+bc} \geqslant 0 \Leftrightarrow 3\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2+bc} \geqslant \sum_{cyc} a$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2+bc} \geqslant \frac{\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2}{2\sum_{cyc} a^3 + 3abc}$$

Đên đây, ta cần chứng minh

$$3\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \geqslant \left(\sum_{cyc} a\right)\left(2\sum_{cyc} a^3 + 3abc\right)$$

Giả sử $a + b + c = 1$, chuyển về dạng p, q, r, bất đẳng thức trở thành

$$3(1-2q)^2 \geqslant 2 - 6q + 9r$$

Sử dụng bất đẳng thức $q^2 \geqslant 3r$, ta cần chúmg minh

$$3(1-2q)^2 \geqslant 2 - 6q + 3q^2 \Leftrightarrow 3 - 12q + 12q^2 \geqslant 2 - 6q + 3q^2 \Leftrightarrow (1-3q)^2 \geqslant 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh. ∎

Câu 4 Cho 3 số thực không âm a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \geqslant 8\left(\sum a^2b^2\right)\left(16abc + \sum a^2\right)$$

Lời giải.
Đặt $q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow q, r \geqslant 0$ và $q \leqslant \frac{1}{3}$ Do đó theo bất đẳng thức Schur $r \geqslant \frac{4q-1}{9}$.
Từ cách đặt, ta có

$$\sum a^2b^2 = q^2 - 2r; \sum a^2 = 1 - 2q$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$q \geqslant 8\left(q^2 - 2r\right)(16r + 1 - 2q) \Leftrightarrow f(r) = 8\left(2r - q^2\right)(16r + 1 - 2q) + q \geqslant 0$$

Ta có $f'(r) = 6(32r - (4q-1)(2q+1))$. Có hai trường hợp xảy ra

① $1 \geqslant 4q \Rightarrow f'(r) \geqslant 0 \Rightarrow f(r)$ là hàm đồng biến $\forall r \geqslant 0$

② $1 \leqslant 4q \Rightarrow r \geqslant \dfrac{4q-1}{9} \geqslant 0$ do vậy

$$f'(r) = 6(32r - (4q-1)(2q+1)) \geqslant 6\left(\frac{32(4q-1)}{9} - (4q-1)(2q+1)\right) = \frac{2(4q-1)(23-18q)}{3} \geqslant 0$$

Suy ra $f(r)$ là hàm đồng biến với mọi $r \geqslant 0$ do đó $f(r) \geqslant f(0) = q(4q-1)^2 \geqslant 0$

Bài toán được chứng minh. ■

> **!** **Nhận xét.** Chốt lại một điều là với bất đẳng thức dạng đa thức thì phương pháp này tỏ ra cực mạnh nếu có phân số thì thường ta sẽ nghĩ tới bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* dạng cộng hoặc đưa về dạng chứa một phân số, còn với dạng căn thức thì ta cần chút tinh ý sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* hoặc bất đẳng thức *Holder* để đưa về dạng mất căn. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm ở tài liệu về phương pháp này của tác giả **Võ Thành Văn.**

3.2.3 Bài tập.

① Cho các số dương a, b, c, chứng minh rằng

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geqslant 9\left(ab+bc+ca\right)$$

② Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \geqslant 3$$

③ Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$a^4\left(b+c\right)+b^4\left(c+a\right)+c^4\left(a+b\right) \leqslant \frac{1}{12}(a+b+c)^5$$

④ Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \leqslant \frac{1}{32}$$

⑤ Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+3}+\frac{b}{b^2+3}+\frac{c}{c^2+3} \leqslant \frac{3}{4}$$

⑥ Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{a+b}+\frac{bc+1}{b+c}+\frac{ca+1}{c+a} \geqslant 3$$

⑦ Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \geqslant 2\left(a+b+c\right)$$

⑧ Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1 chứng minh

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)+12abc \geqslant \frac{5}{3}$$

9) Chứng minh với a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1 ta có

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+6 \geqslant 2\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

10) Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3 chứng minh

$$\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}$$

11) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$ Chứng minh rằng

$$5(a+b+c)+\frac{3}{abc} \geqslant 18$$

12) Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$21+18abc \geqslant 13(ab+bc+ca)$$

13) Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{5-2ab}+\frac{1}{5-2bc}+\frac{1}{5-2ca} \leqslant 1$$

14) Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$(2-ab)(2-bc)(2-ca) \geqslant 1$$

15) Cho a, b, c là các số thực dương chứng minh

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\left(a^3+b^3+c^3\right) \leqslant \left(a^2+b^2+c^2\right)^3$$

16) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+12 \geqslant 3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)$$

17) Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+6abc=9$. Chứng minh rằng

$$a+b+c+3abc \geqslant 6$$

18) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

19) Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+2abc \geqslant \frac{247}{54}$$

20) Cho $a, b, c \in [1,2]$. Chứng minh rằng

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \leqslant 7abc$$

21 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{5-ab}{1+c}+\frac{5-bc}{1+a}+\frac{5-ca}{1+b} \geqslant ab+bc+ca$$

22 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 \leqslant 3$$

23 Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geqslant 2(ab+bc+ca)$$

24 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$12+9abc \geqslant 7(ab+bc+ca)$$

25 Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1} \leqslant 3$$

26 Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh rằng

$$2(a+b+c)-abc \leqslant 10$$

27 Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$1+\frac{3}{a+b+c} \geqslant \frac{6}{ab+bc+ca}$$

3.3 Phân tích tổng bình phương SOS và phân tích Schus - SOS.

Khi chứng minh bất đẳng thức ở các bậc học thấp hơn ta thường cố gắng biến đổi tương đương để đưa về dạng $a^2 \geqslant 0$, đây là một bất đẳng thức cơ sở nhất trong đại số sơ cấp. Vậy liệu có phải bài toán nào ta cũng có thể đưa về dạng như vậy hay ko, hoặc làm cách nào để đưa về dạng như thế? Trong bài giảng này ta sẽ cùng tìm hiểu phương pháp phân tích tổng bình phương, hay **Sum Of Square**, viết tắt là **SOS**.

3.3.1 Cơ sở của phương pháp S.O.S.

Ta đều biết tới đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$$

Như vậy viết tường minh ra theo dạng tổng của các thành phần bình phương thì ta được

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)(a-b)^2+\frac{1}{2}(a+b+c)(b-c)^2+\frac{1}{2}(a+b+c)(c-a)^2$$

Đến đây ta gọi 2 biểu thức $S_a=S_b=S_c=a+b+c$ là các thành phần đứng với các đại lượng bình phương lần lượt là $(b-c)^2, (a-c)^2, (a-b)^2$ thì ta có dạng tổng quát của S.O.S như sau

$$S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2 \geqslant 0 \qquad (*)$$

Như vậy thì nếu bất đẳng thức đưa về dạng này mà đồng thời $S_a, S_b, S_c \geqslant 0$ thì hiển nhiên bất đẳng thức luôn đúng phải không nào? Tuy nhiên câu hỏi đặt ra là có phải lúc nào ta cũng đưa được về dạng $S_a, S_b, S_c \geqslant 0$ không? Chắc chắn là không, do đó ta có một số **tiêu chuẩn S.O.S** xảy ra thì bất đẳng thức đúng như sau

Các tiêu chuẩn S.O.S

① $S_a \geqslant 0, S_b \geqslant 0, S_C \geqslant 0$

② $a \geqslant b \geqslant c; S_b \geqslant 0; S_a + S_b \geqslant 0; S_c + S_b \geqslant 0$

③ $a \geqslant b \geqslant c; S_a \geqslant 0; S_c \geqslant 0; S_a + 2S_b \geqslant 0; S_c + 2S_b \geqslant 0$

④ $a \geqslant b \geqslant c; S_b \geqslant 0; S_c \geqslant 0; a^2 S_b + b^2 S_a \geqslant 0$

⑤ $S_a + S_b + S_c \geqslant 0; S_a S_b + S_a S_c + S_b S_c \geqslant 0$

Sau đây là phần chứng minh của các tiêu chuẩn này.

✍ **Lời giải.**
1. Tiêu chuẩn này hiển nhiên đúng.
2. Ta có $(a-c)^2 = (a-b+b-c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(a-b)(b-c)$.
Mặt khác $a \geqslant b \geqslant c \Rightarrow (a-b)(b-c) \geqslant 0 \Rightarrow (a-c)^2 \geqslant (a-b)^2 + (b-c)^2$, từ đây suy ra

$$\begin{aligned} & S_b(a-c)^2 \geqslant S_b(a-b)^2 + S_b(b-c)^2 \\ & \Rightarrow S \geqslant S_a(b-c)^2 + S_b(a-b)^2 + S_b(b-c)^2 + S_c(a-b)^2 \\ & = (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_c + S_b)(a-b)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

3. Nếu $S_b \geqslant 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên dúng.
Xét $S_b < 0$, ta có $(a-c)^2 = (a-b+b-c)^2 \leqslant 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$, mặt khác

$$\begin{aligned} & S_b \leqslant 0 \Rightarrow S_b(a-c)^2 \geqslant 2S_b\left((a-c)^2 + (b-c)^2\right) \\ & \Rightarrow S \geqslant S_a(b-c)^2 + 2S_b\left((a-c)^2 + (b-c)^2\right) + S_c(a-b)^2 \\ & = (b-c)^2(S_a + 2S_b) + (a-c)^2(S_c + 2S_b) \geqslant 0 \end{aligned}$$

4. Từ điều kiện ta có $(a-c)b \geqslant a(b-c) \Rightarrow \dfrac{a-c}{b-c} \geqslant \dfrac{a}{b}$, từ đây suy ra

$$S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 = (b-c)^2\left(S_b\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^2 + S_a\right) \geqslant (b-c)^2\left(\frac{a^2S_b + b^2S_a}{b^2}\right) \geqslant 0$$

Mà $S_c \geqslant 0$ nên ta có ngay điều phải chứng minh.
5. Do $S_a + S_b + S_c \geqslant 0$ nên trong 3 số $S_a + S_b, S_b + S_c, S_c + S_a$ luôn tồn tại 1 số không âm. Không mất tính tổng quát giả sử $S_b + S_c \geqslant 0$, khi đó tiêu chuẩn $(*)$ tương đương

$$a^2(S_b + S_c) - 2a(cS_b + bS_c) + S_a(b-c)^2 + c^2S_b + b^2S_c \geqslant 0$$

Xét biệt thức

$$\Delta = 4(cS_b + bS_c)^2 - 4(S_b + S_c)\left(S_a(b-c)^2 + c^2S_b + b^2S_c\right) = -4(b-c)^2(S_aS_b + S_aS_c + S_bS_c) \leqslant 0$$

Mà $S_b + S_c \geqslant 0$ nên có ngay điều phải chứng minh. ■

Như vậy ta đã chứng minh xong, không có gì phức tạp lắm phải không? Việc đầu tiên cần làm khi sử dụng phương pháp S.O.S đó là phân tích bất đẳng thức cần chứng minh về dạng chính tắc của S.O.S. Việc này ban đầu có thể không dễ dàng nhưng chỉ cần tập phân tích một số đa thức đối xứng 3 biến quen thuộc về dạng S.O.S là ta có thể thông thạo việc này. Khi phân tích, biến đổi cần chú ý tới các hằng đẳng thức quen thuộc mà có chứa các đại lượng $(a-b)^2, (c-a)^2, (b-c)^2$. Sau đây là một số đẳng thức ta có thể sử dụng trong quá trình làm bài.

① $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} - \dfrac{3}{2} = \sum\limits_{cyc} \dfrac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}$

② $\dfrac{a^2}{b}-2a+b=\dfrac{(a-b)^2}{b}$

③ $(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc=(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=\sum_{cyc}c(a-b)^2$

④ $(a+b+c)^3-27abc=\dfrac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2(a+b+7c)$

⑤ $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)-9abc=\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{3}{2}c\right)$

⑥ $8\left(a^3+b^3+c^3\right)-3(a+b)(b+c)(c+a)=\sum_{cyc}(a-b)^2(4a+4b+c)$

⑦ $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)-(a+b+c)^2=\sum_{cyc}\dfrac{(a-b)^2\left(2a^2+2bc+ab\right)}{2ab}$

⑧ $\sum_{cyc}\dfrac{a^2b}{c}-\sum_{cyc}ab=\sum_{cyc}\dfrac{c(a-b)^2}{a}$

⑨ $\sum_{cyc}\dfrac{a^3}{b}-\sum_{cyc}a^2=\sum_{cyc}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2}\right)(a-b)^2$

⑩ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2$

⑪ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\sum_{cyc}\dfrac{(a-b)^2}{2}$

⑫ $a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2=\dfrac{\sum_{cyc}(a-b)^3}{3}$

⑬ $a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a=\dfrac{1}{3}\sum_{cyc}(2a+b)(a-b)^2$

⑭ $a^4+b^4+c^4-a^3b-b^3c-c^3a=\dfrac{1}{4}\sum_{cyc}\left(3a^2+2ab+b^2\right)(a-b)^2$

⑮ $a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=\dfrac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2(a+b)^2$

⑯ $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\dfrac{1}{2}\sum_{cyc}\left(a^2-b^2-ab-ac+2bc\right)^2$

⑰ $\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{z^2}+\dfrac{z^3}{x^2}-\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{z}-\dfrac{z^2}{x}=\sum_{cyc}^{x,y,z}\dfrac{(x-y)^2(x+y)}{y}\geqslant 0$

Có vẻ các đẳng thức này khá là dài và việc nhớ chúng không phải là việc đơn giản, các tài liệu trên mạng cũng không đưa ra cách xây dựng các đẳng thức này, tuy nhiên ta có thể xây dựng dựa vào tính chất đối xứng của nó. Ta giả sử

$$(a+b+c)^3-27abc=(ma+pb+nc)(a-b)^2+(mb+pc+na)(b-c)^2+(mc+pa+nb)(a-c)^2$$

Vì là đa thức đối xứng theo biến a,b,c nên ta phải có ma,pb,mc đi kèm với các thành phần bình phương. Đến đây ta đồng nhất hệ số là sẽ tìm được m,n,p.

Câu 1 [**Jack Garfunkel**]. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thì

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2$$

Lời giải.
Một bất đẳng thức quá quen thuộc phải không nào. Bây giờ chú ý rằng ta có các đẳng thức sau

1. $(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=\sum_{cyc} c(a-b)^2$
2. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

Như vậy ta đưa bất đẳng thức về dạng $(*)$, trong đó

$$S_c=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(ab+bc+ca)(c-a)+b^2(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$S_b=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2b}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(ab+bc+ca)(a-b)+c^2(a+b)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$S_a=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2a}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(ab+bc+ca)(b-c)+a^2(b+c)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geqslant b \geqslant c$, khi đó $S_b, S_c \geqslant 0$. Bây giờ theo tiêu chuẩn 2 thì ta cần chứng minh $S_a+S_b \geqslant 0$, ta có

$$S_a+S_b=\frac{2c^2(a+b)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 0$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Câu 2 Cho 3 số $a, b, c>0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant \frac{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải.
Như bài toán trước, lần này ta có phân tích cơ sở S.O.S của bất đẳng thức là

$$\sum\left(\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2+b^2+c^2}\right)(b-c)^2 \geqslant 0$$

Như vậy thì

$$S_a=\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2-bc}{c\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$S_b=\frac{b^2+c^2-ac}{a\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$S_c=\frac{a^2+c^2-ab}{b\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Chú ý đây là bất đẳng thức hoán vị 3 biến, không phải bất đẳng thức đối xứng, nên ta cần phải xét 2 trường hợp.
Nếu $a \geqslant b \geqslant c \Rightarrow S_a \geqslant 0, S_c \geqslant 0$, ta có

$$S_a+2S_b>0 \Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2-bc\right)a+2\left(b^2+c^2-ac\right)c>0$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^2a+2b^2c+2c^3>abc+2ac^2$$

Mà $a\geqslant b\geqslant c\Rightarrow (b-a)(b-c)\leqslant 0$, suy ra

$$b^2+ac\leqslant ab+bc\Rightarrow b^3+abc\leqslant ab^2+b^2c$$

Ta có $(a-c)\left(a^2+ac-c^2\right)\geqslant 0\Rightarrow a^3+c^3\geqslant 2ac^2$, suy ra

$$\begin{aligned}&a^3+c^3+ab^2+b^2c\geqslant 2ac^2+abc+b^3\\&\Rightarrow a^3+b^2a+2b^2c+2c^3>a^3+c^3+ab^2+b^2c>2ac^2+abc\\&\Rightarrow S_a+2S_b>0\end{aligned}$$

Tương tự thì ta cũng có $S_c+2S_b>0$, theo tiêu chuẩn 3 ta có điều phải chứng minh.
Nếu $a\leqslant b\leqslant c$ thì xét tương tự ta cũng có điều phải chứng minh theo tiêu chuẩn 2. ■

Như vậy có thể thấy rằng với bất đẳng thức hoán vị thì xem ra việc chứng minh hơi vất vả hơn xíu, đến đây ta lại tìm hiểu một phân tích cơ sở nữa, gọi là phân tích bình phương hoán vị, đây là phương pháp mạnh hơn S.O.S rất nhiều, sau đây là cơ sở của phương pháp này.

3.3.2 Cơ sở của phương pháp S.S.

Như đã biết mọi bất đẳng thức 3 biến (đối xứng hoặc hoán vị) đều có thể biến đổi được về dạng tiêu chuẩn của S.O.S. Tuy nhiên việc biến đổi về dạng tiêu chuẩn này thường không dễ dàng (đặc biệt là với những bài bất đẳng thức 3 biến hoán vị vòng quanh). Hơn nữa khi làm bất đẳng thức bằng phương pháp S.O.S thường phải xét 2 trường hợp. Đây là điều khá bất tiện. Phương pháp SS ra đời cũng từ những bất tiện này gây ra. Phương pháp SS(Schur - SOS) là phương pháp đưa bất đẳng thức 3 biến thành dạng

$$M(a-b)^2+N\left(a-c\right)\left(b-c\right)\geqslant 0$$

Trong đó M,N là 2 biểu thức đối xứng với a và b. Như vậy chỉ cần giả sử $c=\max\left\{a;b;c\right\}$ hoặc giả sử là min và chứng minh $M,N\geqslant 0$ thì bất đẳng thức đã được chứng minh. Cũng như S.O.S thì phương pháp SS cũng có những khai triển rất quan trọng.

1. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a-b)^2+\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
2. $a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left(a-b\right)^2+\left(a+b+c\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
3. $ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)-6abc=2c(a-b)^2+\left(a+b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
4. $ab^2+bc^2+ca^2-3abc=c(a-b)^2+b\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
5. $a^4+b^4+c^4-abc\left(a+b+c\right)=\left((a+b)^2+c^2\right)(a-b)^2+\left(ab+\left(a+c\right)\left(b+c\right)\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
6. $\sum\limits_{cyc}a^3\left(b+c\right)-2abc\left(a+b+c\right)=\left(a+c\right)\left(b+c\right)\left(a-b\right)^2+\left(2ab+ac+bc\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
7. $a^3b+b^3c+c^3a-abc\left(a+b+c\right)=\left(ac+bc\right)\left(a-b\right)^2+\left(a^2+ac\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
8. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}-3=\dfrac{1}{ab}(a-b)^2+\dfrac{1}{ac}\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
9. $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{a+b}{c}-6=\dfrac{2}{ab}(a-b)^2+\dfrac{a+b}{abc}\left(a-c\right)\left(b-c\right)$
10. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{(a-b)^2}{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}+\dfrac{\left(a+b+2c\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)}{2\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$
11. $\sum\limits_{cyc}\dfrac{a+kb}{a+kc}-3=\dfrac{k^2(a-b)^2}{\left(c+ka\right)\left(c+kb\right)}+\dfrac{k\left(a-c\right)\left(b-c\right)\left(\left(k^2-k+1\right)a+\left(k-1\right)b+kc\right)}{\left(a+kb\right)\left(b+ka\right)\left(c+kb\right)}$

(12) $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{c^2}{a+b}-\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)}+\dfrac{(a+b+c)(a+b+2c)(a-c)(b-c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$

Tương tự với phương pháp S.O.S, vấn đề bây giờ ta sẽ phân tích các đẳng thức này về dạng chuẩn như nào. Ngoài một số đẳng thức cần khéo léo thêm bớt thì với lớp các đa thức đối xứng thì ta sẽ phân tích thành bình phương, sau đó sẽ phân tích ngược về dạng S.S. Ví dụ phân tích đa thức như sau

$$\begin{aligned}
&3\left(a^3+b^3+c^3\right)-(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2\\
&=(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-a+a-c)^2+(a+c)(a-c)^2\\
&=(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-a)^2+2(b-a)(a-c)(b+c)+(a-c)^2(a+b+2c)\\
&=(a-b)\left(a^2-ab-ac-2b^2+bc+2c^2\right)+(a-c)^2(a+b+2c)\\
&=(a-b)\left(a^2-ab-2ac+ac-2b^2+bc+c^2+c^2\right)+(a-c)^2(a+b+2c)\\
&=(a-b)\left((a-c)^2-ab+ac-2b^2+bc+c^2\right)+(a-c)^2(a+b+2c)\\
&=(a-b)(a-c)^2+(a-b)\left(-ab+ac-2b^2+bc+c^2\right)+(a-c)^2(a+b+2c)\\
&=(a-c)^2(2a+2c)+(a-b)(c-b)(a+2b+c)
\end{aligned}$$

Như vậy ta đã có cách để phân tích một đa thức về dạng S.S.
Khi đó bài toán ở ví dụ 2 sẽ giải quyết như sau. Ta có

$$LHS-(a+b+c)=\frac{a^3c+b^3a+c^3b-abc(a+b+c)}{abc}=\frac{(ab+bc)(a-c)^2+\left(a^2+ab\right)(a-b)(c-b)}{abc}$$

Như vậy thì

$$\begin{aligned}
LHS-RHS&=(a-c)^2\left(\frac{b(a+c)}{abc}-\frac{2(a+c)}{a^2+b^2+c^2}\right)+(a-b)(c-b)\left(\frac{a^2+ab}{abc}-\frac{a+2b+c}{a^2+b^2+c^2}\right)\\
&=(a-c)^2(a+c)\left(\frac{1}{ac}-\frac{1}{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}\right)+(a-b)(c-b)\left(\frac{a+b}{bc}-\frac{a+2b+c}{a^2+b^2+c^2}\right)
\end{aligned}$$

Trước tiên ta thấy rằng $a^2+b^2+c^2-2ac>0$ theo $AM-GM$.
Ta có $(a+b)\left(a^2+b^2+c^2\right)-bc(a+2b+c)=a^3+a^2b+ab^2-abc+ac^2+b^3-2b^2c$.
Theo $AM-GM$ thì $ab^2+\dfrac{1}{4}ac^2\geqslant abc$. Giả sử $b=\min\{a,b,c\}$, ta xét tam thức bậc 2

$$f(c)=\frac{3}{4}c^2a-2b^2c+a^3+a^2b+b^3$$

Ta có

$$\Delta=b^4-\frac{3}{4}a\left(a^3+a^2b+b^3\right)=b^4-\frac{3}{4}a^4-\frac{3}{4}a^3b-\frac{3}{4}ab^3<0$$

Như vậy thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Câu 3 Cho 3 số dương a,b,c, chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+2$$

✍ **Lời giải.**
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\right)-6\geqslant 4\left[\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-1\right]$$

Áp dụng đẳng thức 1 và 9 ta có phân tích thành dạng S.S là

$$\left[\frac{2(bc+ca-ab)}{ab(ab+bc+ca)}\right](a-b)^2+\left[\frac{(a-b)^2c+ab(a+b)}{abc(ab+bc+ca)}\right](c-a)(c-b)\geqslant 0$$

Đến đây chẳng còn gì để nói nữa! Nếu sử dụng S.O.S thì có lẽ sẽ khá phức tạp.

Nhận xét. Theo kinh nghiệm thì các bài toán phân tích S.S sau khi đưa về dạng chính tắc thì các bất đẳng thức còn lại chứng minh không khó khăn, tất cả cứ khai triển hết ra và kết hợp với điều giả sử một biến min hoặc max hợp lý là sẽ giải quyết được bài toán.

3.3.3 Bài tập.

Chứng minh các bất đẳng thức dưới đây, điều kiện mặc định là a, b, c là các số không âm.

1. $\frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{b+a}\leqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$
2. $\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}+\frac{(b+c)^2}{(c+a)^2}+\frac{(c+a)^2}{(a+b)^2}+\frac{2abc}{a^3+b^3+c^3}\geqslant\frac{11}{3}\forall a,b,c\geqslant 0$
3. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+8\frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 11\forall a,b,c>0$
4. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}\geqslant\frac{5}{3}\forall a,b,c>0$
5. $\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geqslant(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\forall a,b,c\geqslant 0$
6. $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\leqslant\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\forall a,b,c>0$
7. $\sum_{cyc}\frac{a+kc}{a+kb}\leqslant\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\quad\forall k\leqslant 1$
8. $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\geqslant 4\quad\forall a,b,c>0$
9. $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant\frac{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^2+b^2+c^2}$
10. $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant\sqrt{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}$
11. $\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$
12. $\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\geqslant\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$
13. $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ac}+2$
14. $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}+\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}\geqslant 12$
15. $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{54abc}{(a+b+c)^3}\geqslant 5$

16 $\dfrac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\dfrac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\dfrac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geqslant\dfrac{3}{2}$

17 $\dfrac{a^2+bc}{b+c}+\dfrac{b^2+ca}{c+a}+\dfrac{c^2+ab}{a+b}\geqslant a+b+c\forall a,b,c>0$

18 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\dfrac{81abc}{(a+b+c)^3}\geqslant\dfrac{9}{2}\quad\forall a,b,c>0$

19 $\dfrac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\dfrac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\dfrac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geqslant\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\forall a,b,c>0$

20 $\dfrac{a+2b}{c+2b}+\dfrac{b+2c}{a+2c}+\dfrac{c+2a}{b+2a}\geqslant 3\forall a,b,c>0$

21 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}+\dfrac{4\sqrt{2}(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 8+4\sqrt{2}\forall a,b,c>0$

22 $\dfrac{a^2+bc}{a^2(b+c)}+\dfrac{b^2+ca}{b^2(c+a)}+\dfrac{c^2+ab}{c^2(a+b)}\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\forall a,b,c>0$

23 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant(a+b+c)\left(\dfrac{1}{2a^2+bc}+\dfrac{1}{2b^2+ca}+\dfrac{1}{2c^2+ab}\right)\forall a,b,c>0$

24 $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 12\forall a,b,c>0$

25 $\dfrac{8(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geqslant 48$

26 $\dfrac{2bc}{(b+c)^2}+\dfrac{2ac}{(a+c)^2}+\dfrac{2ab}{(a+b)^2}+\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geqslant\dfrac{5}{2}$

27 $(a+b+c)^6\geqslant\dfrac{729}{5}abc\left(a^3+b^3+c^3+2abc\right)$

28 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{3}{a+b+c}\geqslant\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\dfrac{2}{a^2+b^2+c^2}$

29 Cho a,b,c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

30 $\dfrac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\dfrac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\dfrac{(c+a)^2}{b^2+ac}\geqslant 6$

31 $\dfrac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4}+\dfrac{12\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}\geqslant 5$

32 $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\dfrac{3abc}{a+b+c}\geqslant\dfrac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

33 $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}\geqslant\dfrac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$

4 Các bài toán luyện tập.

Dưới đây là các bài toán được tuyển chọn từ các kỳ thi chuyên toán, kì thi học sinh giỏi lớp 9 và khó hơn là các đề chọn đội tuyển của các trường và các tỉnh trên cả nước, chúng tôi xin gửi tới bạn đọc ngay sau đây.

Câu 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^4 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^4$$

Câu 2. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì luôn có

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geqslant 13.$$

Câu 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{a+3c} + \frac{ab}{bc+ca}$$

Câu 4. Với các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - abc$.

Câu 5. Cho ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z+2 = xyz$. Chứng minh rằng

$$x + y + z + 6 \geqslant 2\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}\right)$$

Câu 6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y - z + 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2}$$

Câu 7. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{c(c+a+3b)+c^2} + \frac{1}{a(a+b+3c)+a^2} + \frac{1}{b(b+c+3a)+b^2} \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Câu 8. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \leqslant 5.$$

Câu 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2018}\right)^2 \leqslant 2019a^2b^2c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab}$$

Câu 10. Cho các số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{2}$$

Câu 11. Cho $a; b; c$ là ba số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} + \frac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}} + \frac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}} \leqslant 3$$

Câu 12. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \left(a^2+b^2+c^2\right) + 4abc$$

Câu 13. Với mọi số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 = 2$.

① Chứng minh rằng $x+y+z \leqslant 2+xy$.

② Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{2+yz}+\dfrac{y}{2+zx}+\dfrac{z}{2+xy}$.

Câu 14. Cho a,b,c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(a+b+c)^2}{30\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}-\frac{131\left(a^2+b^2+c^2\right)}{60\left(ab+bc+ca\right)}$$

Câu 15. Cho a,b,c là ba số không âm thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 2\left(ab+bc+ca\right)$$

và p,q,r là ba số thỏa mãn $p+q+r=0$. Chứng minh rằng $apq+bqr+crp \leqslant 0$.

Câu 16. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x \geqslant z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z} \geqslant \frac{5}{2}$$

Câu 17. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left[\dfrac{3a-b}{a^2+ab}+\dfrac{3b-c}{b^2+bc}+\dfrac{3c-a}{c^2+ca}\right] \leqslant 9$ với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 18. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(3x+1)(y+z)+x}+\frac{1}{(3y+1)(z+x)+y}+\frac{1}{(3z+1)(x+y)+z}.$$

Câu 19. Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16}.$$

Câu 20. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}+b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}+c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}} \leqslant \frac{3}{abc}.$$

Câu 21. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{1+a^3}+\dfrac{1}{1+b^3}+\dfrac{1}{1+c^3}+\dfrac{1}{1+d^3}=2$ Chứng minh rằng

$$\frac{1-a}{1-a+a^2}+\frac{1-b}{1-b+b^2}+\frac{1-c}{1-c+c^2}+\frac{1-d}{1-d+d^2} \geqslant 0.$$

Câu 22. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \leqslant \dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}.$$

Câu 23. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2} \leqslant \frac{6}{5}.$$

Câu 24. Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{b}+\frac{b^2+ca}{c}+\frac{c^2+ab}{a} \geqslant a^2+b^2+c^2.$$

Câu 25. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho với mọi a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$ thì bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{a}{1+9bc+k(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+k(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+k(a-b)^2}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Câu 26. Cho x, y, z là các số thực không dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)}+\frac{yz^3x^3}{(y^2+zx)^2(z^3+x^3)}+\frac{zx^3y^3}{(z^2+xy)^2(x^3+y^3)}\leqslant\frac{3}{8}.$$

Câu 27. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^2y}{4x+5y}}+\sqrt{\frac{y^2z}{4y+5z}}+\sqrt{\frac{z^2x}{4z+5x}}.$$

Câu 28. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca}+\frac{b^3}{1+9c^2ab}+\frac{c^3}{1+9a^2bc}\geqslant\frac{(a+b+c)^3}{18}.$$

Câu 29. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a^2+4bc}+\sqrt{5b^2+4ca}+\sqrt{5c^2+4ab}\geqslant\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right).$$

Câu 30. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $3\left(x^4+y^4+z^4\right)-7\left(x^2+y^2+z^2\right)+12=0$. Tìm giá trị nỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}.$$

Câu 31. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\geqslant\frac{3}{5}.$$

Câu 32. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+ab=2c(a+b)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Câu 33. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$M=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}+\frac{1}{xyz}.$$

Câu 34. Cho a, b, c là các số thực không âm, trong đó không có hao số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}.$$

Câu 35. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=7\left(a^4+b^4+c^4\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

Câu 36. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b ta có bất đẳng thức sau

$$a^2b^2\left(a^2+b^2-2\right)\geqslant(a+b)(ab-1).$$

Câu 37. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=10$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)+12a^2b^2c^2\geqslant 30.$$

Câu 38. Cho x, y, z là các số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)}+\frac{yz^3x^3}{(z^2+xy)^2(x^3+y^3)}+\frac{zx^3y^3}{(z^2+xy)^2(x^3+y^3)}\leqslant\frac{3}{8}.$$

Câu 39. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^2y}{4x+5y}}+\sqrt{\frac{y^2z}{4y+5z}}+\sqrt{\frac{z^2x}{4z+5x}}.$$

Câu 40. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(|xy|+|yz|+|zx|)\left[15\sqrt{x^2+y^2+z^2}-7(x+y-z)\right]+1.$$

Câu 41. Cho ba số thực dương thay đổi a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\geqslant(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a(a-2b+2)+b(b-2c+2)+c(c-2a+2)+\frac{1}{abc}$$

Câu 42. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{1}{a^2+b^2+3}+\frac{1}{b^2+c^2+3}+\frac{1}{c^2+a^2+3}.$$

Câu 43. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+2}{x^3(y+z)}+\frac{y+2}{y^3(z+x)}+\frac{z+2}{z^3(x+y)}.$$

Câu 44. Cho a, b, c là các số thực không âm trong đó không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}\geqslant\frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Câu 45. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+9.$$

Câu 46. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b+1}{a^3+b^3+1}+\frac{b+c+1}{b^3+c^3+1}+\frac{c+a+1}{c^3+a^3+1}.$$

Câu 47. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(a+bc)^2+(b+ca)^2+(c+ab)^2\geqslant\sqrt{2}(a+b)(b+c)(c+a).$$

Câu 48. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x}(y+z)}+\frac{y^3-2y^2+y}{\sqrt{y}(z+x)}+\frac{z^3-2z^2+z}{\sqrt{z}(x+y)}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 49. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;9]$ và $x\geqslant y; x\geqslant z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{y}{10y-x}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}\right).$$

Câu 50. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x\left(y^2+z^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

Câu 51. Cho các số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{3x^4+4y^3+16z^3+1}{(x+y+z)^3}.$$

Câu 52. Cho ba số thực a, b, c thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=3\sqrt[3]{\frac{c^2-3a^2}{6}}-2\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}}.$$

Câu 53. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab+bc+ca+2abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a+1)}{(2a+1)^2}+\frac{b(b+1)}{(2b+1)^2}+\frac{c(c+1)}{(2c+1)^2}\leqslant\frac{9}{16}.$$

Câu 54. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2x+y$ và $2y+x$ khác 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\left(2x^2+y\right)\left(4x+y^2\right)}{(2x+y-2)^2}+\frac{\left(2y^2+x\right)\left(4y+x^2\right)}{(2y+x-2)^2}-3(x+y).$$

Câu 55. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

Câu 56. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2x+y+z)^2}+\frac{1}{(x+2y+z)^2}+\frac{1}{(x+y+2z)^2}\leqslant\frac{3}{16}.$$

Câu 57. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)\leqslant\frac{3}{2}.$$

Câu 58. Cho a, b, c là các số thực dương $a+b+c=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{ab}{3\text{a}+4b+4c}+\frac{bc}{3b+4c+5\text{a}}+\frac{ca}{3c+4\text{a}+5b}-\frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(a+2c)}}.$$

Câu 59. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1344}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\frac{2016}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Câu 60. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3}}.$$

Câu 61. Cho a, b, c là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

Câu 62. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2(a+b+c).$$

Câu 63. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} + \frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} + \frac{(c+\sqrt{a})^2}{\sqrt{c^2-ca+a^2}} \leqslant 12.$$

Câu 64. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} \geqslant 4\left(\frac{1}{x+7} + \frac{1}{y+7} + \frac{1}{z+7}\right).$$

Câu 65. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \geqslant 6 \geqslant \frac{8}{a^2+b^2+2} + \frac{8}{b^2+c^2+2} + \frac{8}{c^2+a^2+2}.$$

Câu 66. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{\sqrt{bc}+1} + \frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{\sqrt{ca}+1}.$$

Câu 67. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+b)^3} + \frac{1}{(1+c)^3} + \frac{3}{32}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{21}{32}.$$

Câu 68. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2xy+yz+zx)^2} + \frac{1}{(xy+2yz+zx)^2} + \frac{1}{(xy+yz+2zx)^2} \leqslant \frac{1}{16x^2y^2z^2}.$$

Câu 69. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{a+4b+4c}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4a+b+4c}} < 2.$$

Câu 70. Cho x, y, z là các số thực phân biệt và không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \geqslant \frac{9}{x+y+z}.$$

Câu 71. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x > y > z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{8}{xz} + \frac{2}{y^3}.$$

Câu 72. Cho a, b là hai số thực dương thoả mãn $2\left(a^2+b^2\right) + ab = (a+b)(ab+2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Câu 73. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{4c}{c+1}$$

Câu 74. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}.$$

Câu 75. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=\frac{a^3}{b^2+3}+\frac{b^3}{c^2+3}+\frac{c^3}{a^2+3}.$$

Câu 76. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x, y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^5y+xy^5+\frac{6}{x^2+y^2}-3(x+y).$$

Câu 77. Với các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2\mathrm{a}+b+\sqrt{8bc}}-\frac{8}{\sqrt{2b^2+2(a+c)^2+5}}.$$

Câu 78. Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(a^2c+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b\right)(a+b+c).$$

Câu 79. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2\left(x^4+y^4\right)=x^4y^4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{y^2+1}+\frac{y^2}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4+1}}.$$

Câu 80. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geqslant 2.$$

Câu 81. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3\leqslant\sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right).$$

Câu 82. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=a^2b^2c^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 83. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(a+1)+ab(ab+1)}+\frac{1}{b(b+1)+bc(bc+1)}+\frac{1}{c(c+1)+ca(ca+1)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Câu 84. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{a(b+c)}}+\sqrt{\frac{b^2+ca}{b(c+a)}}+\sqrt{\frac{c^2+ab}{c(a+b)}}+\sqrt{\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geqslant 4.$$

Câu 85. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+5}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+5}{c^3(a+b)}\geqslant 9.$$

Câu 86. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z\leqslant 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{\sqrt{x^2y^2+1}}{y}+\frac{\sqrt{y^2z^2+1}}{z}+\frac{\sqrt{z^2x^2+1}}{x}.$$

Câu 87. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geqslant(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tài liệu

[1] Art Of Problem Solving.

[2] Khám phá tư duy, kỹ thuật giải bất đẳng thức, Đặng Thành Nam.

[3] Phương pháp PQR, Võ Thành Văn.

[4] The Secrets in Inequalities, Pham Kim Hung.

[5] Mathematical Inequalities, Vasile Cîrtoaje.

[6] Hội thảo các chuyên đề HSG các tỉnh từ năm 2014-2019.

[7] Một số bài khác từ VMF.