

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN NGỌC DIỆP

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH
HÀM

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã Số: 60 46 40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2014

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN NGỌC DIỆP

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH
HÀM

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60 46 40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **TS. Phạm Văn Quốc**

Hà Nội - 2014

Mục lục

Lời nói đầu	3
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị	5
1.1. Hàm số liên tục.....	5
1.1.1. Định nghĩa về hàm số liên tục.....	5
1.1.2. Tính chất của hàm số liên tục.....	6
1.2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ.....	7
1.3. Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn	7
1.4. Tính đơn điệu của hàm số	8
1.5. Tính chất ánh xạ của hàm số	8
Chương 2. Một số phương trình hàm cơ bản	10
2.1. Phương trình hàm Cauchy.....	10
2.2. Phương trình hàm Jensen	17
2.3. Vận dụng phương trình hàm cơ bản vào giải toán.....	20
Chương 3. Một số phương pháp giải phương trình hàm	39
3.1. Phương pháp thế.....	39
3.2. Sử dụng tính liên tục.....	56
3.3. Sử dụng tính đơn ánh, toàn ánh và song ánh	62
3.4. Sử dụng tính đơn điệu.....	84
3.5. Sử dụng tính chất điểm bất động.....	97
3.6. Đưa về phương trình sai phân	103
3.7. Các bài tập tổng hợp.....	108
3.8. Phương trình hàm trên tập số tự nhiên	117

Kết luận	123
Tài liệu tham khảo	124

LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình hàm là một trong những lĩnh vực hay và khó của toán sơ cấp. Trong các kì thi Olympic Toán học Quốc gia, Khu vực và Quốc tế thường xuyên xuất hiện các bài toán phương trình hàm. Các bài toán này thường là khó, đôi khi rất khó. Để giải các bài toán đó trước tiên ta phải nắm vững các tính chất cơ bản về hàm số, một số phương trình hàm cơ bản, các phương pháp giải và có sự vận dụng thích hợp. Với mong muốn có thể tiếp cận được với các bài toán trong các kì thi Olympic Toán, luận văn sẽ đi theo hướng trên. Cụ thể, luận văn chia làm ba chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trình bày về những kiến thức cơ bản được dùng trong các chương sau như: Hàm số liên tục, hàm số chẵn và hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn và hàm số phản tuần hoàn, tính đơn điệu của hàm số, tính chất ánh xạ của hàm số.

Chương 2. Một số phương trình hàm cơ bản

Trình bày về một số phương trình hàm cơ bản như: phương trình hàm Cauchy, phương trình hàm Jensen và những ứng dụng của chúng trong việc giải toán.

Chương 3. Một số phương pháp giải phương trình hàm

Trình bày một số phương pháp giải phương trình hàm thông dụng. Ở mỗi phương pháp bắt đầu bằng phương pháp giải, sau đó là các bài toán, cuối cùng là các bài toán vận dụng.

Để hoàn thành luận văn, trước hết tôi xin chân thành cảm ơn sâu sắc tới TS Phạm Văn Quốc đã dành thời gian hướng dẫn, đánh giá, chỉ bảo, tận tình giúp đỡ trong quá trình xây dựng đề tài cũng như hoàn thiện luận văn. Qua đây, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô, các anh chị học viên cao học khóa 2009-2011, Ban giám hiệu, Phòng sau đại học, Khoa Toán-Cơ- Tin học trường địa học Khoa học Tự nhiên Hà Nội đã tạo điều kiện, giúp đỡ trong suốt quá trình hoàn thành khóa học.

Tuy đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian có hạn và khả năng còn hạn chế nên các vấn đề trình bày trong luận văn còn chưa được trình bày sâu sắc và không thể tránh khỏi những sai sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý xây dựng của thầy cô cùng các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 01 tháng 10 năm 2014

Học viên

Nguyễn Ngọc Diệp

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng ta chỉ trình bày các định nghĩa, tính chất cơ bản liên quan đến hàm số phục vụ cho các bài toán được trình bày trong các chương sau. Ta quan tâm tới các hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ và tập giá trị $R(f) \subseteq \mathbb{R}$.

1.1. Hàm số liên tục

1.1.1. Định nghĩa về hàm số liên tục

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trong $(a, b) \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in (a, b)$. Ta nói rằng hàm số liên tục tại x_0 nếu với mọi dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in (a, b)$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ta đều có $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Định nghĩa này tương đương với định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1.2. Hàm số $f(x)$, xác định trong (a, b) , được gọi là liên tục tại $x_0 \in (a, b)$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Điều này có nghĩa là: với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $x \in (a, b)$ thỏa mãn $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Hàm số không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0 .

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử hàm số f xác định trên một tập J , tập J có thể là một khoảng hoặc hợp của các khoảng thuộc $\mathbb{R}$. Ta nói hàm số f liên tục trên J

nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc J .

Định nghĩa 1.1.4. Hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ được gọi là liên tục trên $[a, b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và liên tục phải tại a , liên tục trái tại b .

1.1.2. Tính chất của hàm số liên tục

Ở mục trên, ta đã có các cách xác định một hàm số liên tục. Tuy nhiên việc sử dụng các định nghĩa đó không phải lúc nào cũng đơn giản. Do vậy, người ta đã chứng minh được các tính chất rất hữu ích, giúp ta xác định nhanh các hàm liên tục, như sau:

1. Các hàm sơ cấp cơ bản như: hàm lũy thừa, hàm căn thức, hàm lượng giác, hàm logarit ... liên tục trên miền xác định của chúng.
2. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm liên tục trên $D \subseteq \mathbb{R}$. Khi đó $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ cũng là các hàm liên tục trên D .
3. Giả sử $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, khi đó $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng là hàm liên tục. Trong trường hợp ngược lại, nó liên tục trên tập xác định của nó.

Một số tính chất khác của hàm số liên tục:

Định lý 1.1.5. (Định lý về giá trị trung gian).

Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mọi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ đều tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = M$.

Mệnh đề 1.1.6. *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ thì $f(x) \equiv g(x)$ trên $\mathbb{R}$.*

Chứng minh. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, ta xét dãy số hữu tỷ s_n , $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = x$. Do $f(r) = g(r)$ với mọi $r \in \mathbb{Q}$ nên $f(s_n) = g(s_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Lấy giới hạn hai vế khi $n \rightarrow +\infty$, chú ý $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm liên tục, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(s_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(s_n) \Rightarrow f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n\right) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n\right) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Với $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ ta có $f(x) = g(x)$. Hay là $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Nhận xét 1.1.7. Trong mệnh đề trên ta có thể thay giả thiết $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ bằng giả thiết $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in A$, trong đó A là tập hợp trù mật trong $\mathbb{R}$ bất kỳ. Với định nghĩa về tập hợp trù mật như sau.

Định nghĩa 1.1.8. Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ được gọi là tập trù mật trong $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y$ thì đều tồn tại $a \in A$ sao cho $x < a < y$.

Ví dụ 1.1.9. 1. $\mathbb{Q}$ là tập trù mật trong $\mathbb{R}$.

2. Giả sử $2 \leq p \in \mathbb{N}$. Tập $A = \left\{ \frac{m}{p^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

1.2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa 1.2.1. Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ và tập giá trị $R(f) \subseteq \mathbb{R}$. Khi đó

- i) $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên $M \subseteq D(f)$ nếu $\forall x \in M \Rightarrow -x \in M$ và $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in M$.
- ii) $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên $M \subseteq D(f)$ nếu $\forall x \in M \Rightarrow -x \in M$ và $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in M$.

1.3. Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn

Định nghĩa 1.3.1. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ $a, a > 0$ trên $M, M \subseteq D(f)$ nếu với mọi $x \in M$ thì ta có $x \pm a \in M$ và $f(x + a) = f(x)$ với mọi $x \in M$. Số thực $T > 0$ nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn $f(x + T) = f(x)$ với mọi $x \in M$ được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm số tuần hoàn $f(x)$.

Định nghĩa 1.3.2. Hàm số $f(x)$ được gọi là phản tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ $b, b > 0$ trên $M \subseteq D(f)$ nếu với mọi $x \in M$ thì ta có $x \pm b \in M$ và $f(x + b) = -f(x)$ với mọi $x \in M$.

Ví dụ 1.3.3. (IMO 1968) Cho số thực a . Giả sử hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm tuần hoàn. Lấy ví dụ hàm f trong trường hợp $a = 1$.

Giải. Giả sử f là hàm cần tìm. Ta thấy rằng $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $f(x) - \frac{1}{2} = g(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và ta có

$$g(x+a) = \sqrt{\frac{1}{4} - [g(x)]^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hay là $[g(x+a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x)]^2$. Suy ra

$$[g(x+2a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x+a)]^2 = [g(x)]^2 \Rightarrow g(x+2a) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(x+2a) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Với $a = 1$ dễ dàng kiểm chứng hàm $f(x) = \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi}{2} x \right| + \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

1.4. Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa 1.4.1. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $I \in D(f)$, ở đây ta chỉ xét I là một khoảng, nửa khoảng hay đoạn thực. Khi đó, hàm số $f(x)$ được gọi là không giảm (hoặc không tăng) trên $I \subseteq D(f)$ nếu với mọi $a, b \in I$ thì $f(a) \geq f(b) \Leftrightarrow a \geq b$ (tương ứng $f(a) \geq f(b) \Leftrightarrow a \leq b$).

Định nghĩa 1.4.2. Hàm số $f(x)$ được gọi là đồng biến (đơn điệu tăng) trên $I \subseteq D(f)$ nếu với mọi $a, b \in I$ ta có $f(a) > f(b) \Leftrightarrow a > b$.

Định nghĩa 1.4.3. Hàm số $f(x)$ được gọi là nghịch biến (đơn điệu giảm) trên $I \subseteq D(f)$ nếu với mọi $a, b \in I$ ta có $f(a) > f(b) \Leftrightarrow a < b$.

1.5. Tính chất ánh xạ của hàm số

Giả sử $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$. Xét hàm số $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, ta có các định nghĩa sau :

Định nghĩa 1.5.1. Hàm số $f(x)$ được gọi là đơn ánh trên X nếu với mọi $a, b \in X$ thì $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Định nghĩa 1.5.2. Hàm số $f(x)$ được gọi là toàn ánh từ X vào Y nếu với mọi $y \in Y$ thì tồn tại $x \in X$ thỏa mãn $f(x) = y$.

Định nghĩa 1.5.3. Hàm số $f(x)$ được gọi là song ánh từ X vào Y nếu nó vừa là đơn ánh trên X vừa là toàn ánh từ X vào Y .

Định nghĩa 1.5.4. Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh. Khi đó, ta có thể định nghĩa hàm số $f^{-1} : Y \rightarrow X$ như sau: với mỗi $y \in Y$ thì $f^{-1}(y) = x$ khi và chỉ khi x là phần tử duy nhất của X thỏa mãn $f(x) = y$. Ta gọi f^{-1} là hàm số ngược của f . Có thể thấy rằng f^{-1} là song ánh từ Y vào X .

Chương 2

Một số phương trình hàm cơ bản

2.1. Phương trình hàm Cauchy

Bài toán 2.1.1. (Phương trình hàm Cauchy)

Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Lời giải. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, từ (2.1) ta suy ra $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$, trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tùy ý. Lấy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ ta được

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (i)$$

Đặc biệt, khi ta lấy $x = 1$ thì ta có $f(n) = nf(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Trong (i), thay $x = \frac{1}{n}$, ta có

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \text{ hay } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó, với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$ ta có $f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$. Điều này có nghĩa là

$$f(x) = xf(1), \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+. \quad (ii)$$

Trong (2.1) thay $x = y = 0$, ta có $2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Khi đó, thay $y = -x$ ta có $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ nên $f(-x) = -f(x)$ hay $f(x)$ là hàm lẻ. Do đó từ (ii) dẫn đến $f(x) = xf(1)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Nhưng $f(x)$ và $xf(1)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên theo Mệnh đề 1.1.6 ta suy ra $f(x) = xf(1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $f(1) = a$, thế thì $f(x) = ax$, hàm này thỏa mãn bài toán.

Vậy nghiệm của bài toán phương trình hàm Cauchy là $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Nhận xét 2.1.2. 1. Với điều kiện (2.1), ta chỉ cần giả thiết $f(x)$ liên tục tại một điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ cho trước, khi đó $f(x)$ sẽ liên tục trên $\mathbb{R}$. Thật vậy, theo giả thiết thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Với mỗi $x_1 \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x) = f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_1} \{f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_1} \{f(x - x_1 + x_0)\} + f(x_1) - f(x_0) \\ &= f(x_0) + f(x_1) - f(x_0) = f(x_1). \end{aligned}$$

Do $x_1 \in \mathbb{R}$ bất kỳ nên f liên tục trên $\mathbb{R}$.

2. Từ lời giải ta nhận thấy rằng nếu thiếu giả thiết hàm $f(x)$ liên tục thì hàm $f(x)$ chỉ thỏa mãn (2.1) là $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, trong đó a tùy ý.

3. Từ bài toán phương trình hàm Cauchy ta có thể thấy rằng, hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

vẫn chỉ là hàm $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

4. Kết quả của bài toán phương trình hàm Cauchy sẽ không thay đổi nếu ta thay $\mathbb{R}$ bằng $[0, +\infty)$ hoặc $(-\infty, 0]$.

Các hàm f thỏa mãn tính chất (2.1) được gọi là hàm cộng tính, hay thỏa mãn phương trình hàm Cauchy (theo một số tài liệu). Để có thể xác định hoàn toàn hàm cộng tính f trên $\mathbb{R}$, ta có thể thay giả thiết f liên tục trên $\mathbb{R}$ hay chỉ tại một điểm, bằng một trong các giả thiết: f là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$; $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$, hay f bị chặn trên một đoạn nào đó, ...

Vì tính quan trọng của lớp bài toán phương trình hàm Cauchy, ta sẽ đi tìm hiểu các bài toán này.

Bài toán 2.1.3. Xác định hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình (2.1).

Lời giải. Ta đã biết $f(x)$ thỏa mãn (2.1) thì $f(r) = ar$ với mọi $r \in \mathbb{R}$, với $a = f(1) \in \mathbb{R}$ tùy ý. Ta sẽ chỉ ra rằng nếu f đơn điệu thì $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta đi chứng minh cho trường hợp f không giảm, trường hợp f không tăng tương tự.

Giả sử f không giảm trên $\mathbb{R}$. Khi đó, $a = f(1) \geq f(0) = 0$.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ, xét hai dãy số hữu tỷ s_n giảm và q_n tăng cùng có giới hạn là x . Khi đó $f(s_n) = as_n$ và $f(q_n) = aq_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, f không giảm trên $\mathbb{R}$, nên $as_n \geq f(s_n) \geq f(x) \geq f(q_n) = aq_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lấy giới hạn hai vế khi $n \rightarrow +\infty$ ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} as_n \geq f(x) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} aq_n \Rightarrow ax \geq f(x) \geq ax.$$

Vậy $f(x) = ax$, nhưng $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ nên $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét 2.1.4. Tuy từ giả thiết f đơn điệu trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn (2.1), ta cũng có thể suy ra f liên tục tại $x = 0$, từ đó suy ra $f(x) = xf(1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nhưng cách làm trên khá ngắn gọn và rõ ràng độc lập hơn là nếu qui về tính liên tục của f . Ngoài ra, đây cũng là kết quả nền tảng của các bài toán về lớp phương trình hàm vừa cộng tính vừa đơn điệu.

Nếu thay giả thiết f đơn điệu bởi $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$, kết hợp f thỏa mãn (2.1) thì ta suy ra f là hàm không giảm trên $\mathbb{R}$, do đó $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, với $a \geq 0$. Đặc biệt, nếu $f(x^{2n}) = [f(x)]^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta sẽ suy ra được $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Còn trường hợp $f(x) \leq 0$ với mọi $x \geq 0$ thì ta sẽ suy ra hàm f không tăng trên $\mathbb{R}$, và từ đó $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, với $a \leq 0$.

Bài toán 2.1.5. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn (2.1) và bị chặn trên đoạn $[c, d]$ với $c < d$ bất kỳ.

Lời giải. Giả sử f là hàm thỏa mãn bài toán. Do f thỏa mãn (2.1) nên $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ với $a = f(1)$. Ta chỉ ra điều này cũng đúng khi $x \in \mathbb{R}$, nghĩa là $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thực vậy, lấy $x \in \mathbb{R}$ bất kì. Khi đó với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $r_n \in \mathbb{Q}$, phụ thuộc vào n và x , sao cho $nx - d \leq r_n \leq nx - c$, khi đó $f(nx - r_n)$ bị chặn do $c \leq nx - r_n \leq d$. Ta có

$$\begin{aligned} |f(nx - r_n)| &= |f(nx) - f(-r_n)| = |nf(x) - ar_n| \\ &= |n(f(x) - ax) + a(nx - r_n)| \geq n|f(x) - ax| - |a(nx - r_n)|. \end{aligned}$$

Suy ra $|f(nx - r_n)| + |a(nx - r_n)| \geq n|f(x) - ax|$. Nhưng $|a(nx - r_n)| \leq \max\{|ac|, |ad|\}$, và $f(nx - r_n)$ bị chặn với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nên $n|f(x) - ax|$ cũng bị chặn với mọi $n \in \mathbb{N}$. Điều này chỉ xảy ra khi $f(x) - ax = 0$. Vậy $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Ở trên, ta đã tìm hiểu bài toán phương trình hàm Cauchy trong các trường hợp khác nhau của hàm số $f(x)$. Tiếp theo ta sẽ trình bày một số dạng cơ bản khác của phương trình hàm Cauchy.

Bài toán 2.1.6. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Lời giải. Ta thấy rằng $f(x) \equiv 0$ là nghiệm của bài toán (2.2).

Xét trường hợp $f(x)$ không đồng nhất bằng 0. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ mà $f(x_0) \neq 0$. Theo (2.2) thì $f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = f(x)f(x_0 - x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $\ln f(x) = g(x)$. Khi đó $g(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(x + y) = \ln f(x + y) = \ln[f(x)f(y)] = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Theo bài toán phương trình hàm Cauchy thì $g(x) = bx$, $b \in \mathbb{R}$ tùy ý. Hay $f(x) = e^{bx} = a^x$ với $a > 0$ tùy ý. Thử lại, hàm này thỏa mãn bài toán. $\square$

Bài toán 2.1.7. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.3)$$

Lời giải. Thay $x = 1$ vào phương trình (2.3) ta được $f(x)(1 - f(1)) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $f(1) \neq 1$ thì ta có $f(x) \equiv 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nghiệm này thỏa mãn bài toán.

Xét $f(1) = 1$. Khi đó

$$f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vậy $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do đó $f(x^2) = f(x)f(x) = [f(x)]^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Xét $x, y \in \mathbb{R}^+$. Đặt $x = e^u, y = e^v$ và $f(e^t) = g(t)$. Khi đó $g(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(u+v) = g(u)g(v)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Theo bài toán trên thì $g(t) = a^t$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ tùy ý, và do đó $f(x) = f(e^u) = g(u) = a^u = a^{\ln x} = x^{\ln a} = x^\alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$, trong đó $\alpha = \ln a$.

b) Khi $x, y \in \mathbb{R}^-$ thì $xy \in \mathbb{R}^+$. Với $y = x$, thì từ (2.3) và kết quả phần a), ta có $[f(x)]^2 = f(x^2) = (x^2)^\alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}^-$, $\alpha \in \mathbb{R}$ xác định ở trên. Do $f(x) \neq 0$ với mọi $x \neq 0$ và $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^-$, nên

$$f(x) = |x|^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^- \text{ hoặc } -|x|^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-.$$

Kết hợp a) và b) và thử lại các kết quả ta có kết luận : Nghiệm của (2.3) là một trong các hàm số sau

1. $f(x) \equiv 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. $f(x) = |x|^\alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý.
3.
$$\begin{cases} |x|^\alpha, & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ -|x|^\alpha, & \forall x \in \mathbb{R}^-, \alpha \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Bài toán 2.1.8. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.4)$$

Lời giải. a) Trước hết xét $x, y \in \mathbb{R}^+$. Đặt $x = e^u, y = e^v, f(e^t) = g(t)$. Khi đó (2.4) trở thành

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra, $g(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nên theo bài toán phương trình hàm Cauchy, ta có $g(t) = at$. Do đó $f(x) = a \ln x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$ tùy ý.

b) Khi $x, y \in \mathbb{R}^-$ thì $xy \in \mathbb{R}^+$. Với $y = x$, từ (2.4) và kết quả phần a) ta có

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x^2) = \frac{1}{2}a \ln(x^2) = a \ln|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

với a xác định ở trên.

Như vậy, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(x) = a \ln|x|$ với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý. Hàm này thỏa mãn bài toán. Vậy nghiệm của bài toán là $f(x) = a \ln|x|$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Bài toán 2.1.9. (Phương trình hàm Pexider)

Tìm tất cả các hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Thay $y = 0$ và đặt $h(0) = c$ thì ta có $f(x) = g(x) + c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Còn thay $x = 0$ và đặt $g(0) = b$ ta có $f(y) = h(y) + b$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Từ đó thay vào điều kiện ta thu được

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - b - c, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bằng cách đặt $f(z) - b - c = k(z)$ với mọi $z \in \mathbb{R}$ thì ta có

$$k(x+y) = k(x) + k(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra, ta cũng thấy rằng do $f(x)$ liên tục nên $k(x)$ liên tục. Do vậy, theo bài toán phương trình hàm Cauchy thì ta có $k(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ tùy ý. Suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$f(x) = ax + b + c, \quad g(x) = ax + b, \quad h(x) = ax + c, \quad \text{với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Thử lại, ta thấy rằng các hàm số này thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Ta thấy rằng có thể có thêm những bài toán “dạng phương trình hàm Pexider”, ứng với các dạng cơ bản của phương trình hàm Cauchy. Tuy nhiên, điều kiện của các hàm số có thể đòi hỏi nhiều hơn. Ta lấy ví dụ đơn giản như: Tìm các hàm $f(x), g(x), h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = g(x)h(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ta đi xét một vài ví dụ đơn giản, áp dụng khá trực tiếp phương trình hàm Cauchy trong các trường hợp khác nhau của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 2.1.10. (Olympic sinh viên 2010)

Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(1) = 2010$ và

$$f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Đặt $2010^{-x} f(x) = g(x)$. Khi đó, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây dẫn đến $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. Do đó, $f(x) = ax2010^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mà $f(1) = 2010$, suy ra $a = 1$. Nên $f(x) = x2010^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy đây là nghiệm của bài toán.

Ví dụ 2.1.11. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

- i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,
- ii) $f(xy) = f(x)f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Trong ii) lấy $y = x$, ta có $f(x^2) = [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Trong i) ta xét với $y \geq 0$, ta có $f(x+y) = f(x) + f(y) \geq f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Như vậy, f cộng tính và đồng biến nên $f(x) = ax$, $a \geq 0$. Nhưng $f(x^2) = [f(x)]^2$ nên $a = 0$ hoặc $a = 1$. Suy ra $f(x) \equiv 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) \equiv x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy đây là hai nghiệm của bài toán.

Nhận xét. Từ bài toán nếu ta thay giả thiết ii) bằng giả thiết $f(x^{2n}) = [f(x)]^{2n}$ hay $f(x^n) = x^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}^*$ thì nghiệm của bài toán vẫn là $f(x) \equiv 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) \equiv x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.1.12. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện $f(xy) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y > 0$.

Lời giải. Với $x, y > 0$ ta có thể đặt $x = e^u$, $y = e^v$. Và đặt $f(e^t) = g(t)$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Khi đó, $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(u+v) = g(u) + g(v)$ với mọi $u, v \in \mathbb{R}$. Do đó $g(x) = ax$, $a > 0$. Nên $f(x) = f(e^u) = g(u) = au = a \ln x$ với mọi $x > 0$, với $a > 0$.

Ví dụ 2.1.13. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ đồng biến thỏa mãn $f(x+y) = f(x)f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Vì $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có thể đặt $g(x) = \ln f(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do $f(x)$ đồng biến nên $g(x)$ cũng đồng biến. Ngoài ra từ phương trình điều

kiện, ta có

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y) \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó $g(x) = ax$, $a > 0$. Suy ra $f(x) = e^{ax} = c^x$ với $c = e^a > 0$ tùy ý.

Ví dụ 2.1.14. Xác định hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

i) $f(xy) = f(x)f(y)$ với mọi $x, y > 0$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Lời giải. Với mọi $x > 0$, ta có $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = [f(\sqrt{x})]^2 \geq 0$. Nếu tồn tại $x_0 > 0$ mà $f(x_0) = 0$ thì

$$f(x) = f\left(x_0 \cdot \frac{x}{x_0}\right) = f(x_0) \cdot f\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0, \quad \forall x > 0.$$

Điều này mâu thuẫn với ii). Nên $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Từ i) dễ suy ra $f(1) = 1$. Do đó $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. Ta chỉ ra $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$. Thật vậy, với bất kỳ $x_0 > 0$ ta có

$$\lim_{y \rightarrow 1} [f(yx_0) - f(x_0)] = \lim_{y \rightarrow 1} [f(x_0)f(y) - f(x_0)] = f(x_0) \lim_{y \rightarrow 1} [f(y) - 1] = 0.$$

Điều này chỉ ra $f(x)$ liên tục tại $x_0 > 0$ bất kỳ. Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$. Đặt $g(x) = \ln f(x)$, thì $g(x)$ liên tục và $g(xy) = \ln f(xy) = \ln f(x)f(y) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y)$ với mọi $x, y > 0$. Từ đây suy ra $g(x) = a \ln x$ với mọi $x > 0 \Rightarrow f(x) = e^{g(x)} = e^{a \ln x} = x^a$ với mọi $x > 0$. Thử lại, ta đi đến kết luận nghiệm của bài toán là $f(x) = x^a$ với mọi $x > 0$ với $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

2.2. Phương trình hàm Jensen

Bài toán 2.2.1. (Phương trình hàm Jensen) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Đặt $f(x) - f(0) = g(x)$. Ta có $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với $g(0) = 0$ và

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lần lượt cho $y = 0$ và $x = 0$ ta suy ra $g(x/2) = g(x)/2$, $g(y/2) = g(y)/2$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ suy ra $g(x+y) = g(x) + g(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Mà $g(x)$ là hàm liên tục nên theo bài toán phương trình hàm Cauchy, ta có $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) = ax + b$. Thử lại, ta đi đến kết luận nghiệm của bài toán phương trình hàm Jensen là

$$f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Nhận xét. Ta có một hướng mở rộng của bài toán như sau: Tìm hàm $f(x)$ liên tục thỏa mãn

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Nghiệm của bài toán này vẫn là nghiệm của bài toán phương trình hàm Jensen.

Bây giờ, ta sẽ thử thay đổi hệ số của các biến trong bài toán phương trình hàm Jensen, và đi tìm nghiệm của bài toán khi đó. Cụ thể ta có bài toán sau đây:

Bài toán 2.2.2. Cho $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Lời giải. Thay $x = y = 0$, ta có $f(0)[(a+b) - 1] = 0$. Xét các trường hợp sau:

- Nếu $a + b \neq 1$ thì $f(0) = 0$. Khi đó trong (2.5) lần lượt thay $y = 0, x = 0$ ta có

$$f(ax) = af(x), \quad f(by) = bf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (i)$$

Từ (2.5) và (i) suy ra $(2.5) \Leftrightarrow f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây do $a, b \neq 0$ nên ta có $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Mặt khác, $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên theo bài toán phương trình hàm Cauchy, ta có $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, với $c \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

- Nếu $a + b = 1$ thì $f(0)$ nhận giá trị tùy ý. Khi đó

$$(2.5) \Leftrightarrow f(ax + by) - f(0) = a[f(x) - f(0)] + b[f(y) - f(0)], \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

hay $g(ax + by) = g(ax) + g(by)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, trong đó $g(x) = f(x) - f(0)$, $g(0) = 0$. Khi đó tương tự phần trên ta có $g(x) = cx$. Suy ra $f(x) = cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Kết luận:

- Nếu $a + b \neq 1$ thì $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, với $c \in \mathbb{R}$ tùy ý.
- Nếu $a + b = 1$ thì $f(x) = cx + d$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, với $c, d \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Nhận xét. Ta hoàn toàn có thể giải tương tự bài toán mở rộng sau: Với $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n)$$

với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Từ bài toán trên, ta hoàn toàn giải được bài toán sau: Với $a, b \neq 0$, tìm hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x^ay^b) = [f(x)]^a[f(y)]^b, \quad \forall x, y > 0.$$

Một trong những ứng dụng quan trọng nhất của bài toán phương trình hàm Jensen, đó là giúp giải quyết bài toán phương trình hàm chuyển đổi giữa các đại lượng trung bình.

Bài toán 2.2.3. Với $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$, trong đó $a, b \neq 0$. Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(ax + by + c) = pf(x) + qf(y) + r, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Lời giải. Do $a, b \neq 0$ nên từ (2.6), bằng phép thế thích hợp, không khó để ta thấy rằng:

$$f(0) = pf\left(\frac{-c}{a}\right) + qf(0) + r,$$

$$f(u) = pf\left(\frac{u-c}{a}\right) + qf(0) + r, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

$$f(v) = pf\left(\frac{-c}{a}\right) + qf\left(\frac{v}{b}\right) + r, \quad \forall v \in \mathbb{R},$$

$$f(u+v) = pf\left(\frac{u-c}{a}\right) + qf\left(\frac{v}{b}\right) + r, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Từ bốn phương trình trên ta thấy rằng $f(u+v) + f(0) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$.

Bằng phép đặt $f(x) - f(0) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Theo bài toán PTH Cauchy thì $g(x) = sx$ với $s \in \mathbb{R}$ tùy ý. Suy ra $f(x) = sx + t, \forall x \in \mathbb{R}$, ở đây $t = f(0)$. Thay lại vào (2.6) ta có

$$\begin{aligned} s(ax + by + c) + t &= (spx + pt) + (sxy + qt) + r \\ \Leftrightarrow s(a - p)x + s(b - q)y + (sc + t - pt - qt - r) &= 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

• Xét trường hợp: hoặc $p \neq a$ hoặc $q \neq b$. Khi đó, suy ra $s = 0$ và $t - pt - qt = r$. Nên trong trường hợp này:

- Nếu $p + q = 1$ và $r \neq 0$ thì (2.6) vô nghiệm.
- Nếu $p + q = 1$ và $r = 0$ thì $s = 0$ và $t \in \mathbb{R}$ tùy ý. Như vậy $f(x) = t, \forall x \in \mathbb{R}$, với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý. Thử lại, hàm này thỏa mãn bài toán.
- Xét trường hợp $p = a$ và $q = b$. Khi đó, hai số s, t phải thỏa mãn

$$sc + t - at - bta - r = 0.$$

- Nếu $c = a + b - 1 = r = 0$ thì $s, t \in \mathbb{R}$ tùy ý. Đây là trường hợp mở rộng bài toán PTH Jensen đã xét ở trên. Và $f(x) = sx + t, \forall x \in \mathbb{R}$, với $s, t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

- Nếu $c = a + b - 1 = 0, r \neq 0$ thì (2.6) vô nghiệm.
- Nếu $c \neq 0, a + b = 1$ thì $t \in \mathbb{R}$ tùy ý, $s = \frac{r}{c}$. Và $f(x) = \frac{r}{c}x + t, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $c \neq 0, a + b \neq 1$ thì $s \in \mathbb{R}$ tùy ý, $t = \frac{sc - r}{a + b - 1}$. Nghiệm của bài toán là

$$f(x) = sx + \frac{sc - r}{a + b - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{với } s \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Đến đây, ta đã giải xong bài toán với tất cả các trường hợp.

Nhận xét. Ta thấy rằng, đối với bài toán tổng quát này thì bài toán PTH Cauchy vẫn đóng vai trò quan trọng nhất. Trường hợp: $a = 0$ hoặc $b = 0$ bài toán sẽ chuyển sang hướng khác.

2.3. Vận dụng phương trình hàm cơ bản vào giải toán

Trong phần này, ta quan tâm nhiều đến các bài toán vận dụng phương trình hàm (PTH) Cauchy trong các lớp hàm liên tục, đơn điệu và một số áp dụng

các kết quả nhận xét; đồng thời ta cũng xét đến một số bài toán tương tự cùng với mở rộng của nó.

Bài toán 2.3.1. (IMO 1979, Shortlist) Cho hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, thỏa mãn với hai số thực bất kì x, y ta có $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$. Chứng minh rằng

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Cho $x = y = 0$ ta có $f(0) = 0$. Cho $y = -1$ ta suy ra $f(-x) = -f(x)$. Lấy $y = 1$ ta có $f(2x + 1) = 2f(x) + 1$. Vì vậy

$$f(2(uv + u + v) + 1) = 2f(uv + u + v) + 1 = 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + 1, \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} f(2(uv + u + v) + 1) &= f(u(2v + 1) + u + (2v + 1)) = \\ &= f(u(2v + 1)) + f(u) + f(2v + 1) = f(2uv + u) + f(u) + 2f(v) + 1, \forall u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do đó $2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + 1 = f(2uv + u) + f(u) + 2f(v) + 1, \forall u, v \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$f(2uv + u) = 2f(uv) + f(u), \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Ở đây, cho $v = \frac{-1}{2}$ ta có $0 = f(0) = 2f(\frac{-u}{2}) + f(u), \forall u \in \mathbb{R}$. Do f là hàm lẻ nên

$$f(u) = -2f(-u/2) \Rightarrow f(u) = 2f(u/2) \Rightarrow f(2u) = 2f(u), \forall u \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $f(2uv + u) = 2f(uv) + f(u) = f(2uv) + f(u), \forall u, v \in \mathbb{R}$. Hay là

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây, bài toán được chứng minh !

Nhận xét. Ta có thể dễ thấy rằng nếu hàm f thỏa mãn $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, thì nó cũng thỏa mãn $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Như vậy ta có 2 khẳng định sau tương đương: " f là hàm cộng tính" và "hàm f thỏa mãn $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$."

Bài toán 2.3.2. (THTT - T7/2010) Xác định hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = 2y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Cho $x = 0$ ta có $f(f(y)) = 2y + f(0)$. Từ đây dễ thấy f là đơn ánh trên $\mathbb{R}$. Khi đó, với $x = y = 0$ ta có $f(f(0)) = f(0)$ nên $f(0) = 0$. Do đó $f(f(y)) = 2y, \forall y \in \mathbb{R}$ và $2f(y) = f(f(f(y))) = f(2y)$. Từ đó thay y bởi $f(y)$ trong phương trình điều kiện ta được

$$f(x + 2y) = f(x + f(f(y))) = 2f(y) + f(x) = f(2y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hay là $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Lại có f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp $f(f(y)) = 2y$ cho ta $c = \pm\sqrt{2}$. Thử lại, ta đi đến kết luận

$$f(x) = \sqrt{2}x, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{hoặc} \quad f(x) = -\sqrt{2}x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Ta có thể thay 2 bởi hằng số $k^2 \in \mathbb{R}$ bất kì. Khi đó, nghiệm của bài toán là $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -kx, \forall x \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên, nếu thay 2 bởi một hằng số $c < 0$ thì sẽ không tồn tại hàm f . Bạn đọc quan tâm thử tìm hiểu xem tại sao nhé !

Bài toán 2.3.3. Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) - y, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn bài toán. Cho $x = 0$ ta có $f(f(y)) = f(0) - y, \forall y \in \mathbb{Z}, (1)$. Từ đây, dễ thấy f là song ánh trên $\mathbb{Z}$. Thật vậy, trước tiên f là toàn ánh vì $\forall y \in \mathbb{Z}$ thì $f(f(f(0) - y)) = y$. Giả sử $f(y_1) = f(y_2)$ thì $f(0) - y_1 = f(f(y_1)) = f(f(y_2)) = f(0) - y_2$ suy ra $y_1 = y_2$, do đó f là đơn ánh. Vậy f là song ánh trên $\mathbb{Z}$. Từ (1) lấy $y = 0$ ta có $f(f(0)) = f(0)$, do f đơn ánh nên $f(0) = 0$. Suy ra $f(f(y)) = -y, \forall y \in \mathbb{Z}$. Do f toàn ánh trên $\mathbb{Z}$ nên với mọi $y \in \mathbb{Z}$ tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ mà $y = f(a)$, khi đó $f(y) = f(f(a)) = -a$. Từ đây, với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$ ta có

$$f(x + y) = f(x + f(a)) = f(x) - a = f(x) + f(y).$$

Theo bài toán PTH Cauchy ta suy ra $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{Z}$. Ta lại có $f(f(x)) = -x, \forall x \in \mathbb{Z}$ nên $c^2x = -x, \forall x \in \mathbb{Z}$ suy ra $c^2 = -1$, vô lý. Vậy giả sử tồn tại f thỏa mãn bài toán là sai. Hay nói cách khác không tồn tại f thỏa mãn bài toán (ĐPCM).

Bài toán 2.3.4. (VietNam 2006 - Bảng B) Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

$$f(x-y)f(y-z)f(z-x) + 8 = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Cho $x = t, y = 0, z = -t$ ta có $f(t)f(t)f(-2t) = -8$ suy ra $f(-2t) = \frac{-8}{[f(t)]^2} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Nên có thể đặt $\ln \frac{f(x)}{-2} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $f(x) = -2e^{g(x)}$ và g liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ phương trình điều kiện ta suy ra

$$g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Ở đây, cho $x = y = z = 0$ ta có $g(0) = 0$. Cho $y = z = 0$ suy ra $g(x) = g(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $g(x-y) + g(y-z) = -g(z-x) = g(x-z) = g((x-y) + (y-z)), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Hay là

$$g(u) + g(v) = g(u+v), \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra g liên tục nên $g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $f(x) = -2e^{ax} = -2(e^a)^x, \forall x \in \mathbb{R}$, với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý. Hay $f(x) = -2c^x, \forall x \in \mathbb{R}$, với $c > 0$ tùy ý.

Bài toán 2.3.5. (ĐH Vinh - 2010) Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(xy) - xy) + xf(y) + yf(x) = f(xy) + f(x)f(y), \forall x, y > 0.$$

Lời giải. Chọn $y = 1$ ta được $f(f(x) - x) + xf(1) + f(x) = f(x) + f(x)f(1), \forall x > 0$. Suy ra

$$f(f(x) - x) = f(1)[f(x) - x], \forall x > 0. \quad (i)$$

Phương trình điều kiện có thể viết lại thành

$$f(1)[f(xy) - xy] = f(xy) - xy + [f(x) - x][f(y) - y], \forall x, y > 0.$$

Đặt $f(x) - x = g(x), \forall x > 0$ ta được $f(1)g(xy) = g(xy) + g(x)g(y), \forall x, y > 0$ hay là

$$g(1)g(xy) = g(x)g(y), \forall x, y > 0. \quad (ii)$$

Do $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ nên từ (i) ta suy ra $f(x) > x, \forall x > 0$ và như vậy $g(x) > 0, \forall x > 0$.

Đặt $h(x) = \frac{g(x)}{g(1)}$. Khi đó $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và

$$h(xy) = h(x)h(y), \quad \forall x, y > 0.$$

Từ đây, theo dạng cơ bản của PTH Cauchy ta suy ra

$$h(x) = x^a \Rightarrow g(x) = cx^a, \quad \text{với } c > 0, a \text{ tùy ý.}$$

Cuối cùng $f(x) = x + g(x) = x + cx^a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{với } c > 0, a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$

Nhận xét: Hai bài toán khá căn bản. Điểm mấu chốt là đưa phương trình điều kiện về dạng cơ bản của PTH Cauchy.

Bài toán 2.3.6. (Italy 1999) a) Xác định hàm đơn điệu (thực sự) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (\text{a})$$

b) Chứng minh rằng, với $1 < n \in \mathbb{N}$, không tồn tại hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (\text{b})$$

Lời giải. a) Do f đơn điệu (thực sự) nên f đơn ánh. Lấy $x = y = 0$ ta có $f(f(0)) = f(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Lấy $x = 0$ ta được $f(f(y)) = y$. Từ (a) thay y bởi $f(y)$ ta có $f(x + f(f(y))) = f(x) + f(y)$, suy ra $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Vậy ta có f là hàm cộng tính và f đơn điệu, từ đó $f(x) = cx, \quad c = f(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay lại vào phương trình (a) ta suy ra $c^2 = 1 \iff c = \pm 1$. Khi đó, dễ thấy hai hàm $f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ chính là nghiệm của bài toán.

b) Tương tự như trên, ta cũng có f đơn ánh, $f(0) = 0$ và $f(f(y)) = y^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Bây giờ, ta xét 2 trường hợp với n :

- Nếu n chẵn. Khi đó, $f(f(-1)) = 1 = f(f(1))$, mâu thuẫn với tính đơn ánh của f . Như vậy, với n chẵn thì không tồn tại f thỏa mãn bài toán.

- Nếu n lẻ thì với mọi y tồn tại z sao cho $z^n = f(y)$, suy ra $f(f(z)) = z^n = f(y)$, do tính đơn ánh của f nên $f(z) = y$. Từ đó với mọi x, y ta có

$$f(x) + f(y) = f(x) + z^n = f(x + f(z)) = f(x + y).$$

Như vậy, ta lại có f cộng tính đồng thời f đơn điệu nên $f(x) = cx$. Suy ra $x^n = f(f(x)) = f(cx) = c^2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Thay $x = 1, 2$ ta có $c^2 = 1, \quad 2c^2 = 2^n$

suy ra $2^n = 2 \iff n = 1$, mâu thuẫn với giả thiết. Nên trường hợp n lẻ cũng không có nghiệm. Vậy ta có ĐPCM !

Ta xét một số mở rộng của bài toán Italy 1999 như sau.

Bài toán 2.3.7. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^{2n+1} + f(y)) = y + [f(x)]^{2n+1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (*)$$

ở đây, n là số tự nhiên bất kì.

Lời giải. Do f đơn điệu nên f đơn ánh. Lấy $x = 0$ ta có $f(f(y)) = y + [f(0)]^{2n+1}$ (1), nên dễ thấy f cũng là toàn ánh. Vậy f là song ánh. Khi đó tồn tại duy nhất a mà $f(a) = 0$. Đặt $f(0) = b$, khi đó trong (1) thay $y = a$ ta có $b = f(0) = a + b^{2n+1}$. Trong (*) lấy $x = a, y = 0$ ta có $f(a^{2n+1} + b) = 0 = f(a)$, do f đơn ánh nên $a = a^{2n+1} + b$. Như vậy, ta có hệ

$$a = a^{2n+1} + b \quad \text{và} \quad b = a + b^{2n+1}.$$

Dẫn đến $a^{2n+1} + b^{2n+1} = 0$ suy ra $a = -b$ và $2a = a^{2n+1}$, $2b = b^{2n+1}$.

Do f là toàn ánh trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại c sao cho $f(c) = a$. Khi đó, trong (1) thay $y = c$ ta có

$$0 = f(a) = f(f(c)) = c + b^{2n+1}.$$

Từ (1) lấy $y = 0$ ta có $f(b) = f(f(0)) = b^{2n+1}$. Trong (*) thay $x = c, y = b$ ta được

$$f(c^{2n+1} + b^{2n+1}) = b + [f(c)]^{2n+1} = b + a^{2n+1} = a = f(c),$$

do f đơn ánh nên $c^{2n+1} + b^{2n+1} = c$. Như vậy ta lại có hệ mới

$$c + b^{2n+1} = 0 \quad \text{và} \quad c^{2n+1} + b^{2n+1} = c.$$

Suy ra $c^{2n+1} = 2c$. Mặt khác ta lại có $2a = a^{2n+1}$, $2b = b^{2n+1}$ nên hoặc $c = a$ hoặc $c = b$. Nếu $c = a$ thì $a = f(a) = 0$ khi đó $f(0) = 0$; còn nếu $c = b$ thì $b + b^{2n+1} = 0$ suy ra $b = 0$ do đó $f(0) = 0$.

Như vậy, ta trong mọi trường hợp ta luôn có $f(0) = 0$, từ (1) suy ra $f(f(y)) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Trong (*) lấy $y = 0$ thì $f(x^{2n+1}) = [f(x)]^{2n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại $z \in \mathbb{R}$ mà $x = z^{2n+1}$, khi đó $f(x) = f(z^{2n+1}) = [f(z)]^{2n+1}$. Do đó với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x + y) = f(z^{2n+1} + f(f(y))) = f(y) + [f(z)]^{2n+1} = f(y) + f(x).$$

Hay f cộng tính trên $\mathbb{R}$. Mặt khác f đơn điệu nên $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây, kết hợp với phương trình $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$ ta suy ra $c = \pm 1$. Thử lại, ta đi đến kết luận

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{hoặc} \quad f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét. Việc vận dụng tính song ánh của f để tính $f(0) = 0$ là mấu chốt, việc còn lại đưa về PTH Cauchy trong lớp hàm đơn điệu là khá dễ dàng. Ta có bài toán mở rộng thứ 2 đơn giản hơn như sau.

Bài toán 2.3.8. Với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ đơn điệu thỏa mãn

$$f(x + [f(y)]^{2n+1}) = y^{2n+1} + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Lời giải. Tương tự, ta cũng có f là song ánh. Đặt $f(0) = b$ và giả sử $f(a) = 0$. Khi đó, trong $(**)$ thay $(x, y) = (0, a)$ ta có

$$b = f(0) = a^{2n+1} + b \Rightarrow a = 0.$$

Do đó $f(0) = 0$. Trong $(**)$ thay $x = 0$ ta có $f([f(y)]^{2n+1}) = y^{2n+1}, \forall y \in \mathbb{R}$. Với mọi $z \in \mathbb{R}$ tồn tại $y \in \mathbb{R}$ mà $z = [f(y)]^{2n+1}$, do f là toàn ánh. Khi đó $f(z) = f([f(y)]^{2n+1}) = y^{2n+1}$. Nên với mọi $x, z \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x + z) = f(x + [f(y)]^{2n+1}) = y^{2n+1} + f(x) = f(z) + f(x).$$

Nói cách khác, f là hàm cộng tính. Mặt khác f đơn điệu nên $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp $f([f(y)]^{2n+1}) = y^{2n+1}, \forall y \in \mathbb{R}$ ta sẽ suy ra $c = \pm 1$. Thử lại, ta đi đến kết luận

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{hoặc} \quad f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.3.9. (IMO - 1992) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = y + [f(x)]^2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Lấy $x = 0$ ta có $f(f(y)) = y + [f(0)]^2$, từ đây dễ thấy f là song ánh. Đặt $f(0) = b$ và giả sử $f(a) = 0$. Trong (1) thay $(x, y) = (0, a)$ ta có $b = f(0) = a + b^2$. Trong (1) thay $(x, y) = (a, 0)$ ta có $f(a^2 + b) = 0 = f(a)$, do f đơn ánh nên $a = a^2 + b$. Như vậy ta có hệ

$$a = a^2 + b \quad \text{và} \quad b = a + b^2.$$

Từ đây suy ra $a = b = 0$. Do đó $f(0) = 0$ và $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$. Bây giờ, trong (1) lấy $y = 0$ ta có

$$[f(x)]^2 = f(x^2) = f((-x)^2) = [f(-x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) = \pm f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Nhưng f đơn ánh nên $f(-x) = -f(x), \forall x \neq 0$, điều này cũng đúng khi $x = 0$. Do đó f là hàm lẻ. Với mọi $z \geq 0$ tồn tại x sao cho $z = x^2$, khi đó $f(z) = f(x^2) = [f(x)]^2$. Do vậy với mọi $z \geq 0, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(z + y) = f(x^2 + f(f(y))) = f(y) + [f(x)]^2 = f(y) + f(z).$$

Với $z \leq 0$ thì $-z \geq 0$. Theo khẳng định trên và chú ý f là hàm lẻ nên

$$f(z + y) = -f(-z - y) = -[f(-z) + f(-y)] = f(z) + f(y), \forall z \leq 0, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy với mọi $y, z \in \mathbb{R}$ ta đều có $f(z + y) = f(z) + f(y)$. Mặt khác $f(x^2) = [f(x)]^2$ nên $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. Dẫn đến $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$ với $c \geq 0$. Kết hợp $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$ ta suy ra $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hoàn toàn tương tự, ta có thể dễ dàng giải được các bài toán mở rộng sau.

Bài toán 2.3.10. Cho $\in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^{2n} + f(y)) = y + [f(x)]^{2n}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay đổi bài toán IMO 1992, ta có bài toán tương tự, nhưng phức tạp hơn như sau:

Bài toán 2.3.11. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + [f(y)]^2) = f(x) + y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Lời giải. Cho $x = 0$ ta được $f([f(y)]^2) = f(0) + y^2, \forall y \in \mathbb{R}$. Từ đây dễ thấy f là song ánh trên $\mathbb{R}^+$. Trong (2) cho $y = 0$ ta có $f(x + [f(0)]^2) = f(x), (i)$. Do f đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$ nên trong (i), ta xét với $x > 0$ ta suy ra $x + [f(0)]^2 = x, \forall x > 0$ dẫn đến $f(0) = 0$.

Từ đây ta có $f([f(y)]^2) = y^2, \forall y \in \mathbb{R}$. Do f toàn ánh từ $\mathbb{R}^+$ vào $[0, +\infty)$ nên với mọi $z \geq 0$ tồn tại y sao cho $z = [f(y)]^2$, khi đó $f(z) = f([f(y)]^2) = y^2$. Nên với mọi $z \geq 0, x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x + z) = f(x + [f(y)]^2) = f(x) + y^2 = f(x) + f(z).$$

Ta chỉ ra điều này cũng đúng khi $z \leq 0$. Bằng cách chỉ ra f là hàm lẻ. Thật vậy, ta có

$$f([f(y)]^2) = y^2 = f([f(-y)]^2), \forall y \in \mathbb{R},$$

nhưng f đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$ nên $[f(y)]^2 = [f(-y)]^2$, suy ra $f(-y) = \pm f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Giả sử tồn tại $a \neq 0$ mà $f(-a) = f(a)$, khi đó từ (2) ta suy ra

$$f(a + [f(y)]^2) = f(a) + y^2 = f(-a) + y^2 = f(-a + [f(y)]^2), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do f nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}^+$ nên ta tồn tại b mà $[f(b)]^2 > |a|$. Khi đó

$$a + [f(b)]^2 > 0 \quad \text{và} \quad -a + [f(b)]^2 > 0.$$

Mặt khác $f(a + [f(b)]^2) = f(-a + [f(b)]^2)$ và f đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$ nên

$$a + [f(b)]^2 = -a + [f(b)]^2 \Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả sử $a \neq 0$. Do đó $f(-y) = -f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Hay f là hàm lẻ. Khi đó với mọi $t \leq 0, x \in \mathbb{R}$ ta đặt $z = -t \geq 0$. Theo trên ta có

$$f(x+t) = -f(-x-t) = -f(-x+z) = -[f(-x)+f(z)] = f(x)-f(z) = f(x)+f(t).$$

Như vậy với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Thêm vào đó $f([f(y)]^2) = y^2$ và f toàn ánh trên $\mathbb{R}^+$, suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. Từ đó ta có $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy đây là nghiệm của bài toán.

Một cách tương tự, ta có thể giải được bài toán mở rộng sau:

Bài toán 2.3.12. Với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + [f(y)]^{2n}) = f(x) + y^{2n}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.3.13. (American Mathematical Monthly) Cho $1 < n \in \mathbb{N}$. Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y^n) = f(x) + [f(y)]^n, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Lời giải. Cho $x = y = 0$ suy ra $f(0) = 0$. Chỉ lấy $x = 0$ thì $f(y^n) = [f(y)]^n, \forall y \in \mathbb{R}$.

Với mọi $a \geq 0$ tồn tại $y \in \mathbb{R}$ mà $a = y^n$, khi đó $f(a) = f(y^n) = [f(y)]^n$. Do đó với mọi $a \geq 0, x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x + a) = f(x + y^n) = f(x) + [f(y)]^n = f(x) + f(a).$$

Ở trên, nếu lấy $x = -a$ thì ta suy ra $f(-a) = -f(a)$, $\forall a \geq 0$, điều này cũng có nghĩa f là hàm lẻ. Vì thế với mọi $a \geq 0, x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x - a) = -f(-x + a) = -[f(-x) + f(a)] = f(x) - f(a).$$

Từ đó dẫn đến $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Theo bài toán PTH Cauchy thì ta có $f(rx) = rf(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$ đặc biệt $f(r) = rf(1)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.

Với mọi $r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$ ta có $f((r+x)^n) = [f(r+x)]^n = [f(r) + f(x)]^n$. Mặt khác

$$f((r+x)^n) = f\left(\sum_{k=0}^n C_n^k r^k x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^n C_n^k r^k f(x^{n-k}),$$

và

$$[f(r) + f(x)]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k [f(r)]^k [f(x)]^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k r^k [f(1)]^k [f(x)]^{n-k}.$$

Suy ra $\sum_{k=0}^n C_n^k r^k f(x^{n-k}) = \sum_{k=0}^n C_n^k r^k [f(1)]^k [f(x)]^{n-k}$ (i). Cố định x thì hai vế của đẳng thức (i) đều là đa thức biến r bậc n . Do (i) đúng với mọi $r \in \mathbb{Q}$ nên hệ số của r^k , $k = 0, 1, \dots, n$ bằng nhau. Đặc biệt, với $k = n-2$ và $k = n-1$ ta có

$$f(x^2) = [f(x)]^2 [f(1)]^{n-2} \quad \text{và} \quad f(x) = f(x) [f(1)]^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{ii})$$

Trong (ii) lấy $x = 1$ ta suy ra $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$, còn với n chẵn thì ta có thêm trường hợp $f(1) = -1$. Ta đi xét 3 trường hợp này. 1) Nếu $f(1) = 0$, từ (ii) ta suy ra $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm này thỏa mãn bài toán.

2) Nếu $f(1) = 1$, thì từ (ii) ta suy ra $f(x^2) = [f(x)]^2$. Từ đó dễ suy ra $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm này thỏa mãn bài toán.

3) Với n chẵn và $f(1) = -1$. Đặt $g(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, hàm $g(x)$ thỏa mãn điều kiện (*) của bài toán và $g(1) = 1$. Theo trường hợp trên thì $g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Nên $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Nhưng thử lại với chú ý n chẵn thì ta thấy rằng hàm $f(x) = -x$ không thỏa mãn (*).

Kết luận: bài toán có hai nghiệm là $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.14. (USA - 2002) Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Lời giải. Trong (*) cho $x = y = 0$ ta có $f(0) = 0$, với $y = 0$ thì $f(x^2) = xf(x)$, với $x = 0$ thì $f(-y^2) = -yf(y)$, với $x = -y$ thì $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta viết lại (*) như sau $f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2)$ hay $f(u) - f(v) = f(u - v)$, $\forall u \geq 0, v \geq 0$. Từ đây ta có $f(x) = f(x + y - y) = f(x + y) - f(y)$ hay $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \geq 0 \in \mathbb{R}$. Kết hợp 2 khẳng định trên và f là hàm lẻ suy ra $f(rx) = rf(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$. Đặc biệt $f(r) = rf(1)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. Ta đi tính $f([x + 1]^2)$ với $x \geq 0$ theo hai cách. Ta có

$$f([x+1]^2) = f(x^2 + 2x + 1) = f(x^2) + 2f(x) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1), \quad \forall x \geq 0,$$

$$\text{và } f([x+1]^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x) + f(1)) = xf(x) + f(x) + xf(1) + f(1).$$

Từ đó suy ra $f(x) = xf(1)$, $\forall x \geq 0$. Nhưng theo trên f là hàm lẻ nên với mọi $x \leq 0$ ta có $f(x) = -f(-x) = -(-x)f(1) = xf(1)$. Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) = xf(1)$. Thử lại hàm này thỏa mãn bài toán. Vậy $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với $c \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Nhận xét. Ta chỉ cần có $f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2)$ suy ra $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x + y, y \geq 0 \in \mathbb{R}$. Và từ đây $f(rx) = rf(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}^+$ do f lẻ nên $f(rx) = rf(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$. Sau đó từ $f(x) + f(x + 1) = f(2x + 1) = f[(x + 1)^2 - x^2] = (x + 1)f(x + 1) - xf(x)$ ta sẽ suy ra $f(x) = xf(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.15. (Canada - 2008) Xác định hàm số $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Lời giải. Lấy $y = x$ ta có $f(3f(x)) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Ở đây, thay x bởi $3f(x)$ suy ra

$$f(9x) = f(3f(3f(x))) = 3[3f(x)] = 9f(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Với $x = 0$ ta suy ra $f(0) = 9f(0)$ do đó $f(0) = 0$.

Lấy $x = 0$ trong (1) ta có $f(f(y)) = y$, $\forall y \in \mathbb{Q}$. Khi đó, tác động f lên hai vế (1) suy ra $2f(x) + f(y) = f(2x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$. Ở đây, lấy $y = 0$ ta có $f(2x) = 2f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Vì vậy, với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$ ta có $f(2x + y) = f(2x) + f(y)$. Điều này tương đương với

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Theo bài toán PTH Cauchy suy ra $f(x) = xf(1)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Kết hợp $f(f(y)) = y$ ta suy ra $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Thử lại, ta thấy chỉ hàm $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Từ lời giải của bài toán này, một cách tương tự, ta dễ dàng suy ra kết luận sau: Giả sử $a, b \in \mathbb{Q}$ và $a, b \neq 0$, $a + b \neq 0, \pm 1$ thì bài toán tìm hàm $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(af(x) + bf(y)) = ax + by, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

có nghiệm duy nhất là $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 2.3.16. (Indian MO 2005) Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + yf(z)) = xf(x) + zf(y), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Lời giải. Nhận thấy $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là nghiệm của bài toán. Ta đi tìm nghiệm khác, giả sử đó là $f(x)$. Dễ thấy $f(0) = 0$ và tồn tại $a \neq 0$ mà $f(a) \neq 0$. Trong (*) lấy $(x, y, z) = (0, a, z)$ ta có $f(af(z)) = zf(a)$, từ đây dễ thấy f là đơn ánh trên $\mathbb{R}$. Từ (*) thay $x = 0, y = z = 1$ ta có $f(f(1)) = f(1)$, do f đơn ánh nên $f(1) = 1$. Lấy $x = 0, y = 1$ ta có $f(f(z)) = z$, trong (*) chỉ lấy $z = 1$ ta có $f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$, lấy $y = 0$ thì $f(x^2) = xf(x)$. Từ (*) thay $x = -1, y = z = 0$ ta suy ra $f(-1) = -1$. Lấy $x = 0, z = -1$ ta suy ra $f(y) = -f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Từ đó, ta chỉ ra f cộng tính. Suy ra $f(rx) = rf(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$; $f(x + 1) = f(x) + f(1)$. Đến đây, ta định tính $f([x + 1]^2)$ theo hai cách.

Ta có $f([x + 1]^2) = f(x^2 + 2x + 1) = f(x^2) + 2f(x) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1)$, và $f([x + 1]^2) = (x + 1)f(x + 1) = (x + 1)(f(x) + f(1)) = xf(x) + f(x) + xf(1) + f(1)$.

Từ hai đẳng thức trên suy ra $f(x) = xf(1) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Nếu thay đổi (*) thành $f(x^2 + yf(z)) = xf(x) - zf(y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, thì nghiệm của bài toán là $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Bạn đọc có thể thử tự lí giải tại sao ?

Bài toán 2.3.17. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y) + f(xy) = f(x)f(y) + f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Ta thấy rằng (1) là tổng của hai phương trình

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (2)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (3)$$

Ta biết rằng hàm f thỏa mãn đồng thời (2) và (3) thì $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Do vậy nếu từ (1) ta chỉ ra (2) và (3) cũng đúng thì bài toán được giải xong.

Để tách được các phương trình từ (1) ta quan tâm đến tính chẵn, lẻ của hàm số. Chẳng hạn, nếu f là hàm lẻ thì thay y bởi $-y$ ta có

$$f(-xy) + f(x - y) = f(x)f(-y) + f(x) + f(-y). \quad (4)$$

Cộng (1) và (4), chú ý hàm f lẻ ta sẽ có

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x).$$

Từ phương trình này và khẳng định $f(0) = 0$ (suy ra khi lấy $x = y = 0$ ở (1)), cho $y = x$ ta có $f(2x) = 2f(x)$. Suy ra $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)$, điều này dẫn đến (2) đúng, kéo theo (3) cũng đúng.

Quay trở lại bài toán. Ta quan tâm đến tính chẵn, lẻ của hàm số. Để làm điều này ta đi tính $f(1), f(-1)$. Trong (1) thay $y = 1$ ta có

$$f(x) + f(x + 1) = f(1)f(x) + f(x) + f(1) \Rightarrow f(x + 1) = f(1)f(x) + f(1). \quad (5)$$

Nếu ta đặt $f(1) = a$ thì theo (5) ta dễ dàng tính được

$$f(2) = a^2 + a, \quad f(3) = a^3 + a^2 + a, \quad f(4) = a^4 + a^3 + a^2 + a.$$

Nếu tiếp tục quá trình này, ta sẽ tính được $f(n), n \in \mathbb{N}$. Nhưng công việc của ta là tính $f(1)$. Chú ý rằng ở (1) lấy $x = y = 2$ ta có $2f(4) = [f(2)]^2 + 2f(2)$. Thay các giá trị ở trên, ta suy ra

$$a^4 + a^3 + a^2 + a = (a^2 + a)^2 + 2(a^2 + a) \Rightarrow a^4 = a^2.$$

Suy ra $a = 0, \pm 1$. Ta đi xét các trường hợp này.

*) Nếu $a = f(1) = 0$. Thì từ (5) ta suy ra $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

*) Nếu $a = f(1) = -1$. Từ (5) ta suy ra $f(x + 1) = -f(x) - 1$. Ở đây lấy $x = -1$ ta có $f(-1) = -1$. Trong (1) lấy $y = -1$ ta có

$$f(x - 1) + f(-x) = f(-1)f(x) + f(x) + f(-1). \quad (6)$$

Do $f(-1)=1$ nên $f(x-1) + f(-x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$. Ở đây thay x bởi $-x$ ta có $f(-x-1) + f(x) = -1$. Theo trên $f(x) + f(x+1) = -1$ do đó $f(x+1) = f(-x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hay f là hàm chẵn. Trừ (1) cho (4), chú ý f là hàm chẵn, ta có $f(x+y) - f(x-y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Điều này dẫn đến f là hàm hằng, mâu thuẫn với $f(0) = 0$ và $f(1) = -1$. Vậy trường hợp $f(1) = -1$ không xảy ra.

*) Nếu $a = f(1) = 1$ thì từ (5) ta suy ra $f(x+1) - f(x) = 1$. Lấy $x = -1$ thì $f(-1) = -1$. Theo (6) ta có $f(x-1) + f(-x) = -1$, ở đây thay x bởi $-x$ ta có $f(-x-1) + f(x) = -1$. Mặt khác $f(x+1) - f(x) = 1$ nên suy ra $f(x+1) + f(-x-1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay f là hàm lẻ. Theo lập luận ban đầu thì (2) và (3) đúng. Do vậy trong trường hợp này $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: nghiệm của bài toán là $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.18. (Indian MO - 2003) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Bài toán này thực sự có thể giải thông qua bài toán trên.

Thật vậy, bằng cách đặt $f(x) - 1 = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ thì phương trình điều kiện cho trở thành

$$g(x+y) + 1 = [g(x) + 1][g(y) + 1] - [g(xy) + 1] + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\iff g(x+y) + g(xy) = g(x)g(y) + g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tuy nhiên, ta hoàn toàn có thể giải độc lập, bằng cách đi tính giá trị của $f(1)$.

Bài toán 2.3.19. (Romania RMC 2008) Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Đặt $f(x) - f(0) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, từ điều kiện ta có $g(0) = 0$ và

$$g\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lấy $y = 0$ ta có $g\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{g(x)}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó

$$g\left(\frac{x+y}{3}\right) = g\left(\frac{x}{3}\right) + g\left(\frac{y}{3}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Điều này tương đương với $g(x+y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Lấy $y = x$ suy ra $g(2x) = 2g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$g(x) = g\left(\frac{2x+x}{3}\right) = \frac{g(2x) + g(x)}{2} \Rightarrow g(2x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mà $g(2x) = 2g(x)$ nên $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điều này có nghĩa $f(x) = \text{const}$ trên $\mathbb{R}$. Đây là nghiệm của bài toán.

Nhận xét. Ta có thể mở rộng bài toán như sau: Với $p \neq q \in \mathbb{N}^*$, tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{p}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{q}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.3.20. (Romania RMC 2006) Cho $r, s \in \mathbb{Q}$. Tìm hàm $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s, \forall x, y \in \mathbb{Q}. \quad (*)$$

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x) - r - s$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Khi đó

$$\begin{aligned} g(x + g(y)) &= g(x + f(y) - r - s) = f((x - r - s) + f(y)) - r - s = \\ &= f(x - s) + y - r = g(x - s) + y + s, \forall x, y \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Và $g^2(x + g(y)) = g(y + s + g(x - s)) = x + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ hay $g^2 = id$ đối với các phần tử dạng $x + g(y)$. Cố định $y = y_0 \in \mathbb{Q}$ thì tập

$$\{x + g(y_0) : x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q},$$

vì vậy $g^2 = id$ trên $\mathbb{Q}$. Do đó ta có

$$g(x + y) = g(x + g(g(y))) = g(x - s) + g(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Mặt khác $g(x + y) = g(y - s) + g(x) + s$. Do đó $g(x) - g(x - s) = g(y) - g(y - s)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$. Nên $g(x) - g(x - s) = c$ (*const*). Điều này dẫn đến

$$g(x + y) = g(x) + g(y) + s - c, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Lấy $x = y = 0$ ta có $g(0) = -(s - c)$, do vậy $g(x + y) = g(x) + g(y) - g(0)$. Từ đây dễ suy ra $g(x) = ax + g(0)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ với $a, g(0) = -(s - c) \in \mathbb{Q}$ là các hằng số. Nhưng $g^2 = id$ trên $\mathbb{Q}$, nên ta có $a(ax + b) + b = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$

suy ra hoặc $a = 1$, $b = 0$ hoặc $a = -1$, $b = -2s$. Như vậy ta có $g(x) = x$ hoặc $g(x) = -x - 2s$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Dẫn đến

$$f(x) = x + r + s, \forall x \in \mathbb{Q} \quad \text{và} \quad f(x) = -x + r - s, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Thử lại, ta thấy đây là hai nghiệm của bài toán.

MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 2.3.21. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Đặt $f(x) - \frac{x^3}{3} = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.22. (Balkan 2000) Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(x) + f(y)) = y + [f(x)]^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Chỉ ra $f(0) = 0$, $f(f(y)) = y$. Sau đó chứng minh f cộng tính và $[f(x)]^2 = x^2$. Từ đó, xét các trường hợp $f(1) = 1$ hoặc $f(1) = -1$. Ứng với các trường hợp này là các nghiệm $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.23. (Belarus 1997) Tìm hàm $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$g(x + y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Ta đi tìm nghiệm f khác hai nghiệm tầm thường $f(x) = 0$ và $f(x) = 2$.

Chỉ ra $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ và $f(x)$ là hàm lẻ. Từ đó chứng minh $g(x^2) = [g(x)]^2$. Đến đây, bài toán đã quan thuộc và có nghiệm $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.24. (VietNam 1999) Giả sử hàm $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

(i). $f(0) = f(1) = 0$,

(ii). Với mọi $x, y \in [0, 1]$ ta có $2f(x) + f(y) = 3f(\frac{2x + y}{3})$.

Chứng minh rằng $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Gợi ý. - Thay $(x, y) = (0, 1)$ ta suy ra $f(1/3) = 0$.

- Thay $(x, y) = (1, 0)$ ta suy ra $f(2/3) = 0$.

- Thay $(x, y) = (0, 1/3)$ ta suy ra $f(1/9) = 0$.

- Thay $(x, y) = (1/3, 0)$ ta suy ra $f(2/9) = 0$.

- Thay $(x, y) = (2/3, 0)$ ta suy ra $f(4/9) = 0$.

- Thay $(x, y) = (1/3, 1)$ ta suy ra $f(5/9) = 0$.

- Thay $(x, y) = (1, 1/3)$ ta suy ra $f(7/9) = 0$.

Tương tự như trên, sử dụng (ii), bằng quy nạp ta có thể chỉ ra $f(\frac{a}{3^n}) = 0$, $a, n \in \mathbb{N}$. Mà tập hợp gồm tất cả các số hữu tỉ có dạng $\frac{a}{3^n}$, $a, n \in \mathbb{N}$ trù mật trong đoạn $[0, 1]$ nên $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

Bài toán 2.3.25. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f[(x+1)f(y)] = y[f(x)+1], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Chỉ ra $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$. Từ đó chỉ ra f nhân tính và f cộng tính. Đến đây bài toán đã quen thuộc, và nghiệm là $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.26. (THTT) Tìm hàm $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm tại $x = 1$ và

$$f(xy) = \sqrt{x}f(y) + \sqrt{y}f(x), \forall x, y > 0.$$

Gợi ý. Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$.

Bài toán 2.3.27. (IMO 1989, Shortlist) Xác định tất cả các số thực a sao cho tồn tại hàm $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y), \forall 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Gợi ý. Chỉ ra $f(1/2) = a$, $f(1/4) = a^2$, $f(3/4) = 2a - a^2$, $f(1/2) = 3a^2 - 2a^3$. Do đó ta có $3a^2 - 2a^3 = a$ suy ra $a \in \{0, 1/2, 1\}$. Rồi đi xét từng trường hợp này. Đi đến giá trị cần tìm của a là $a = 1/2$.

Bài toán 2.3.28. (IMO 2002) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Bài toán 2.3.29. (IMO 2005, Shortlist) Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số. Nghiệm cần tìm là: $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = -x - 1$ hoặc $f(x) = x^2 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.30. (IMO 2004, Shortlist) Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y^2 + 2f(xy)) = [f(x + y)]^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.3.31. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

$$(f(x) + f(y))f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Nghiệm tầm thường $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tìm nghiệm khác, khi đó $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Đặt $g(x) = 1/f(x)$. Khi đó ta sẽ đưa về dạng PTH Jensen.

Bài toán 2.3.32. (Japan Math Olympiad Final 2008) Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)f(f(x)-y) = xf(x) - yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.3.33. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

- (i). $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
- (ii). $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, $\forall x \neq 0$,

Gợi ý. Chỉ ra f liên tục tại 0.

Bài toán 2.3.34. (BMO 2003, Shortlist) Tìm tất cả giá trị có thể có của $f\left(\frac{2004}{2003}\right)$, trong đó $f : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$ là hàm thỏa mãn các tính chất

- (i). $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$,
- (ii). Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ nếu $f(x) \leq 1$ thì ta suy ra $f(x+1) \leq 1$,
- (iii). $f\left(\frac{2003}{2002}\right) = 2$.

Gợi ý. Đáp số $f\left(\frac{2004}{2003}\right) = \frac{1}{4}$.

Bài toán 2.3.35. (THTT) Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = x^2f\left(\frac{1}{x}\right) + y^2f\left(\frac{1}{y}\right), \forall x, y \neq 0.$$

Bài toán 2.3.36. (IMO 1996, Shortlist) Giả sử $0 < a < 1$ và f là hàm liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y), \forall x, y \in [0, 1].$$

Xác định giá trị của $f(1/7)$.

Bài toán 2.3.37. (THTT - T10/2004) Tìm tất cả các số thực $a > 0$ sao cho tồn tại số thực $k > 0$ và hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + k|x-y|^a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.3.38. (IMO 2003, Shortlist) Tìm hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

(i). $f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy}) + f(\sqrt{yz}) + f(\sqrt{zx}), \quad \forall x, y, z > 0$

(ii). $f(x) < f(y), \quad \forall 1 \leq x < y.$

Bài toán 2.3.39. (China TST 2011) Cho số nguyên $n \geq 2$. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - f(y)) = f(x + y^n) + f(f(y) + y^n), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.3.40. (APMO 2011) Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện sau

(i). Tồn tại số thực M mà $f(x) < M, \quad \forall x \in \mathbb{R},$

(ii). $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Bài toán 2.3.41. (Romania TST 1997) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Chỉ ra $f(0) = 0, \quad f(x)$ là hàm chẵn. Ta xác định $f(x)$ với $x > 0$.

Với $a, b > 0$ tồn tại x, y sao cho $x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$. Ta có

$$f(a) + f(b) = f(\sqrt{a^2 + b^2}), \quad \forall a, b > 0.$$

Đặt $g(t) = f(\sqrt{t}), \quad \forall t > 0$. Suy ra $g(a) + g(b) = g(a + b), \quad \forall a, b > 0$ và $g(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0$. Do đó $g(t) = kt, k \geq 0$. Từ đó $f(x) = kx^2$.

Chương 3

Một số phương pháp giải phương trình hàm

3.1. Phương pháp thế

Thay các giá trị đặc biệt:

- +) Ví dụ thay $x = a$ sao cho $f(a)$ xuất hiện nhiều trong phương trình.
- +) $x = a, y = b$ rồi hoán vị, thay đổi đi để tìm liên hệ giữa $f(a)$ và $f(b)$.
- +) Đặt $f(0) = b, f(1) = b, \dots$
- +) Nếu f là toàn ánh, tồn tại $a: f(a) = 0$ (dùng trong phương trình cộng), còn nếu tồn tại $a: f(a) = 1$ (nếu trong phương trình có nhân). Chọn x, y phù hợp để triệt tiêu đi $f(g(x, y))$ có trong phương trình. Hàm có x bên ngoài thì cố gắng chỉ ra nó là đơn ánh hoặc toàn ánh.
- +) Làm xuất hiện $f(x)$.
- +) $f(x) = f(y)$ với mọi $x, y \in A \Rightarrow f(x) = \text{const}$ với mọi $x \in A$.

Bài toán 3.1.1. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{f(x)f(y) - f(xy)}{3} = x + y + 2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Lời giải. Giả sử tồn tại $f(x)$ thỏa mãn điều kiện (*). Thay $x = y = 0$ vào (*) ta có

$$f^2(0) - f(0) = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = -2 \\ f(0) = 3. \end{cases}$$

- Xét $f(0) = -2$, thay $y = 0$ vào (*) ta có

$$\begin{aligned} f(0) \cdot f(x) - f(0) &= 3(x+2) \Leftrightarrow -2f(x) + 2 = 3x + 6 \\ \Leftrightarrow f(x) &= -\frac{3}{2} \cdot x - 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thử lại (*) thấy không thỏa mãn.

- Xét $f(0) = 3$, thay $y = 0$ vào (*) ta có

$$f(x) \cdot f(0) - f(0) = 3(x+2) \Leftrightarrow f(x) = x + 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy $f(x) = x + 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.1.2. Cho $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ thỏa mãn:

1. Tồn tại $a, b \in [0, 1]$ sao cho $f(a) = 0, f(b) = 1$;
2. Với mọi $x, y \in [0, 1]$ ta có:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - f(x)| + |y - f(y)|}{2}. \quad (*)$$

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

Lời giải. Thay $x = a, y = b$ vào (*) ta có

$$\begin{aligned} 1 = |f(a) - f(b)| &\leq \frac{|a - f(a)| + |b - f(b)|}{2} = \frac{a + 1 - b}{2} \\ \Rightarrow a - b &\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0. \end{cases} \quad (\text{do } a, b \in [0, 1]). \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Thay $x = 1, y = \frac{1}{2}$ ta có

$$\left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1 + \left|\frac{1}{2} - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{2} \Leftrightarrow \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1 + \left|\frac{1}{2} - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{2}.$$

- Nếu $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ thì suy ra

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \text{ (vô lý).}$$

- Nếu $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$, thay $x = 0, y = \frac{1}{2}$ vào (*)

$$\Rightarrow \left|1 - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1 + \left|\frac{1}{2} - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{2} = \frac{\frac{3}{2} - f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \text{ (vô lý).}$$

Vậy $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Ta chứng minh $x = \frac{1}{2}$ là duy nhất. Thay $y = \frac{1}{2}$ vào (*) ta có

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{|f(x) - x|}{2}. \quad (**)$$

Giả sử tồn tại $x_0 \in [0, 1], x_0 \neq \frac{1}{2}$ sao cho $f(x_0) = x_0$. Thay $x = x_0$ vào (**) ta có

$$\left|f(x_0) - \frac{1}{2}\right| \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{2} = x_0 \text{ (vô lý).}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.1.3. Tìm hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Lời giải. Cho $x = 1, y = 3$, ta có

$$f(3) = f^2(1) + f^2(3) \Rightarrow f^2(3) - f(3) + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow f(3) = \frac{1}{2}.$$

Thay $y = 1$,

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \left[f(x) + f\left(\frac{3}{x}\right) \right] \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow f(xy) = 2f(x)f(y).$$

Cho $x = y$, ta có

$$f(x^2) = 2f^2(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Thay $y = \frac{3}{x}$, ta có

$$f(3) = f(x) \cdot f(x) + f^2\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = f^2(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 3.1.4. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Thay $x = y = 1 \Rightarrow 2f(1) = 2f^2(1) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

• $f(1) = 0$, thay $y = 1$, suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

• $f(1) = 1$, thay $y = 1 \Rightarrow f(x) + x = (x + 1)f(x) \Rightarrow xf(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đặt $f(0) = a$. Với $x, y \neq 0$ thì thỏa mãn; $x = y = 0$ thỏa mãn.

Xét với $x \neq 0, y = 0 \Rightarrow xa = xa$ (thỏa mãn).

Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ với a tùy ý là hai

hàm số thỏa mãn.

Bài toán 3.1.5. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Lời giải. Thay $x = 0 \Rightarrow f(f(y)) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, suy ra $T_f = \mathbb{R}$ hay f là song ánh ($f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$).

Thay $y = 0 \Rightarrow f(x^2 + f(0)) = xf(x)$. Ta muốn chỉ còn x^2 trong (*). Do f là toàn ánh nên tồn tại a để $f(a) = 0$. Thay $y = a$,

$$f(x^2) = xf(x) + a \Rightarrow f(a^2) = a \Rightarrow f(f(a^2)) = a^2 = f(a) = 0.$$

Có $a = 0$, thay $y = 0$, ta có

$$f(x^2) = xf(x) = f(f(x))f(x) = f(f^2(x)) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ f(x) = -x. \end{cases}$$

Giả sử có $a, b \neq 0, a \neq b$ sao cho $\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = -b \end{cases}$

$$\Rightarrow f(a^2 + f(b)) = af(a) + b \Rightarrow f(a^2 - b) = a^2 + b$$

$$f(a^2 - b) = \begin{cases} a^2 - b \Rightarrow b = 0 \text{ (vô lý)} \\ -a^2 + b \Rightarrow a = 0 \text{ (vô lý)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài toán 3.1.6. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Lời giải. Thay $x = 0$, ta có

$$f(f(y)) = f^2(0) + y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Suy ra f là song ánh $\Rightarrow$ tồn tại $a: f(a) = 0$. Thay $x = a$ vào $(*)$ ta có $f(f(y)) = y$. Kết hợp với $(**)$, $f(0) = 0 \Rightarrow a = 0$.

Thay x bởi $f(x)$, $y = 0$, ta có

$$f(x)f(x) = x^2 = f^2(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ f(x) = -x. \end{cases}$$

Giả sử tồn tại $a, b \neq 0: f(a) = a$ và $f(b) = -b$. Thay $x = a, y = b$ vào $(*)$ $\Rightarrow f(a^2 - b) = a^2 + b$. Theo bài trước suy ra vô lý.

Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, hoặc $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Bài toán 3.1.7. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta chứng minh hàm là toàn ánh, tức chỉ ra với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại γ sao cho $f(\gamma) = x$. Để ý nếu chọn $y = -f(x)$, ta có

$$f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x) \Rightarrow f(f(-f(x)) - x) = -2x - f(0)$$

(Từ đây có thể suy ra f là toàn ánh).

Từ đây, ta có cách chọn như sau: với mọi $x \in \mathbb{R}$, chọn α sao cho

$$-2\alpha - f(0) = x \Rightarrow \alpha = -\frac{x + f(0)}{2}.$$

Từ đó chọn $\beta = -f(\alpha)$, $\gamma = f(\beta) - \alpha$. Khi đó ta sẽ có $f(\gamma) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra f là toàn ánh, suy ra tồn tại a : $f(a) = 0$.

Thay $x = a \Rightarrow f(y) = 2a + f(f(y) - a)$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại y : $f(y) = x + a$ (do f là toàn ánh). Từ đó suy ra $f(y) = 2a + f(x) \Rightarrow f(x) = x - a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.1.8. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Lời giải. Thay y bởi z , x bởi $x + y$,

$$f(f(x + y + z)) = f(x + y + z) + f(x + y)f(z) - (x + y)z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Thay $z = 0$, ta có

$$f(x + y)f(0) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

+) Nếu $f(0) = 0$, ta có

$$f(x)f(y) = xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay $y = 1 \Rightarrow f(x)f(1) = x$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Nếu $f(1) = 0 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy $f(1) = a \neq 0 \Rightarrow f(x) = kx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay vào (2) $\Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$,

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x, & \forall x \in \mathbb{R} \text{ (thử lại thấy thỏa mãn)} \\ f(x) = -x, & \forall x \in \mathbb{R} \text{ (thử lại thấy không thỏa mãn)}. \end{cases}$$

+) Nếu $f(0) \neq 0$, thay $y = 1$ vào (1), ta có

$$f(x + 1)f(0) = f(x + 1) + f(x)f(1) - x \quad (3)$$

Thay x bởi $x + 1$, $y = -1$ vào (1), ta có

$$f(x)f(0) = f(x + 1)f(-1) + x + 1. \quad (4)$$

Từ $(3) \times f(-1) + f(0) \times (4)$ có:

$$\begin{aligned} f(x)f^2(0) &= f(x)f(1)f(-1) - f(-1)x + xf(0) + f(0) \\ \Rightarrow f(x)[f^2(0) - f(1)f(-1)] &= x[f(0) - f(-1)] + f(0) \end{aligned} \quad (5)$$

Thay $x = 0$ vào (5) $\Rightarrow f^2(0) - f(1)f(-1) = 1$

$$\Rightarrow f(x) = x[f(0) - f(-1)] + f(0).$$

Đặt $a = f(0) - f(-1)$, $b = f(0) \Rightarrow f(x) = ax + b$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Thay vào (*) $\Rightarrow a = b = 0$ (vô lý).

Bài toán 3.1.9. Tìm $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) - f(y) = (x^2 - y^2)g(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay y bởi $-y$, ta có

$$f(x) - f(-y) = (x^2 - y^2)g(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay x bởi y vào (2) $\Rightarrow f(y) = f(-y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)g(x - y) &= (x^2 - y^2)g(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow g(x - y) &= g(x + y), \quad \forall x \neq \pm y, x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Với mọi $u, v \in \mathbb{R}$, đặt $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2} \Rightarrow g(u) = g(v)$, $\forall u, v \neq 0 \Rightarrow g(u) = \text{const}$, $\forall u \neq 0$.

Đặt $g(x) = c$ với $x \neq 0 \Rightarrow f(x) - f(y) = c(x^2 - y^2)$, $\forall x \neq y \Rightarrow f(x) - f(y) = c(x^2 - y^2)$, $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) - cx^2 = f(y) - cy^2$, $\forall y \neq 0 \Rightarrow f(x) = cx^2 + k$ $\forall x \neq 0$.

Từ đó ta có cặp hàm số thỏa mãn đề bài là $g(x) = \begin{cases} c, & x \neq 0 \\ c', & x = 0 \end{cases}$ với $c, c' \in \mathbb{R}$

tùy ý và $f(x) = cx^2 + b$ với $b \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Bài toán 3.1.10. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(f(x - y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $y = 0$, ta có

$$f(f(x)) = f(x) - f(0) + f(x)f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $f(0) = a$, từ (1) và (2) (trong (2) thay x bởi $x - y$), ta có

$$f(x - y)(1 + a) - a = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Thay $x = y$ vào (3), ta có

$$f^2(x) = x^2 + a^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay $x = a \Rightarrow f^2(a) = 2a^2$. Đặt $f(a) = b \Rightarrow b^2 = 2a^2$.

Thay $x = 0$ vào (2) $\Rightarrow b = a^2 \Rightarrow a^4 - 2a^2 = 0$.

Thay $x = a$ vào (2) $\Rightarrow f(f(a)) = b - a + ab$.

Thay $x = b$ vào (4) $\Rightarrow f^2(b) = b^2 + a^2$.

$$a^2 + a^4 = (a^3 + a^2 - a)^2. \quad (*)$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} a^4 - 2a^2 = 0, \\ (a^3 + a^2 - a)^2 = a^4 + a^2 \end{cases} \Rightarrow a = 0.$$

Vậy $f(0) = 0$. Từ đó suy ra

$$f(f(x)) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$f^2(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$f(x - y) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Từ (3), thay $x = 0$,

$$f(-y) = -f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (4) suy ra $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$.

Giả sử tồn tại $x \neq 0$, $f(x) = -x$, từ (2) ta có: $f(x) = f(f(x)) = f(-x)$. Từ (5) có $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(x) = 0$. Mặt khác $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$ nên suy ra vô lý.

Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hàm cần tìm.

Bài toán 3.1.11. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = 0$, ta có

$$f(f(0) + y) = f(-y) + 4f(0)y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $f(0) = a$, $f(a) = b$. Thay $y = 0$ vào (2) $\Rightarrow b = a$.

Thay $y = -a$ vào (2) $\Rightarrow f(0) = f(a) - 4a^2 \Rightarrow a = a - 4a^2 \Rightarrow a = 0$.

$$f(y) = f(-y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay $y = \frac{x^2 - f(x)}{2}$ vào (1) $\Rightarrow f(x)[x^2 - f(x)] = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$ hoặc $f(x) = x^2$.

Giả sử tồn tại đồng thời $ab \neq 0$ sao cho $f(a) = 0, f(b) = b^2$. Thay $y = 0$ vào (1) ta có:

$$f(f(x)) = f(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Thay $x = a, y = b$ vào (1) $\Rightarrow f(b) = f(a^2 - b) = b^2 \neq 0$.

Thay $x = a, y = -b$ vào (1) $\Rightarrow f(-b) = f(a^2 + b) = b^2 \neq 0$.

$$\Rightarrow (a^2 - b)^2 = (a^2 + b)^2 = b^2 \Rightarrow a = b = 0 \text{ (vô lý)}.$$

Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Bài toán 3.1.12. Tìm $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

i) $2f(x) - g(x) = f(y) - y$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x)g(x) \geq x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Thay $x = y$ vào i) $\Rightarrow g(x) = f(x) + x$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) - x = f(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x + c, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2x + c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $f(x)g(x) - (x + 1) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên suy ra

$$2x^2 + x(3c - 1) + c^2 - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow c^2 - 6c + 9 \leq 0 \Rightarrow c = 3.$$

Bài toán 3.1.13. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xf(y))f(y) = f(x+y), \quad \forall x, y > 0. \quad (1)$$

Lời giải. Ta dựa vào phương trình, ta cố gắng chọn x sao cho $xf(y) = x+y \Leftrightarrow x = \frac{y}{f(y)-1}$.

- Giả sử tồn tại $y: f(y) > 1$, chọn $x = \frac{y}{f(y)-1}$. Thay vào (1),

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\frac{yf(y)}{f(y)-1}\right)f(y) &= f\left(\frac{yf(y)}{f(y)-1}\right) \quad (\text{do } f(x) > 0 \text{ với mọi } x > 0) \\ \Rightarrow f(y) &= 1 \quad (\text{vô lý}). \end{aligned}$$

Vậy $0 < f(y) < 1$ với mọi $y > 0$.

Giả sử tồn tại $a > 0: f(a) = 1$. Thay vào (1) ta có $f(x) = f(x+a), \forall x > 0 \Rightarrow f(x) = f(x+na), n \in \mathbb{N}^*, x > 0$.

Để ý kết quả của bài trước: f không giảm, tồn tại $a > 0$ sao cho $f(x+a) = f(x) \Rightarrow f(x) = \text{const}$. Từ (1) có

$$f(x+y) = f(xf(y))f(y) \leq f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

Suy ra với mọi $0 < x < y$ ta có $f(y) = f(y-x+x) \leq f(x)$, suy ra f là hàm giảm. Suy ra $f(x) = a$ ($a \in (0, 1]$) với mọi $x > 0$. Thay vào (1) ta có $a = a^2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $f(x) = 1$ với mọi $x > 0$.

- Giả sử $0 < f(x) < 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x) > f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y$, hay f là hàm giảm ngặt.

Thay $y = 1$ vào (1) suy ra $f(x+1) = f(xf(1))f(1)$. Đặt $f(1) = a \Rightarrow f(x+1) = f(ax)a$. Có $x+1 = ax + (1-a)x + 1$, suy ra

$$f(x+1) = f(ax)f(f(ax)[(1-a)x+1]).$$

Do f là hàm giảm ngặt (đơn ánh) nên suy ra $f(ax)[(1-a)x+1] = 1 \Rightarrow f(ax) = \frac{1}{(1-a)x+1} \forall x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{a}{(1-a)x+a} \forall x > 0$.

Bài toán 3.1.14. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+yf(x)) = f(f(x)) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = 0$ suy ra

$$f(yf(0)) = f(f(0)), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử $f(0) \neq 0$, từ (2) suy ra $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) suy ra

$$c = c + cx, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ (vô lý)}.$$

Vậy $f(0) = 0$.

Thay $y = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nhìn lại (1), ta sẽ chọn y sao cho $x + yf(x) = f(x)$, hay là $y = \frac{f(x) - x}{f(x)}$ với $f(x) \neq 0$. Đến bước này ta có hai giả thiết.

Giả thiết 1: Xét hai trường hợp

Trường hợp 1. Xét $f \equiv 0$ có là nghiệm ?

Trường hợp 2. Tồn tại $x_0 \neq 0$: $f(x_0) \neq 0$. Từ đây suy ra f hoặc là đơn ánh, hoặc là toàn ánh, hoặc là song ánh.

Giả thiết 2: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu tồn tại $x_0 \neq 0$: $f(x_0) = 0$. Chứng minh $f \equiv 0$.

Trường hợp 2. Xét f không đồng nhất bằng 0 với mọi $x \neq 0$ hay ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Với cách thay như trên, quá rõ là bài này ta dùng giả thiết 2.

Trường hợp 1. Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$: $f(x_0) = 0$. Thay $x = x_0$ vào (1) suy ra $f(x_0) = x_0 f(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy $f \equiv 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2. Với $x \neq 0$, chọn $y = \frac{f(x) - x}{f(x)}$ ta có

$$\begin{aligned} xf\left(\frac{f(x) - x}{f(x)}\right) &= 0 \quad \forall x \neq 0 \\ \Rightarrow f(x) - x &= 0, \quad \forall x \neq 0 \\ \Rightarrow f(x) &= x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.1.15. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = 2y + f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Với các bài toán liên tục hoặc đơn điệu, ta thường cố gắng chỉ ra phương trình đó là phương trình Cauchy hay $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Cho $x = 0$ vào (1), ta có

$$f(f(y)) = 2y + f(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Suy ra f là song ánh. Thay $y = 0$ vào (2), ta có

$$f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$(2) \Leftrightarrow f(f(y)) = 2y \Rightarrow f(2y) = f(f(f(y))) = 2f(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay y bởi $f(y)$ vào (1), ta có

$$\begin{aligned} f(x + 2y) &= 2f(y) + f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x + 2y) &= f(2y) + f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay y bởi $\frac{y}{2}$, ta có

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do f liên tục $\Rightarrow f(x) = kx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1), ta có

$$k(x + ky) = 2y + kx \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{2}.$$

Vậy $f(x) = \sqrt{2}x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, hoặc là $f(x) = -\sqrt{2}x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.1.16. (Slovenia National Olympiad 2010). Tìm tất cả các hàm $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ thỏa mãn

$$(y + 1)f(x + y) = f(xf(y)), \quad \forall x, y \in [0, +\infty). \quad (1)$$

Lời giải. Trong (1), cho $x = 0$ ta được

$$(y + 1)f(y) = f(0), \quad \forall y \in [0, +\infty).$$

Suy ra

$$f(y) = \frac{a}{y + 1}, \quad \forall y \in [0, +\infty) \text{ (với } a = f(0)). \quad (2)$$

Thử lại: Thay (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{(y+1)a}{x+y+1} = \frac{a}{xf(y)+1}, \quad \forall x, y \in [0, +\infty) \\
& \Rightarrow \frac{(y+1)a}{x+y+1} = \frac{a}{\frac{ax}{y+1} + 1}, \quad \forall x, y \in [0, +\infty) \\
& \Rightarrow \frac{(y+1)a}{x+y+1} = \frac{a(y+1)}{ax+y+1}, \quad \forall x, y \in [0, +\infty) \\
& \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x+y+1 = ax+y+1 \end{cases} \quad \forall x, y \in [0, +\infty) \\
& \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy các hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0, +\infty)$ và $f(x) = \frac{1}{x+1}$ với mọi $x \in [0, +\infty)$.

Bài toán 3.1.17. (Switzerland Finad Round 2010). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $f(0) = a$. Trong (1) cho $y = x$ ta được $f(f(x)) = x + \frac{a}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy (1) trở thành

$$x + \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} = 2y + f(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(x - y) = x - y + a, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (2), cho $y = 0$ suy ra $f(x) = x + a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
x + 2a + y + 2a &= 2y + x - y + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow a = 0.
\end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $f(x) = x$ với $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.1.18. (Romania Team Selection Test 2011). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$2f(x) = f(x + y) + f(x + 2y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử hàm số thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Ký hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1):

$$P(2x, x) \Rightarrow 2f(2x) = f(3x) + f(4x), \quad \forall x \geq 0 \quad (2)$$

$$P(x, x) \Rightarrow 2f(x) = f(2x) + f(3x), \quad \forall x \geq 0 \quad (3)$$

$$P(0, x) \Rightarrow 2f(0) = f(x) + f(2x), \quad \forall x \geq 0 \quad (4)$$

$$P(0, 2x) \Rightarrow 2f(0) = f(2x) + f(4x), \quad \forall x \geq 0. \quad (5)$$

Thay (4) và (5) vào (2) ta được

$$2f(2x) = f(3x) + 2f(0) - f(2x) \Leftrightarrow f(3x) = 3f(2x) - 2f(0). \quad (6)$$

Thay (6) vào (3) ta được

$$2f(3x) = f(2x) + 3f(2x) - 2f(0) \Leftrightarrow 2f(2x) = f(x) + f(0). \quad (7)$$

Thay (7) vào (4) dẫn tới

$$4f(0) = 2f(x) + f(x) + f(0), \quad \forall x \geq 0. \quad (8)$$

Trong (1) thay y bởi $2y$ ta được

$$2f(x) = f(x + 2y) + f(x + 4y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0. \quad (9)$$

Từ (9) và (1) suy ra

$$f(x + y) = f(x + 4y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0. \quad (10)$$

Trong (10) thay x bởi $-4y$ ta được $f(-3y) = f(0)$ với mọi $y \geq 0$. Từ đây thay y bởi $y/3$ ta được $f(-y) = f(0)$ với mọi $y \geq 0$. Vậy

$$f(t) = 0 \quad \text{với mọi } t \leq 0. \quad (11)$$

Từ (11) và (8) suy ra $f(x) = f(0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.1.19. (Đề thi Olympic 30/04/2012). Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = g(0) = 1, g(1) = 2$ và

$$f(x) - f(y) = (x - y)g(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Từ (1) cho $y = x$ và sử dụng $g(0) = 1$ ta được

$$f(x) - f(-x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) thay x bởi $x + 1$ và thay y bởi x ta được

$$f(x + 1) - f(x) = g(2x + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Trong (1) thay x bởi $x + 1$ và thay y bởi $-x$ ta được

$$f(x + 1) - f(-x) = 2(2x + 1). \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$\begin{aligned} f(x + 1) + 2x - f(x) &= 2(2x + 1), & \forall x \in \mathbb{R} \\ g(2x + 1) &= 2(2x + 1) - 2x, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (5) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} g(2x + 1) &= 2x + 2, & \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow g(x) &= x + 1, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Thay $y = 0$ vào (1) và sử dụng (6) ta được

$$f(x) = xg(x) + 1 = x(x + 1) + 1 = x^2 + x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy các cặp hàm số $f(x) = x^2 + x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài toán 3.1.20. (Poland Second Round - 2012). Tìm tất cả các hàm số

$$g(f(x)) = f(g(y)) + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$g(f(x)) = f(g(0)) + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (1) cho $y = f(x)$ ta được

$$g(0) = f(g(f(x))) + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có

$$f(f(g(0)) + x) = -x + g(0) \Rightarrow f(x) = -x + a \text{ (với } a \text{ là hằng số).}$$

Thay $f(x) = a - x$ trở lại (1) ta có

$$g(-x - y + a) = -g(y) + a + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay $x = -y$ vào (4) ta được

$$g(a) = a + x - g(-x) \Rightarrow g(x) = -x + b \text{ (với } b \text{ là hằng số).}$$

Thay f, g vừa tìm được vào (1) ta có

$$\begin{aligned} -(-x - y + a) + b &= -(-y + b) + a + x, & \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow x + y - a + b &= y + x - b + a, & \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow a &= b. \end{aligned}$$

Do đó $f(x) = -x + a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = -x + a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số).

Bài toán 3.1.21. (Albania Team Selection Test 2013). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)[f(x^2) + f(y^2) - f(xy)], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Ký hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u , thay y bởi v vào (1)

$$P(\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{-x}) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$P(0, 0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x^3) = xf(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Sử dụng (3) ta biến đổi (1) thành

$$(x + y)f(xy) = xf(y^2) + yf(x^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (4) lấy $y = 1$ ta được

$$(x + 1)f(x) = xf(1) + f(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (4) lấy $y = -1$ ta được

$$(x - 1)(-f(x)) = xf(1) - f(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Cộng (5) với (6) ta thu được $2f(x) = 2f(1)x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số). Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.1.22. (Đề thi học sinh giỏi quốc gia năm 2013). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 2013$ và

$$(x - y)[f(f^2(x)) - f(f^2(y))] = [f(x) - f(y)][f^2(x) - f^2(y)], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(f^2(x)) = \frac{f^3(x)}{x}, \quad \forall x \neq 0. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) suy ra với mọi x khác 0, y khác 0 ta có

$$\begin{aligned} (x - y) \left[\frac{f^3(x)}{x} - \frac{f^3(y)}{y} \right] &= [f(x) - f(y)][f^2(x) - f^2(y)] \\ \Leftrightarrow \frac{xf^3(y)}{y} + \frac{yf^3(x)}{x} &= f(x)f^2(y) + f(y)f^2(x) \\ \Leftrightarrow \frac{xf^3(y)}{y} - f(x)f^2(y) + \frac{yf^3(x)}{x} - f(y)f^2(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{xf^3(y)}{y} - f(x)f^2(y) + \frac{yf^3(x)}{x} - f(y)f^2(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow [xf(y) - yf(x)][xf^2(y) - yf^2(x)] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3) cho $y = 1$ ta được

$$(2013x - f(x))[2013^2x - f^2(x)] = 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (4)$$

Từ (4) suy ra $f(x) = 2013x$ với mọi $x \leq 0$. Bởi vậy, từ (3) cho $y = -1$ ta được

$$[-2013x + f(x)][2013^2x + f^2(x)], \quad \forall x \neq 0. \quad (5)$$

Từ (5) suy ra $f(x) = 2103x$ với mọi $x > 0$. Như vậy $f(x) = 2013x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.1.23. (IMO 2010). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f([x]y) = f(x)[f(y)], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Ở đây $[a]$ được ký hiệu là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a .

Lời giải. Cho $y = 0$, ta được

$$f(0) = f(x)[f(0)], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Nếu $[f(0)]$ khác 0 thì $f(x) = \frac{f(0)}{[f(0)]} = \frac{c}{[c]}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (với c bất kỳ và $[c]$ khác 0). Thử lại thấy thỏa mãn.

Xét $[f(0)] = 0$. Khi đó (2) dẫn đến $f(0) = 0$. Từ (1) cho $y = 1$ ta được

$$f([x]) = f(x)[f(1)]. \quad (3)$$

Từ (3) cho $x = 1$ ta được $f(1) = f(1)[f(1)] \Leftrightarrow f(1) = 0$ hoặc $[f(1)] = 1$.

Khi $f(1) = 0$ thì từ (1) cho $x = 1$ ta được $f(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ hay $f(x) \equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Nếu $[f(1)] = 1$ thì từ (3) ta có

$$f([x]) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Với $x \in [0, 1]$ thì từ (4) suy ra $f(x) = f(0) = 0$. Từ (1) cho $y = \frac{1}{2}$ ta được

$$f\left(\frac{[x]}{x}\right) = f(x) \left[f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5) cho $x = 2$ ta được $f(1) = 0$ (mâu thuẫn với $[f(1)] = 1$).

Tóm lại các hàm thỏa mãn (1) là: $f(x) = \frac{c}{[c]}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (với c là một số bất kỳ và $[c]$ khác 0) và $f(x) \equiv 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3.2. Sử dụng tính liên tục

Chú ý:

- f liên tục và f đơn ánh thì f đơn điệu thực sự.
- f liên tục trên $[a, b]$ thì f bị chặn (tức là tồn tại $M = \max_{[a, b]} f(x)$ và $m = \min_{[a, b]} f(x)$).
- f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$.

Bài toán 3.2.1. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, thỏa mãn

$$x^2 f(y) + y f(x^2) = f(xy) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = 0$ vào (1) $\Rightarrow yf(0) = f(0) + a$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Nếu $f(0) \neq 0 \Rightarrow yf(0)$ có tập giá trị là $\mathbb{R} \Rightarrow$ vô lý $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow a = 0$. Vậy $a \neq 0$ thì phương trình không có nghiệm.

Với $a = 0$, (1) $\Leftrightarrow x^2f(y) + yf(x^2) = f(xy)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Thay $x = y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(1) = 0$.

Thay $y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(x^2) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay $y = x$ vào (1) $\Rightarrow x^2f(x) + xf(x^2) = f(x^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow (x^2 + x - 1)f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Do f liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.2.2. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, thỏa mãn

$$f(4x) + f(9x) = 2f(6x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay x bởi $\frac{x}{6}$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}x\right) + f\left(\frac{3}{2}x\right) &= 2f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}x\right) - f(x) &= f(x) - f\left(\frac{3}{2}x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right) - f(x) \Rightarrow g$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(x) = g\left(\frac{3}{2}x\right) \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}x\right) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Quy nạp ta được

$$g(x) = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right) = g(0) = f(0) - f(0) = 0 \\ \Rightarrow g(x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}x\right) - f(x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}x\right) &= f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tương tự $\Rightarrow f(x) = f(0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Vậy $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ ($c = \text{const}$) thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3.2.3. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, thỏa mãn

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x) - x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có

$$g(x^2) + g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay x bởi $-x \Rightarrow g(x^2) + g(-x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) = g(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ là hàm chẵn, do đó ta chỉ cần tính g với $x \geq 0$.

Thay x bởi x^2 vào (2) $\Rightarrow g(x^4) + g(x^2) = 0 \Rightarrow g(x^4) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xét $x > 0 \Rightarrow g(x) = g(x^{1/4})$ với mọi $x > 0$. Lấy $a > 0$ tùy ý, xét dãy số (x_n) xác định như sau

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : x_{n+1} = x_n^{\frac{1}{4}}, \quad x_0 = a.$$

$$\Rightarrow x_n = a^{\frac{1}{4^n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{4^n}} = a^0 = 1.$$

Có $g(x_{n+1}) = g(x_n^{1/4}) = g(x_n) = \dots = g(a) \Rightarrow g(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = g(1) = f(1) - 1 = b$. Vậy $g(x) = b$ với mọi $x > 0 \Rightarrow g(x) = b$ với mọi $x \neq 0$ (do g chẵn) $\Rightarrow f(x) = x + b$ với mọi $x \neq 0$ ($b = \text{const}$). Thay vào (1) $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = x$ với mọi $x \neq 0$. Thay $x = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(0) = 0$, $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.2.4. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, thỏa mãn

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay x bởi $-x$, ta có

$$f(-x) = f\left((-x)^2 + \frac{1}{4}\right) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow f$ chẵn, do đó ta chỉ cần tính f với $x \geq 0$. Ta muốn sử dụng dãy số để áp dụng tính liên tục nên ta quan tâm đến phương trình

$$x = x^2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

1, Xét $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Ta xét dãy số

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Ta có

$$x_1 = x_0^2 + \frac{1}{4} = a^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Giả sử $x_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$. Vậy $x_n \leq \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Có $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + \frac{1}{4} - x_n \geq 0 \Rightarrow (x_n)$ là tăng lại bị chặn trên nên tồn tại $k = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Lấy giới hạn hai vế của (*) ta có

$$k = k^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f\left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_n) = \dots = f(a) \\ \Rightarrow f(a) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = f\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ với mọi $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2, Xét $a \geq \frac{1}{2}$. Để ý với (*), viết lại như sau

$$x_n = \sqrt{x_{n+1} - \frac{1}{4}} \quad \left(\text{nếu } x_{n+1} > \frac{1}{4} \right)$$

Đảo lại thứ tự n và $n+1$, ta xét dãy sau

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}, \quad x_0 = a \geq \frac{1}{2}.$$

Tương tự, quy nạp ta được $x_n \geq \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}} - x_n = \frac{x_n - \frac{1}{4} - x_n^2}{\sqrt{x_n - \frac{1}{4}} + x_n} \leq 0.$$

Suy ra (x_n) là dãy giảm, lại bị chặn dưới nên tồn tại $k = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Lấy giới hạn hai vế ta có

$$k = \sqrt{k - \frac{1}{4}} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Ta có

$$x_n = x_{n+1}^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow f(x_n) = f\left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_{n+1})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(a) &= f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = \dots \\ \Rightarrow f(a) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Vậy $f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ với mọi $a \geq 0$, có f chẵn $\Rightarrow f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = c$ (c là hằng số) với mọi $a \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.2.5. Cho $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Hãy tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-1, 1)$ thỏa mãn

$$(1-x^2)f(g(x)) = (1+x^2)^2 f(x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Lời giải. Hệ thức viết lại dưới dạng

$$\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} f(g(x)) = (1-x^2)f(x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Đặt $\varphi(x) = (1-x^2)f(x) \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(-1, 1) \Leftrightarrow \varphi(x)$ liên tục trên $(-1, 1)$. Ta có

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= \varphi(g(x))(1-g^2(x))^{-1} = \varphi(g(x)) \cdot \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}, \quad \forall x \in (-1, 1) \\ \Rightarrow \varphi(g(x)) &= \varphi(x), \quad \forall x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Đề ý:

$$g(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = \frac{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

$$\begin{aligned}\text{Đặt } t = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1-t}{1+t} \Rightarrow g(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ và } t \in (0, +\infty) \text{ (do } x \in (-1, 1)). \\ \Rightarrow \varphi\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) &= \varphi\left(\frac{1-t}{1+t}\right), \quad \forall t \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Đặt $h(t) = \varphi\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ với mọi $t \in (0, +\infty) \Rightarrow h(t^2) = h(t)$ với mọi $t \in (0, +\infty)$. Ta thấy $\varphi(x)$ liên tục trên $(-1, 1) \Leftrightarrow h(x)$ liên tục trên $(0, +\infty)$. Quy nạp ta được $h(x) = h(\sqrt[n]{x})$ với mọi $x > 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \Rightarrow h(x) = h(1)$ với mọi $x > 0 \Rightarrow \varphi(x) = \text{const} = a$ với mọi $x \in (-1, 1) \Rightarrow f(x) = \frac{a}{1-x^2}$ với mọi $x \in (-1, 1)$ (thử lại thấy thỏa mãn).

MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 3.2.6. Tìm hàm f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn

$$f(x^3) - x^2 f(x) = \frac{1}{x^3} - x, \quad \forall x > 0.$$

Gợi ý. Đặt $\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} = g(x)$ thì g liên tục trên $\mathbb{R}^+$, đồng thời $g(x^3) = g(x)$ với mọi $x > 0$. Từ đó $g(x) = g(1) = c$ với $c \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Suy ra $f(x) = cx + \frac{1}{x}$ với $x > 0$.

Bài tập 3.2.7. Tìm hàm f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$(f(x^3) - x^6)(f(x^2) - x^4) = x^5, \quad \forall x > 0.$$

Gợi ý. Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x} - x$ với mọi $x > 0$.

Bài tập 3.2.8. Tìm tất cả các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x) = f\left(\frac{x(x^2 + 3 \cdot 2011^2)}{3x^2 + 2011^2}\right), \quad \forall x > 0.$$

Gợi ý. Với $x > 0$ xét dãy $x_0 = x, x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3 \cdot 2011^2)}{3x_n^2 + 2011^2}$. Giải phương trình

$$x = \frac{x(x^2 + 3 \cdot 2011^2)}{3x^2 + 2011^2}$$

ta được nghiệm $x = 2011$.

- Nếu $0 < x < 2011$ thì chứng minh dãy x_n tăng và bị chặn trên bởi 2011. Dẫn đến x_n hội tụ đến 2011.

- Nếu $x \geq 2011$ thì chứng minh dãy x_n không giảm và bị chặn dưới bởi 2011. Từ đó x_n hội tụ đến 2011.

Từ đó sử dụng tính liên tục của f ta suy ra $f(x) \equiv 0$ với mọi $x > 0$.

Bài tập 3.2.9. Tìm tất cả các hàm số liên tục thỏa mãn

$$f(x) = f(1 - \cos x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Xét dãy $x_{n+1} = 1 - \cos x_n, n \in \mathbb{N}$ và x_0 tùy ý. Ta chứng minh x_n hội tụ đến 0, từ đó sử dụng tính liên tục của f suy ra $f(x) = \text{const}$.

3.3. Sử dụng tính đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Xét phương trình

$$f(g(x, y)) = xh(x, y) + t(x, y)$$

trong đó $g(x, y)$, $h(x, y)$, $t(x, y)$ là các hàm với ẩn x, y , $f(x)$, $f(y)$ đã biết.

Giả thiết 1. $h(x, y) \equiv 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Nếu đúng thì đi đến kết luận. Nếu sai thì tồn tại y_0 : $h(x, y_0) \neq 0 \Rightarrow f(g(x, y_0)) - t(x, y_0)$ là toàn ánh, thay vào giải như bình thường. Nếu đúng thì kết luận. Nếu sai (tức là không giải ra nghiệm) thì sử dụng tính chất toàn ánh, tính vài giá trị đặc biệt rồi thay lại. Nếu có cả tính chất đơn ánh thì sử dụng (tính giá trị đặc biệt có thể dùng mệnh đề đảo). Đến đây nếu dự đoán được nghiệm thì có thể sử dụng mệnh đề đảo để chứng minh. Bước trên không giải quyết được thì đưa về phương trình Cauchy (chứng minh hàm có tính chất Cauchy) hoặc chứng minh hàm hằng.

Giả thiết 2. Dự đoán $f \equiv c$ là nghiệm. Tính a : $f(a) = c$. Sau đó giả sử tồn tại $x_0 \neq a$: $f(x_0) = c$.

+) Nếu $f \equiv c$ đúng thì kết luận: $f(x) = c \Leftrightarrow x = a$, rồi dùng phép thế hợp lý, cuối cùng là kết luận.

+) Nếu sai thì kết luận không phù hợp.

Bài toán 3.3.1. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - f(y)) = 2f(x) + x + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Chú ý: Nếu có hàm $g(x)$ thỏa mãn $f(g(x)) = ax + b$ với $a \neq 0$ thì f là toàn ánh.

Lời giải. Thay $y = 0$ vào (1), ta có

$$f(x - f(0)) - 2f(x) = x + f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $h(x) = f(x - f(0)) - 2f(x)$ là toàn ánh. Đặt $f(0) = a$, tồn tại x_0 : $h(x_0) = 0$ hay u, v sao cho $f(u) - 2f(v) = t$, $u = v + a$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Vậy ta có

$$\begin{aligned} f(t) &= f(f(u) - 2f(v)) = f(f(u) - f(v) - f(v)) \\ &= 2f(f(u) - f(v)) + f(u) - f(v) + f(v) \end{aligned}$$

$$= 2[f(f(u)) + f(u) + f(v)] + f(u).$$

Cần tính $f(f(u))$. Tại (1) thay x bởi $f(y)$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &= 2f(f(y)) + 2f(y) \Rightarrow 2f(f(y)) = -2f(y) + a \\ \Rightarrow f(t) &= 2[-2f(u) + f(u) + f(v) + a] + f(u) \\ &= -f(u) + 2f(v) + 2a = -t + 2a, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay $t = 0 \Rightarrow a = 2a \Rightarrow a = 0$. Vậy $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.3.2. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

- i, $f(x - f(y)) + f(y) = f(x - y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ (1);
- ii, $f^{-1}(0)$ là tập hữu hạn.

Lời giải. Dựa vào yêu cầu bài toán, ta liên tưởng đến giả thiết đã nêu trước đó. Dễ thấy nếu sử dụng, ta dùng giả thiết 2.

Thay $x = y = 0 \Rightarrow f(-f(0)) = 0$. Vậy tồn tại $a: f(a) = 0$.

Thay $x = y = a \Rightarrow f(a - f(a)) + f(a) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Thay lại $y = a$ vào (1), ta có

$$f(x) = f(x - a), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Vậy giả sử tồn tại $a \neq 0: f(a) = 0$. Quy nạp từ (2) suy ra $f(ka) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ (vô lý do $f^{-1}(0)$ là hữu hạn). Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Thay $x = 2y$ vào (1),

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(2y - f(y)) + f(y) &= f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 2y - f(y) &= 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(y) &= 2y, \quad \forall y \in \mathbb{R} \text{ (thử lại thấy thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Bài toán 3.3.3. Tìm $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{y}\right) = yf(y)f(f(x)), \quad \forall x, y > 0. \quad (1)$$

Lời giải. Trước hết, ta thử tính các giá trị đặc biệt.

Thay $y = 1 \Rightarrow f(f(x)) = f(1)f(f(x)) \quad \forall x > 0 \Rightarrow f(1) = 1$.

Thay $y = f(x) \Rightarrow f(1) = f(x)f(f(x))f(f(x)) \Rightarrow (f(f(x)))^2 = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Dự đoán $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ với mọi $x > 0$.

Để ý từ (1), thay $x = 1$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) &= yf(y) \quad \forall y > 0 \\ \Rightarrow \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{f(y)} &= y \quad \forall y > 0. \end{aligned}$$

Vậy $h(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} = x$ là toàn ánh. Suy ra với mọi $t > 0$, tồn tại $u, v > 0$: $\frac{f(u)}{f(v)} = t$. Ta có

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(\frac{f(u)}{f(v)}\right) = f(v) \cdot f(f(v)) \cdot f(f(u)) \\ &= f(v) \cdot \frac{1}{\sqrt{f(v)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(u)}} = \sqrt{\frac{f(v)}{f(u)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Vậy $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ với mọi $t > 0$ là hàm cần tìm.

Bài toán 3.3.4. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Tính vài giá trị đặc biệt. Thay $y = 0$,

$$f(x - f(0)) = f(f(0)) + xf(0) + f(x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ta đang muốn dùng tính chất toàn ánh, vậy hãy xem $f(0) = 0$?

Giả sử $f(0) = 0$, từ (2) $\Rightarrow f(x) = f(x) - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (vô lý). Vậy $f(0) \neq 0$, suy ra $f(x - f(0)) - f(x) = xf(0) + f(f(0)) - 1$ là song ánh. Suy ra với mọi $t \in \mathbb{R}$, tồn tại u, v : $t = f(u) - f(v)$.

$$\Rightarrow f(t) = f(f(u) - f(v)) = f(f(v)) + f(u)f(v) + f(f(u)) - 1. \quad (3)$$

Ta cần tính $f(f(x))$. Thay $x = f(y)$, ta có $f(0) = 2f(f(y)) + f^2(y) - 1$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Đặt $a = f(0)$,

$$\Rightarrow f(f(y)) = \frac{1}{2}(a + 1 - f^2(y)), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (3) \Leftrightarrow f(t) &= \frac{1}{2}[2a + 2 - f^2(u) - f^2(v) + 2f(u)f(v) - 2] \\ &= -\frac{1}{2}[f(u) - f(v)]^2 + a = -\frac{1}{2} \cdot t^2 + a. \end{aligned}$$

Vậy $f(t) = -\frac{1}{2} \cdot t^2 + a$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Thay vào (4),

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cdot y^2 + a \right]^2 + a &= \frac{1}{2} \left[a + 1 - \left(-\frac{1}{2}y^2 + a \right)^2 \right], \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}a^2 + a &= \frac{1}{2}(a + 1 - a^2) \\ \Leftrightarrow a &= 1. \end{aligned}$$

Thử lại $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.3.5. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f^2(y) + 2xf(y) + f(-x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thử vài giá trị đặc biệt. Cho $y = 0$, ta có

$$f(x + f(0)) = f^2(0) + 2xf(0) + f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Để ý tính toàn ánh dựa vào $f(0)$ ở (2) hay $f(y)$ ở (1).

Sử dụng giả thiết 1:

Trường hợp 1: $f \equiv 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Trường hợp 2: Tồn tại $a: f(a) \neq 0$, thay $y = a$ vào (1) ta có

$$f(x + f(a)) = f^2(a) + 2xf(a) + f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra với mọi $t \in \mathbb{R}$, tồn tại $u, v: f(u) - f(v) = t$.

$$\Rightarrow f(t) = f(f(u) - f(v)) = f(-f(v) + f(u)) = f^2(u) - 2f(v)f(u) + f(f(v)).$$

Ta cần tính $f(f(x))$. Thay $x = 0$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} f(f(y)) &= f^2(y) + f(0) = f^2(y) + b \\ \Rightarrow f(t) &= f^2(u) - 2f(u)f(v) + f^2(v) + b \\ &= t^2 + b, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay lại (2), ta có

$$(x + y^2 + b)^2 + b = (y^2 + b)^2 + 2x(y^2 + b) + x^2 + b, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy $f(x) = x^2 + b$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, hoặc là $f \equiv 0$.

Bài toán 3.3.6. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = 1 \Rightarrow f(f(y) + 1) = y + f(1)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là song ánh $\Rightarrow$ tồn tại $a: f(a) = 0$. Thay $y = a$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = ax + f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 0$.

Do f là toàn ánh nên tồn tại $b: f(b) = -1$. Thay $y = b \Rightarrow f(xf(b) + x) = bx + f(x) \Rightarrow f(x) = bx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay lại (1) ta có $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$. Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, hoặc $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Bài toán 3.3.7. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xy)f(x+y) = 1, \quad \forall x, y > 0. \quad (1)$$

Lời giải. Chọn x, y sao cho $xy = x + y \Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1}$ với mọi $y > 1$. Khi đó

$$f^2\left(\frac{y^2}{y-1}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{y^2}{y-1}\right) = 1.$$

Ta cần xét tập giá trị của $\frac{y^2}{y-1}$ với mọi $y > 1$. Đặt $\frac{y^2}{y-1} = a$, hay là $y^2 - ay + a = 0$ (với $a > 0$). Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 4$. Gọi y_1, y_2 là hai nghiệm. Khi đó theo định lý Viét, ta có $y_1 + y_2 = a$ và $y_1 y_2 = a$. Vậy $f(y) = 1$ với mọi $y \geq 4$.

Thay $y = 4$ vào (1), ta có

$$\begin{aligned} f(4x)f(x+4) &= 1 \Rightarrow f(4x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow f(x) &= 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Bài toán 3.3.8. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y)) = 3f(x) + f(y) - 2x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $y = 0$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} f(x + f(0)) &= 3f(x) + f(0) - 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x + f(0)) - 3f(x) &= -2x + f(0). \end{aligned} \quad (2)$$

Vế phải của (2) là toàn ánh nên tồn tại $u, v \in \mathbb{R}$: $f(u) - 3f(v) = t$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f(t) = f(f(u) - 3f(v)) = 3f(-3f(v)) + f(u) + 6f(v).$$

Ta cần tính $f(-3f(v))$. Đặt $f(0) = a$, thay x bởi $-f(y)$ vào (1) ta có

$$f(0) = 3f(-f(y)) + f(y) + 2f(y) \Rightarrow f(-f(y)) = -f(y) + \frac{a}{3}.$$

Thay x bởi $-2f(y)$, ta có

$$\begin{aligned} f(-f(y)) &= 3f(-2f(y)) + f(y) + 4f(y) \Rightarrow 3(-2f(y)) = -6f(y) + \frac{a}{3} \\ \Rightarrow f(-2f(y)) &= -2f(y) + \frac{a}{9}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $f(-3f(y)) = -3f(y) + \frac{a}{3^3}$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$f(t) = 3 \left(-3f(v) + \frac{a}{27} \right) + f(u) + 6f(v) = t + \frac{a}{9}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Thay $t = 0$, ta có $a = \frac{a}{9} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(t) = t$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn). Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hàm cần tìm. • Đối với phương trình hàm (tìm f, g) dạng:

$$f(F(x, y)) + f(G(x, y)) = g(H(x, y))$$

trong đó $F(x, y), G(x, y), H(x, y)$ là các hàm hai biến x, y biết trước. Ta chỉ ra rằng $H(x, y) = t$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ luôn có nghiệm hay $H(x, y)$ là toàn ánh. Khi đó bài toán đưa về lựa chọn x, y, u, v sao cho

$$\begin{cases} H(x, y) = a \\ H(u, v) = b \\ F(x, y) = G(u, v) \\ G(x, y) = F(u, v) \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

tương đương chỉ ra rằng hệ có nghiệm: (x, y, u, v) (không cần tìm nghiệm). Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(F(x, y)) + f(G(x, y)) &= f(G(u, v)) + F(F(u, v)) \\ \Rightarrow g(H(x, y)) &= g(H(u, v)) \Rightarrow g(a) = g(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bài toán 3.3.9. Tìm cặp $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3 + 2y) + f(x + y) = g(x + 2y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Xét hệ

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ u + 2v = b \\ x^3 + 2y = u + v \\ x + y = u^3 + 2v \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \frac{a - x}{2} \quad (3) \Rightarrow x^3 - x + a = u + \frac{b - u}{2} \\ \Rightarrow v &= \frac{b - u}{2} \quad (4) \Rightarrow x^3 - x + a = \frac{b + u}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

Cần phải tính u theo x, a, b . Tính tương tự x , ta có

$$\begin{aligned} u^3 - u + b &= \frac{a + x}{2} \Rightarrow x = 2u^3 - 2u + 2b - a \quad (2) \\ \Rightarrow (2u^3 - 2u + 2b - a)^3 - (2u^3 - 2u + 2b - a) + a - \frac{b + u}{2} &= 0 \end{aligned}$$

là phương trình bậc 9 $\Rightarrow$ có nghiệm $\Rightarrow x$ theo (2). Từ đó, ta có y, v theo (3) và (4). Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.3.10. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3 + 4y) + f(x + y) = g(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Tìm x, y, u, v thỏa mãn

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^3 + 4y = u + v = a \\ x + y = u^3 + 4v = b \end{cases} \\ \Rightarrow y = b - x \Rightarrow x^3 - 4x + 4b - a = 0 \text{ có nghiệm } x. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Ta có $g(x) = \text{const} = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f(x^3 + 4y) + f(x + y) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(a) + f(b) = c$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f(a) = f(b) = \frac{c}{2}$.

Bài toán 3.3.11. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3 + 2y) = f(x + y) + f(3x + y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Để ý chọn y sao cho: $x^3 + 2y = x + y \Leftrightarrow y = x - x^3$. Thế y bởi $x - x^3$ ta có $f(4x - x^3) = -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình $4x - x^3 = t$ luôn có nghiệm với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) = -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.3.12. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - f(y)) = 2f(x) + x + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Cho $y = 0$, ta có

$$\begin{aligned} f(x - f(0)) &= 2f(x) + x + f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x - f(0)) - 2f(x) &= x + f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suy ra với mọi $t \in \mathbb{R}$, tồn tại u, v : $f(u) - 2f(v) = t$. Ta có

$$\begin{aligned} f(t) &= f(f(u) - 2f(v)) = 2f(f(u) - f(v)) + f(u) - f(v) + f(v) \\ &= 2[2f(f(u)) + f(u) + f(v)] + f(u) \end{aligned}$$

Tính $f(f(x))$. Đặt $a = f(0)$, thay x bởi $f(y)$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} a &= 2f(f(y)) + 2f(y) \Rightarrow f(f(y)) = -f(y) + \frac{a}{2}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(t) &= 2[-f(u) + a + f(v)] + f(u) = 2a - t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay $t = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn). Vậy $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hàm cần tìm.

Bài toán 3.3.13. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(f(x) - y^2) = f^2(x) - 2f(x)y^2 + f(f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Phân tích bài toán: Để ý ở đây có y độc lập dạng y^2 , khác với bình thường là $y, y^3, \dots, y^{2n+1}$, nhưng ta vẫn có thể sử dụng được giả thiết với một

nửa của tập $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$ hoặc $\mathbb{R}^-$). Để ý chút nữa, nếu cố định x , ta vẫn có $f(f(y))$ đi cùng với việc xét y của ta. Đối với những bài như thế, ta phải tìm hệ thức liên hệ của $f(f(y))$ theo $f(y)$ trước.

Thay $y = 0$ vào (1), ta có $f(f(x)) = f^2(x) + f(f(0))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy ta có đánh giá hệ thức. Hơn nữa, cho $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f^2(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (dự đoán $f(x) = x^2$) (*).

Viết lại (1): $f(f(x) - y^2) = f^2(x) - 2f(x)y^2 + f^2(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Ta xét tới giả thiết 1.

Trường hợp 1. $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. Tồn tại $x_0 \neq 0$: $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(f(x_0)) = f^2(x_0) > 0 \Rightarrow$ tồn tại $a \in \mathbb{R}$: $f(a) > 0$. Thay $x = a$ vào (1), ta có

$$\begin{aligned} f(f(a) - y^2) &= f^2(a) - 2f(a)y^2 + f^2(y), & \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(f(a) - y^2) - f^2(y) &= f^2(a) - 2f(a)y^2, & \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tìm tập giá trị của $f^2(a) - 2f(a)y^2 \in (-\infty, f^2(a)]$. Vậy với mọi $t \leq 0$, tồn tại u, v : $f(u) - f^2(v) = t$.

$$\Rightarrow f(t) = f(f(u) - f^2(v)) = f^2(u) - 2f(u)f^2(v) + f^4(v) = [f(u) - f^2(v)]^2 = t^2.$$

Vậy $f(t) = t^2$ với mọi $t \leq 0$.

Với $x \geq 0$, ta có $f(x) = f((\sqrt{x})^2) = f(f(-\sqrt{x})) = f^2(-\sqrt{x})$ (sử dụng (*))
 $\Rightarrow f(x) = x^2$ với mọi $x \geq 0$ (thật ra có $f(t^2) = f(f(t)) = f^2(t) = t^4$ với mọi $t \leq 0 \Rightarrow f(x) = x^2$ với mọi $x \geq 0$). Vậy $f(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Bài toán 3.3.14. Tìm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$2f(3x - 2f(y)) = -4f(f(y)) + 3f(x) - 3x - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Do có $f(f(y))$ nhưng không có y độc lập nên bài này ta làm như bình thường. Cố định y , ta có

$$3f(x) - 2f(3x - 2f(y)) = 3x + 1 - 4f(f(y)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó tồn tại u, v : $3f(u) - 2f(v) = t$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow 2f(t) = 2f(3f(u) - 2f(v)) = -4f(f(v)) + 3f(f(u)) - 3f(u) - 1. \quad (2)$$

Giờ ta thấy cần thiết tính $f(f(x))$. Thay x bởi $f(y)$ vào (1), ta có

$$\begin{aligned} 2f(f(y)) &= -4f(f(y)) + 3f(f(y)) - 3f(y) - 1 \\ \Rightarrow f(f(y)) &= -f(y) - \frac{1}{3}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay vào (2) ta có

$$\begin{aligned} 2f(t) &= 4f(v) + \frac{4}{3} - 3f(u) - 3f(u) - 1 + (-1) \\ &= -2[3f(u) - 2f(v)] - \frac{2}{3} \\ \Rightarrow f(t) &= -t - \frac{1}{3}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ (thử lại thấy thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Bài toán 3.3.15. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + 2f(y)) = 2x + f(y) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Viết lại phương trình

$$f(x + 2f(y)) = x[f(y) + 2] + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Sử dụng giả thiết 1.

Trường hợp 1. $f \equiv -2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. Tồn tại $a: f(a) \neq -2$. Thay $y = a$ vào (1), ta có $f(x + 2f(a)) = x[f(a) + 2] + f(a)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là song ánh $\Rightarrow$ tồn tại $b: f(b) = 0$. Thay $y = b$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không thỏa mãn).

Bài toán 3.3.16. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Dự đoán $f(x) = \pm x$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Thay $x = 0$ vào (1), ta có

$$f(f(y)) = f^2(0) + y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Suy ra f là song ánh. Do f là toàn ánh nên tồn tại $a \in \mathbb{R}: f(a) = 0$. Thay $x = a$ vào (1), ta có

$$f(f(y)) = -y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow f^2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Thay x bởi $f(x)$, $y = 0$ vào (1) ta có

$$f(xf(x)) = (f(f(x)))^2 = x^2.$$

Thay $y = 0$ vào (1), ta có $f(xf(x)) = f^2(x) \Rightarrow f^2(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$. Để ý $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là hàm cần tìm.

Giả sử tồn tại $a, b \neq 0$: $f(a) = a$ và $f(b) = -b$. Thay $x = a, y = b$ vào (1) $\Rightarrow f(a^2 - b) = a^2 + b$. Lại có

$$f(a^2 - b) = \begin{cases} a^2 - b \\ b - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b = a^2 - b \\ a^2 + b = b - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad (\text{vô lý}).$$

Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hai hàm cần tìm.

Bài toán 3.3.17. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = f^2(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Dự đoán $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $x = 0$ vào (1), ta có

$$f(f(y)) = f^2(0) + y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Suy ra f là song ánh. Do f là song ánh nên tồn tại duy nhất a : $f(a) = 0$. Thay $x = y = a$ vào (1), ta có $f(a^2) = a \Rightarrow f(f(a^2)) = f(a)$. Sử dụng (2) ta có $f(f(a^2)) = f^2(0) + a^2$. Do $f(a) = 0 \Rightarrow a^2 + f^2(0) = 0 \Rightarrow a = f(0) = 0$. (2) $\Leftrightarrow f(f(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay $y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(x^2) = f^2(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$.

Thay y bởi $f(y)$ vào (1) ta có $f(x^2 + y) = f^2(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x^2 + y) \geq f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Với $x, y \in \mathbb{R}$ bất kỳ, $x \geq y$ ta có

$$f(x) = f(x - y + y) = f(\sqrt{(x - y)^2} + y) \geq f(y), \quad \forall x \geq y.$$

Vậy f là đồng biến, lại có f là đơn ánh $\Rightarrow f$ tăng ngặt ($x > y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$). Với $x \in \mathbb{R}$, đặt $a = f(x)$. Từ (2) ta có $f(a) = f(f(x)) = x$. Giả sử $a > x \Rightarrow f(a) > f(x) \Rightarrow x > a$ (vô lý). Với $a < x \Rightarrow f(a) < f(x) \Rightarrow x < a$ (vô lý). Vậy $a = x$ hay $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.3.18. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = x + f(y) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. (1) $\Leftrightarrow f(x + f(y)) = x(1 + f(y)) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Áp dụng giả thiết 1.

Trường hợp 1. Xét $f(x) = -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. Tồn tại x_0 : $f(x_0) \neq -1$. Thay y bởi x_0 ta có: $f(x + f(x_0)) = x(1 + f(x_0)) + f(x_0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra f là toàn ánh (chưa là song ánh được). Do f là toàn ánh nên tồn tại a : $f(a) = -1$. Thay $y = a$ vào (1) $\Rightarrow f(x - 1) = -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (vô lý).

Vậy $f(x) \equiv -1$ là hàm cần tìm.

Bài toán 3.3.19. Tìm tất cả các giá trị của a , sao cho tồn tại duy nhất một hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y + f(y)) = (f(x))^2 + ay, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Với $a = 0$, ta có $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ là hai hàm số thỏa mãn. Vậy $a \neq 0$. Vế phải của (1) là hàm bậc nhất của $y \Rightarrow f$ là toàn ánh $\Rightarrow$ tồn tại b : $f(b) = 0$. Thay $x = 0$ vào (1) ta có

$$f(y + f(y)) = f^2(0) + ay, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = b$ vào (1), ta có

$$f(x^2 + b) = f^2(x) + ab. \quad (2)$$

Có $f(x^2 + b) = f^2(-x) + ab \Rightarrow f^2(-x) = f^2(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-b) = 0$. Thay $y = -b$ vào (1), ta có

$$f(x^2 - b) = f^2(x) - ab. \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta có

$$f(x^2 + b) - f(x^2 - b) = 2ab. \quad (4)$$

Từ đây ta dự đoán $b = 0$. Thay $x = 0$ vào (4) $\Rightarrow f(b) - f(-b) = 2ab \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow b = 0$ (do $a \neq 0$). Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $\Leftrightarrow f(x^2) = f^2(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay $x = 1 \Rightarrow f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 1$ hoặc $f(1) = 0$ (vô lý).

Thay $y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(x^2 + 2) = f^2(x) + a = f(x^2) + a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Thay $x = 0$ vào trên ta có: $f(2) = a$.

$$\Rightarrow a^2 = f^2(2) = f(4) = f((\sqrt{2})^2 + 2) = f^2(\sqrt{2}) + a = 2a \Rightarrow a = 2 \text{ (do } a \neq 0\text{)}.$$

Lợi dụng tính chất: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, thay y bởi $-\frac{f^2(x)}{2}$, ta có

$$f\left(x^2 - \frac{f^2(x)}{2} + f\left(-\frac{f^2(x)}{2}\right)\right) = 0 \Rightarrow f\left(-\frac{f^2(x)}{2}\right) = \frac{f^2(x)}{2} - x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay y bởi $\frac{f^2(y)}{2}$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} f\left(x^2 - \frac{f^2(y)}{2} + f\left(-\frac{f^2(y)}{2}\right)\right) &= f^2(x) - f^2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(x^2 - y^2) &= f(x^2) - f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (*)$$

Thay $x = 0$ vào (*) $\Rightarrow f(-y^2) = -f(y^2)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ hay f là hàm lẻ. Do vậy

$$(*) \Leftrightarrow f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Có $f^2(x) = f(x^2) \Rightarrow f^2(x+y) = f((x+y)^2) \Leftrightarrow [f^2(x) + 2f(x)f(y) + f^2(y)] = f(x^2) + f(y^2) + 2f(xy) \Rightarrow f(x)f(y) = f(xy)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Suy ra f vừa là cộng tính vừa là nhân tính $\Rightarrow f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).
Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 3.3.20. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $y = -f(x)$ vào (1) ta có $f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x) \Rightarrow f(f(-f(x)) - x) = -2x + f(0) \Rightarrow f$ là toàn ánh $\Rightarrow$ tồn tại $a: f(a) = 0$.

Thay $x = a$ vào (1) ta có: $f(y) = 2a + f(f(y) - a) \Rightarrow f(f(y) - a) = f(y) - a - a$.
Do f là toàn ánh nên với mọi $t \in \mathbb{R}$, tồn tại $y: t = f(y) - a \Rightarrow f(t) = t - a$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Bài toán 3.3.21. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = f(x + yf(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm thỏa mãn đề bài. Ta muốn triệt tiêu hai vế bằng cách chọn y : $x + yf(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{x}{-f(x) + 1}$. Chọn được như thế nếu $f(x) < 1$.

Trường hợp 1. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}^+$: $f(x_0) < 1$. Chọn $y = \frac{x_0}{1 - f(x_0)}$. Thay vào (1) $\Rightarrow f(x_0) = 1$ (vô lý).

Trường hợp 2. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}^+$: $f(x_0) = 1$ (có thể này do dự đoán $f(x) \equiv 1$ là nghiệm). Thay $x = x_0$ vào (1): $f(x_0)f(y) = f(y + x_0)$ với mọi $y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(y) = f(y + x_0)$ với mọi $y \in \mathbb{R}^+$.

Nhớ lại hệ quả: Tồn tại $a > 0$: $f(x + a) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$, f là hàm đơn điệu $\Rightarrow f(x) \equiv c = \text{const}$.

Ta có $f(x) \geq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Từ (1) $\Rightarrow f(yf(x) + x) \geq f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Với mọi $a > b$, chọn $x = b$, $y = \frac{a - b}{f(b)} \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}^+$ ($a > b$) $\Rightarrow f(x) \equiv c = \text{const}$. Thử lại có $c^2 = c \Rightarrow c = 1$.

Trường hợp 3. $f(x) > 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Tương tự ta có: $f(a) > f(b)$ với mọi $a > b$, $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f$ là tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$. Có $f(x)f(y) = f(x + yf(x))$, $f(y)f(x) = f(y + xf(y))$, do f tăng ngặt ($\Rightarrow f$ là đơn ánh) $\Rightarrow x + yf(x) = y + xf(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{f(y) - 1}{y}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{f(x) - 1}{x} = \text{const} = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ ($c > 0$) $\Rightarrow f(x) = cx + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ ($c > 0$) (thỏa mãn bài toán).

Bài toán 3.3.22. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = y = 0$ vào (1) ta có: $f(0) = 0$. Lại có $f(x^2 - y^2) = f(x^2 - (-y)^2) = xf(x) + yf(-y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow yf(-y) = -yf(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = -f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay $y = 0$ vào (1) ta có: $f(x^2) = xf(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow f(x^2) = f(x^2 - y^2) + f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

hay

$$f(u) = f(u - v) + f(v), \quad \forall u, v \geq 0. \quad (2)$$

Thay $u = 2t$, $v = t$ vào (2) ta có: $f(2t) = 2f(t)$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Ta tính $f(2t + 1)$ theo hai cách:

+) Thay $u = t + 1, v = 1$ vào (2) $\Rightarrow f(t + 1) = f(t) + f(1)$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

+) Thay $x = t + 1, y = t$ vào (1) ta có:

$$f(2t+1) = f((t+1)^2 - t^2) = (t+1)f(t+1) - tf(t) = f(t) + (t+1)f(1), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Thay $u = 2t + 1, v = 1$ vào (2) ta có:

$$f(2t + 1) = f(2t) + f(1) = 2f(t) + f(1), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow f(t) = tf(1) = at$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ ($a = \text{const}$). Thử lại thấy hàm số trên thỏa mãn.

Bài toán 3.3.23. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f((1+x)f(y)) = yf(f(x)+1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Rõ ràng với bài này có y nằm ngoài thì f có khả năng là đơn ánh. Để sử dụng được, ta hãy xét các giả thiết. Sử dụng giả thiết 1.

Trường hợp 1. Tồn tại $a \in \mathbb{R}$: $f(f(a)+1) \neq 0$.

Thay $x = a$, ta có: $f((1+a)f(y)) = yf(f(a)+1) \Rightarrow f$ là song ánh. Thay $y = 1 \Rightarrow f((x+1)f(1)) = f(f(x)+1)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = (x+1)f(1) - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2. (Phủ định của trường hợp 1) Với mọi $x \in \mathbb{R}$: $f(f(x)+1) = 0$.

$$f((x+1)f(y)) = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Để ý trong (*), nếu tồn tại k : $f(k) \neq 0$. Thay $y = k$ vào (*) $\Rightarrow f((x+1)f(k)) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay x bởi $\frac{x}{f(k)} - 1 \Rightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (vô lý). Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn). (Rõ ràng ta thấy trong trường hợp 2, ta đã sử dụng giả thiết 2).

Bài toán 3.3.24. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn phương trình (1).

Ta sử dụng giả thiết 1.

Trường hợp 1. $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn.

Trường hợp 2. Tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0) \neq 0$.

Thay x bởi x_0 , ta có $f(x_0 f(y)) = y f(x_0)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là song ánh. Lại có f liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f$ tăng ngặt hoặc giảm ngặt. Thay $x = y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(0) = 0$. Thay $y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(x f(1)) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x f(1) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(1) = 1 > f(0) \Rightarrow f$ tăng ngặt. Thay $x = 1$ vào (1), ta có: $f(f(y)) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Giả sử tồn tại y_0 : $f(y_0) > y_0 \Rightarrow f(f(y_0)) > f(y_0) > y_0$ (vô lý). Giả sử tồn tại y_0 : $f(y_0) < y_0 \Rightarrow f(f(y_0)) < f(y_0) < y_0$ (vô lý). Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm này thỏa mãn.

Bài toán 3.3.25. Tìm $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(f(n) + m) = n + f(m + 2003), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm thỏa mãn phương trình (1). Giả sử tồn tại n_1, n_2 : $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow f(f(n_1) + m) = f(f(n_2) + m) \Rightarrow n_1 + f(m + 2003) = n_2 + f(m + 2003) \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow f$ là đơn ánh.

Thay m bởi $f(1)$ vào (1), ta có:

$$\begin{aligned} f(f(n) + f(1)) &= n + f(f(1) + 2003) \\ &= n + 1 + f(2003 + 2003) \\ &= f(f(n + 1) + 2003), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(n + 1) = f(n) + f(1) - 2003$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow f(n)$ là một cấp số cộng với công sai $f(1) - 2003$, với số hạng đầu là $f(1) \Rightarrow f(n) = f(1) + (n - 1)[f(1) - 2003]$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ hay $f(n) = an + b$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Thay vào (1) $\Rightarrow a = 1, b = 2003 \Rightarrow f(n) = n + 2003$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 3.3.26. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = x f(y) + f(f(x) + f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Dựa vào đề bài, dễ thấy ta sẽ sử dụng giả thiết 1.

Trường hợp 1. $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Trường hợp 2. Tồn tại x_0 : $f(x_0) \neq 0$.

Thay $y = x_0$ vào (1) $\Rightarrow f(f(x) + x_0) = x f(x_0) + f(f(x) + f(x_0))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử tồn tại x_1, x_2 : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1) + x_0) - f(f(x_2) + x_0) =$

$f(f(x_2) + x_0) - f(f(x_2) + f(x_0)) \Rightarrow x_1 f(x_0) = x_2 f(x_0) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ (do $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ là đơn ánh. Thay $x = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(f(0) + y) = f(f(0) + f(y))$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) + y = f(0) + f(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy không thỏa mãn).

Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hàm cần tìm.

Bài toán 3.3.27. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + xf(y) + k, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (} k \in \mathbb{R} \text{ là hằng số bất kỳ)}. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử tồn tại f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thay $x = y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(f(0)) = f(0) + k$.

+) Với $k \neq 0$: Nếu $f(0) = 0 \Rightarrow k = 0$ (vô lý). Vậy $f(0) \neq 0$. Thay $y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(f(x)) = f(x) + xf(0) + k$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(f(x)) - f(x) = xf(0) + k$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có $xf(0) + k$ là hàm bậc nhất $\Rightarrow$ tồn tại $u \in \mathbb{R}$: $f(u) = u$. Thay $x = u$ vào (1) $\Rightarrow f(f(u) + y) = f(u + y) + uf(y) + k$ với mọi $y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow uf(y) + k = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Nếu $k > 0$, thay $y = u \Rightarrow u^2 = -k < 0$ (vô lý) $\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm. Nếu $k < 0$, thay $y = u \Rightarrow u^2 = -k \Rightarrow u = \sqrt{-k} \neq 0$ hoặc $u = -\sqrt{-k} \neq 0$. Từ (2) $\Rightarrow f(y) = \frac{k}{u}$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) $\Rightarrow \frac{k}{u} = \frac{k}{u} + x \frac{k}{u} + k$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow k = 0$ (vô lý). Vậy $k < 0$, phương trình không có nghiệm.

+) $k = 0$, (1) $\Leftrightarrow f(f(x) + y) = f(x + y) + xf(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ (3). Thay $x = y = 0 \Rightarrow f(f(0)) = f(0)$. Đặt $a = f(0) \Rightarrow f(a) = a$. Thay $x = a$ vào (3) $\Rightarrow f(a + y) = f(f(a) + y) = f(a + y) + af(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow af(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 0$ hoặc $a \neq 0 \Rightarrow f(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ (vô lý do $f(0) = a \neq 0$).

+) $a = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Thay $y = 0$ vào (3) $\Rightarrow f(f(x)) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay x bởi $f(x)$ vào (3) có

$$f(f(x) + y) = f(f(f(x)) + y) = f(f(x) + y) + f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow f(x)f(y) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Thay $y = x \Rightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Bài toán 3.3.28. (Morocco National Olympiad, day 3; Spain Mathematical Olympiad 2012). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(x - 2)f(y) + f(y + f(x)) = f(x + yf(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Trường hợp $f(0) = 0$: Từ (1) cho $x = 0$ ta được $f(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Trường hợp $f(0)$ khác 0: Đặt $f(0) = c$, từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$(x - 2)c + f(2f(x)) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử $f(x_1) = f(x_2)$. Từ (2) suy ra $(x_1 - 2)c = (x_2 - 2)c \Rightarrow x_1 = x_2$. Vậy f là đơn ánh. Từ (2) cho $x = 2$ ta được $f(2f(2)) = f(2) \Rightarrow 2f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 1$. Vì hàm số $f(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn (1) nên giả sử tồn tại $x_0 \neq 2$ sao cho $f(x_0)$ khác 1. Trong (1) cho $y = \frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1}$, ta được

$$(x_0 - 2)f\left(\frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1}\right) = 0. \quad (3)$$

Trong (1) cho $x = \frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1}$ và sử dụng (3) ta được

$$\left[\frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1} - 2\right]f(y) + f(y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(y) \cdot \frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Nếu $f(x_0) - x_0 + 1$ khác 0 thì từ (4) suy ra $f(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Nếu $f(x_0) - x_0 + 1 = 0$ thì $\frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1} = 1$, kết hợp với (3) suy ra $f(1) = 0$.

Từ (1) cho $y = 1$ ta được $f(1 + 2x) = f(x + f(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + 2f(x) = x + f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (do f là đơn ánh) $\Rightarrow f(x) = x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.3.29. (European Gir's MO - 2012). Hãy tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f((x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(f(x)) = 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra f là một song ánh. Do đó tồn tại a, b sao cho $f(a) = 2$, $f(b) = 4a$.

Từ (1) thay $y = -x + a$ ta được

$$f(2(-x + a) + f(x)) = 4x + 4(-x + a) = 4a = f(b), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Do f là đơn ánh nên từ (3) ta có $-2x + 2a + f(x) = b$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = 2x + c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được $2(2x + c) + c = 4c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $c = 0$. Vậy $f(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.3.30. (Kyrgyzstan National Olympiad 2012). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Ký hiệu $P(u, v)$ chỉ cho việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(0, y) \Rightarrow f(f(0)^2 + f(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra f là toàn ánh. Do đó có $c \in \mathbb{R}$ sao cho $f(c) = 0$.

$$P(c, y) \Rightarrow f(f(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3) suy ra f là đơn ánh. Như vậy f là song ánh.

Sử dụng (3) và thực hiện $P(f(x), y)$, ta được

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y = f(f(x)^2 + f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Do f là song ánh nên từ (4) suy ra

$$x^2 + f(y) = f(x)^2 + f(y) \Rightarrow [f(x)]^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Dễ thấy hàm số $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (1).

Ta sẽ chứng minh ngoài hai hàm này không còn hàm nào khác thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn (1) và $f(x)$ khác x , $f(x)$ khác $-x$. Khi đó tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) \neq a$ và tồn tại $b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(b) \neq -b$. Do (5) nên $f(a) = -a$ và $f(b) = b$.

$$P(b, a) \Rightarrow f(b^2 - a) = b^2 + a \Leftrightarrow \pm(b^2 - a) = b^2 + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 - a = b^2 + a \\ a - b^2 = b^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad (\text{mâu thuẫn}).$$

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.3.31. (Moroccan Mathematical Olympiad 2012). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1 - f(1)) \neq 0$ và

$$f\left(x - f\left(\frac{x}{y}\right)\right) = xf\left(1 - f\left(\frac{1}{y}\right)\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0. \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $a = f(1 - f(1)) \neq 0$. Từ (1) cho $y = 1$ ta được

$$f(x - f(x)) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (2) thay x bởi $x - f(x)$ suy ra

$$f((1 - a)x - f(x)) = a(x - f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Nếu $a \neq 1$, từ (1) thay x bởi $(1 - a)x$ và $y = 1 - a$, khi đó

$$f((1 - a)x - f(x)) = (1 - a)bx, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad b = f\left(1 - f\left(\frac{1}{1 - a}\right)\right).$$

Kết hợp với (2) suy ra $a(x - f(x)) = (1 - a)bx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hay $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Lúc này điều kiện $f(1 - f(1)) \neq 0$ nghĩa là $c(1 - c) \neq 0 \Leftrightarrow c \notin \{0; 1\}$.

MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 3.3.32. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $4f(f(x)) = 2f(x) + x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(0) = 0$.

Bài tập 3.3.33. Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(2f(n) - f(m)) = 2n - m, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 3.3.34. (Latvia TST). Tìm $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trong đó g là đơn ánh và

$$f(g(x) + y) = g(f(y) + x), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Gợi ý. Dễ thấy $f(g(0) + y) = g(f(y))$ và $g(f(0) + x) = f(g(x))$. Từ đó suy ra

$$g(f(g(x))) = f(g(0) + g(x)) = g(f(g(0)) + x).$$

Do g đơn ánh nên $f(g(x)) = f(g(0)) + x$, nhưng $f(g(x)) = g(f(0) + x)$. Từ đó suy ra nghiệm của bài toán là $g(x) = x + a$ và $f(x) = x + b$ với a, b tùy ý.

Bài tập 3.3.35. (Germany TST 2009). Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biết rằng $x^3 + xf(y) + f(z) = 0$ thì $[f(x)]^3 + yf(x) + z = 0$.

Gợi ý. Chứng minh f toàn ánh, đơn ánh và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Từ đó chỉ ra $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.3.36. (IMO 2009, Shortlist). Tìm tất cả các hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Chứng minh f toàn ánh, đơn ánh. Từ đó suy ra hàm cần tìm là $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.3.37. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = -2y + f(f(y) - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3.3.38. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - f(y)) = 2f(x) + x + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Lấy $x = f(y)$ ta có $f(f(y)) = -f(y) + \frac{f(0)}{2}$. Biểu diễn $f(f(x) - f(y))$ theo $f(x) - f(y)$ như sau

$$f(f(x) - f(y)) = -[f(x) - f(y)] + f(0).$$

Sau đó thay x bởi $f(x) - f(y)$ ta được $f(f(x) - 2f(y)) = -[f(x) - 2f(y)] + 2f(0)$. Từ đó suy ra $f(0) = 0$.

Chỉ ra miền giá trị của $f(x) - 2f(y)$ là $\mathbb{R}$. Nên $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.3.39. (Balkan 2007). Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Ta tìm nghiệm khác nghiệm tầm thường $f(x) \equiv 0$. Cách giải dùng miền giá trị tương tự bài toán IMO 1999.

Bài tập 3.3.40. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, giả sử $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và $f^n(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$. Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Gợi ý. Sử dụng tính chất nếu f liên tục và đơn ánh thì f đơn điệu. Mà $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$ nên f đồng biến. Từ đây suy ra $f(x) = x$.

Bài tập 3.3.41. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ đơn ánh thỏa mãn

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Gợi ý. $f(n) = n$ là hàm cần tìm.

Bài tập 3.3.42. (Romania 1986). Giả sử $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn f là toàn ánh, g là đơn ánh và thỏa mãn $f(n) \geq g(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $f \equiv g$.

Gợi ý. Giả sử $f(n) \neq g(n)$ với $n \in \mathbb{N}$ nào đó. Đặt $A = \{g(n) : f(n) \neq g(n)\}$. Bằng cách xét phần tử nhỏ nhất $g(p)$ của A , đồng thời sử dụng tính song ánh của f , đơn ánh của g , ta suy ra tồn tại $g(q) \in A$ mà $g(q) < g(p)$, mâu thuẫn. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 3.3.43. (VMO 1993 - Bảng A). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = 1993 \cdot n^{1945}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài tập 3.3.44. Cho $c \in \mathbb{R}$, $0 < c \leq 1$. Chứng minh rằng không tồn tại $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = x + c, \quad \forall x > 0. \quad (*)$$

Gợi ý. Giả sử tồn tại f . Khi đó f đơn ánh và với mọi $x > c$ thì tồn tại $y \geq 2$ sao cho $f(y) = x$. Do f đơn ánh nên tồn tại $a \in (0, 2)$ để $f(a)$ khác c .

• Nếu $f(a) > c$, theo nhận xét ban đầu tồn tại $x \geq 2$ sao cho $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$.

• Nếu $f(a) < c$ thì $\frac{1}{f(a)} > \frac{1}{c} \geq c$. Do đó tồn tại x để $f(x) = \frac{1}{f(a)}$. Khi đó theo

(*) ta sẽ có $x = a \Rightarrow \frac{1}{f(a)} = f(a)$ hay $f(a) = 1$, nhưng $f(a) < c \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 3.3.45. (Iran TST 2011). Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toàn ánh thỏa mãn

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3.4. Sử dụng tính đơn điệu

Lưu ý:

- a, Nếu f cộng tính và đơn điệu trên $\mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{R}^+$) thì $f(x) = kx$.
- b, Nếu f đơn điệu thực sự thì f là đơn ánh.
- c, Trong một vài trường hợp, nếu dự đoán được công thức của hàm số chẳng hạn $f(x) = g(x)$ thì có thể xét $f(x) < g(x)$ và $f(x) > g(x)$, sau đó sử dụng tính chất đơn điệu để suy ra vô lý.
- d, Nếu f đơn điệu và đã có công thức của f trên tập $\mathbb{Q}$ thì dùng kỹ thuật chọn hai dãy hữu tỷ đơn điệu ngược nhau rồi chuyển qua giới hạn.
- e, Nếu f đơn điệu và chỉ ra f là tuần hoàn thì có thể suy ra $f = \text{const}$.

Bài toán 3.4.1. Tìm f đơn điệu: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(f(y)) = f(0) + y$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là song ánh. Thay $y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(x + f(0)) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + f(0) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0$. Thay $x = 0$ lại (1) $\Rightarrow f(f(y)) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Thay y bởi $f(y)$ vào (1) $\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Lại có f đơn điệu $\Rightarrow f(x) = kx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay lại (1) $\Rightarrow k = \pm 1$. Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, và $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là các hàm cần tìm.

Bài toán 3.4.2. Tìm f tăng ngặt: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Thay $y = 0$ vào (1) ta có $f(f(x)) = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay x bởi $f(x) \Rightarrow f(f(x) + 1 + y) = f(f(x) + y) + 1$. Thay y bởi $f(y)$ vào (1) ta có $f(f(x) + f(y)) = f(x + f(y)) + 1 = f(x + y) + 2$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(f(x) + 1 + y) = f(f(x) + f(y))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do f tăng ngặt $\Rightarrow f(x) + 1 + y = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y) = y + 1$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 3.4.3. Tìm $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

- (a) f tăng ngặt;
- (b) $f(x) > -\frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$;
- (c) $f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ với mọi $x > 0$.

Lời giải. Thay $x = 1$ vào (c) ta có: $f(1)f(f(1) + 1) = 1$. Đặt $t = f(1) \Rightarrow tf(t + 1) = 1 \Rightarrow t \neq 0$ và $f(t + 1) = \frac{1}{t}$. Thay $x = t + 1$ vào (c), ta có $f(t + 1)f\left(f(t + 1) + \frac{1}{t + 1}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \cdot f\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1} = 1 \Leftrightarrow t^2 + 1 = 2t + 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$+) t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1.$$

Do f tăng ngặt $\Rightarrow 1 < t = f(1) < f(t) < f(t + 1) = \frac{1}{t} < 1$ (vô lý).

$$+) t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow f(1) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \text{ Thế } x \text{ bởi } f(x) + \frac{1}{x} \text{ vào (c) ta có}$$

$$\begin{aligned} f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) f\left(f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f(x) + \frac{1}{x}}\right) &= 1 \\ \Rightarrow f(x) &= f\left(f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f(x) + \frac{1}{x}}\right), \forall x > 0 \\ \Rightarrow x &= f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f(x) + \frac{1}{x}}, \forall x > 0. \end{aligned}$$

Có

$$\begin{aligned} f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{f(x)} \Rightarrow x = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x) + \frac{1}{x}} \text{ với mọi } x > 0 \\ \Rightarrow 2f(x) + \frac{1}{x} &= xf(x) \left[f(x) + \frac{1}{x}\right] \Leftrightarrow 2xf(x) + 1 = x^2 f^2(x) + xf(x) \text{ với mọi } x > 0 \\ \Leftrightarrow (xf(x))^2 - xf(x) - 1 &= 0 \text{ với mọi } x > 0. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xf(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ xf(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2x} > 0 \\ f(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2x} < 0 \end{cases}$$

Nếu tồn tại $a > 0$: $f(a) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2a} \Rightarrow f(a) > 0 > f(1) \Rightarrow a > 1$. Thay $x = a$ vào (1) $\Rightarrow f(a)f\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2a}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2a} = \frac{2a}{1 + \sqrt{5}}\right)$.
 Nếu $\frac{3 + \sqrt{5}}{2a} > a \Rightarrow f\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2a}\right) > f(a) \Rightarrow \frac{2a}{1 + \sqrt{5}} > \frac{1 + \sqrt{5}}{2a} \Leftrightarrow a^2 > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (vô lý).

Tương tự, nếu $\frac{3 + \sqrt{5}}{2a} < a \Rightarrow$ (vô lý).

$$\Rightarrow a^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow f(a) = 1 > f(x), \forall x > 0, x \neq a \text{ (do } f(x) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2a} \text{ với mọi } x \neq a \text{)}.$$

$\Rightarrow$ vô lý do f tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$.

Vậy $f(x) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2x}$ với mọi $x > 0$, thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.4.4. Tìm $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall x, y \in [1, +\infty) \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = 1 \Rightarrow f(f(y)) = yf(1)$ với mọi $y \geq 1 \Rightarrow f$ là đơn ánh. Thay $y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(xf(1)) = f(x)$ với mọi $x > 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(f(y)) = y$ với mọi $y \geq 1 \Rightarrow f$ là song ánh. Có $f(1) = 1$, do f là đơn ánh và $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty) \Rightarrow f(x) > 1$ với mọi $x > 1$. Ta sẽ chứng minh $f(x) > f(y)$ với mọi $x > y \geq 1$. Với $x > 1$, ta có: ($x > y \geq 1$)

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}f(f(y))\right) = f(y)f\left(\frac{x}{y}\right) > f(y).$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0 > 1$: $f(x_0) > x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$ (vô lý). Tương tự, nếu tồn tại $x_0 > 1$: $f(x_0) < x_0 \Rightarrow$ (vô lý). Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \geq 1$. Thử lại thấy hàm số thỏa mãn.

Bài toán 3.4.5. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 1$, không tồn tại hàm đơn điệu ngặt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thay $y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(x + f(0)) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0$. Thay $x = 0$ vào (1) ta có

$$f(f(y)) = y^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay y bởi $f(y)$ vào (1) $\Rightarrow f(x + y^n) = f(x) + f^n(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ (2), thay y bởi $f(y)$ $\Rightarrow f(y^n) = f(f(f(y))) = f^n(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.

$$f(x + y^n) = f(x) + f(y^n). \quad (*)$$

Ta chứng minh n lẻ, do $f(y) \neq f(-y)$ với mọi $y \neq 0$ (do f là đơn ánh) $\Rightarrow f(f(y)) \neq f(f(-y)) \Rightarrow y^n \neq (-y)^n$ với mọi $y \neq 0 \Rightarrow n$ lẻ. Do n lẻ, từ (*) $\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = kx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy không thỏa mãn. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.4.6. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

- (i) $T_f = \{f(x) | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$;
- (ii) f tăng ngặt trên $\mathbb{R}$;
- (iii) $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Dễ thấy $f(x) = x + c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số bất kỳ) thỏa mãn yêu cầu bài toán ($f^{-1}(x) = x - c$). Ta đi chứng minh đây là nghiệm duy nhất. Giả sử tồn tại $x_0 \neq y_0$: $f(x_0) - x_0 = a$, $f(y_0) - y_0 = b$ ($a \neq b$). Ta có $f(x_0) = x_0 + a \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(x_0 + a) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0 + a)$. Có $f(x_0 + a) + f^{-1}(x_0 + a) = 2(x_0 + a) \Rightarrow f(x_0 + a) = x_0 + 2a$. Quy nạp ta được $f(x_0 + ka) = x_0 + (k + 1)a$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Lại có $f^{-1}(x_0) + f(x_0) = 2x_0 \Rightarrow f^{-1}(x_0) = x_0 - a \Rightarrow x_0 = f(x_0 - a)$. Tương tự, quy nạp ta được $f(x_0 - ka) = x_0 - (k + 1)a$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Vậy $f(x_0 + ka) = x_0 + (k + 1)a$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tương tự, $f(x_0 + kb) = y_0 + (k + 1)b$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Giả sử $a > b$, đặt

$$\begin{aligned} k = \left\lfloor \frac{y_0 - x_0}{a - b} \right\rfloor &\Rightarrow k \leq \frac{y_0 - x_0}{a - b} < k + 1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow ka - kb \leq y_0 - x_0 < (k + 1)(a - b) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_0 + ka \leq y_0 + kb \\ y_0 + (k + 1)b < x_0 + (k + 1)a \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Do f tăng ngặt $\Rightarrow f(x_0 + ka) \leq f(y_0 + kb) \Rightarrow x_0 + (k+1)a \leq y_0 + (k+1)b$
(2). (1) và (2) mâu thuẫn.

Trường hợp $b < a$, đặt $k = \left\lfloor \frac{x_0 - y_0}{b - a} \right\rfloor \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy $a = b$, hay giả sử là sai $\Rightarrow f(x) - x = f(y) - y$ với mọi $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) - x = \text{const} \Rightarrow f(x) = x + c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.4.7. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ đơn điệu tăng, thỏa mãn

$$f(xf(y)) = yf(2x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Xét giả thiết 1.

Trường hợp 1. $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. Tồn tại $a: f(a) \neq 0$. Thay $x = a/2$ vào (1) $\Rightarrow f(a/2 \cdot f(y)) = yf(a)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là song ánh. Lại có f đơn điệu tăng $\Rightarrow f$ tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Thay $x = y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(f(1)) = f(2) \Rightarrow f(1) = 2$ (do f là đơn ánh). Thay $x = 1$ vào (1) ta có

$$f(f(y)) = yf(2), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

$\Rightarrow f(yf(2)) = f(f(f(y))) = f(y)f(2)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ (áp dụng (2) với y bởi $f(y)$). Thay x bởi y , $y = 2$ vào (1) $\Rightarrow f(yf(2)) = 2f(2y)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow 2f(2y) = f(y)f(2)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Ta có $f(2) > f(1) = 2 > 0$. Ta dự đoán $f(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giả sử tồn tại $x_0: f(x_0) > 2x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) > f(2x_0) \Rightarrow x_0f(2) > f(2x_0) \Rightarrow 2x_0f(2) > 2f(2x_0) = f(x_0)f(2) \Rightarrow 2x_0 > f(x_0)$ (vô lý).

Giả sử tồn tại $x_0: f(x_0) < 2x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) < f(2x_0) \Rightarrow x_0f(2) < f(2x_0) \Rightarrow 2x_0f(2) < f(2x_0) = f(x_0)f(2) \Rightarrow 2x_0 < f(x_0)$ (vô lý).

Vậy $f(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.4.8. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử có y_1, y_2 sao cho $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow f(x^2 + f(y_1)) = f(x^2 + f(y_2)) \Rightarrow y_1 + f^2(x) = y_2 + f^2(x) \Rightarrow y_1 = y_2$. Vậy f là đơn ánh.

Cố định x , ta có vế phải là hàm bậc nhất theo $y \Rightarrow$ tập giá trị của vế trái (1) $= \mathbb{R}$, hay f là toàn ánh $\Rightarrow$ tồn tại $a: f(a) = 0$. Đặt $f(0) = b$. Thay $x = y = a$

vào (1) $\Rightarrow f(a^2 + f(a)) = a + f^2(a) \Rightarrow f(a^2) = a \Rightarrow f(a) = f(f(a^2)) = f(0 + f(a^2)) = a^2 + f^2(0) = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$. Do f là đơn ánh $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Thay $y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(x^2) = f^2(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ (do $f(x) \neq 0$ với mọi $x \neq 0$). Thay $x = 0$ vào (1) ta có

$$f(f(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Thay y bởi $f(y)$ vào (1) $\Rightarrow f(x^2 + y) = f(y) + f^2(x) = f(y) + f(x^2)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, (x \geq 0). \quad (2)$$

Thay y bởi $-x$ vào (2) $\Rightarrow f(0) = f(-x) + f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Với $x \leq 0$, ta có $f(x+y) = -f(-x-y) = -(f(-x) + f(-y)) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \leq 0$.

Vậy $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta lại có với $x > y$ thì $f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y) > f(y)$ (do $f(x - y) > 0$). Vậy f tăng ngặt trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = kx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay vào (*) ta có $k^2y = y$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow k = 1$ (do $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$). Thử lại thấy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn.

Bài toán 3.4.9. (Xây dựng hai dãy hội tụ) Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \quad \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = y = z = 0$ vào (1) ta có

$$2f(0)[f(0) + f(t)] = 2f(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay $t = 0$ vào (2) $\Rightarrow 4f^2(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ hoặc $f(0) = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 1. $f(0) = \frac{1}{2}$. Thay vào (2) $\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. $f(0) = 0$. Thay $z = t = 0$ vào (1) ta có

$$f(x)f(y) = f(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Thay $x = y = 1$ vào (3) $\Rightarrow f^2(1) = f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$.

a, $f(1) = 0$, thay $y = 1$ vào (3) $\Rightarrow f(x)f(1) = f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

b, $f(1) = 1$. Thay $x = 0, y = t = 1$ vào (1) $\Rightarrow 2f(z) = f(-z) + f(z) \Rightarrow f(-z) = f(z) \Rightarrow f$ là hàm chẵn. Vì vậy ta chỉ cần xét với $x \geq 0$.

Thay $y = t = 1$ vào (1) $\Rightarrow 2(f(x) + f(z)) = f(x - z) + f(x + z)$ với mọi $x, z \in \mathbb{R}$. Thay $z = 1$ ta có

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2(f(x) + f(1)) &= f(x - 1) + f(x + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x + 1) &= 2f(x) - f(x - 1) + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (4), lại có $f(0) = 0, f(1) = 1$, ta quy nạp được $f(n) = n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ (3) thay $x = n, y = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ta có:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(n)f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Với $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$), thay $x = p, y = \frac{1}{q}$ ta có

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Thay $x = y$ vào (3) $\Rightarrow f(x^2) = f^2(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Thay $t = x, z = y$ vào (1) ta có

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 = f^2(x) + 2f(x)f(y) + f^2(y) \geq f^2(x) = f(x^2).$$

$\Rightarrow f$ không giảm trên $[0, +\infty)$. Do $\mathbb{Q}$ là tập trù mật trên $\mathbb{R}$ nên với mỗi $x > 0$, ta chọn được hai dãy hữu tỷ $(u_n), (v_n)$ sao cho $u_n \rightarrow x, v_n \rightarrow x, (u_n)$ không giảm và (v_n) không tăng ($u_n < x < v_n$) với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với mọi $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow u_n^2 \leq f(x) \leq v_n^2$. Cho $n \rightarrow \infty \Rightarrow x^2 \leq f(x) \leq x^2 \Rightarrow f(x) = x^2$ với mọi $x > 0$. Thử lại thấy $f(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn.

Bài toán 3.4.10. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = xf(1 + xy), \quad \forall x, y > 0. \quad (1)$$

Phân tích: Đối với phép thế, ta thường chọn hai cách:

+) Làm xuất hiện các số hạng giống nhau để triệt tiêu.

+) Làm xuất hiện $f(x)$.

+) Triệt tiêu: ta phải chọn sao cho $f(x) + y = 1 + xy$, biến đổi ta có $y = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$. Từ đây, rõ ràng ta thấy nếu chọn được y như thế thì $x = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Vậy nếu $x > 1$ thì $f(x) < 1$; $x < 1$ thì $f(x) > 1$. Để ý thì ta sẽ chứng minh f không tăng.

+) Xuất hiện $f(x)$: Ở vế phải của (1) nếu ta có $y > f(x)$ thì thay y bởi $y - f(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(y) = xf(1 + x(y - f(x)))$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ và $y > f(x)$. Vậy với a, b ta chọn $y > \max\{f(a), f(b)\}$ thì có

$$af(1 + a(y - f(a))) = bf(1 + b(y - f(b))).$$

Ta thử chọn $y: a(y - f(a)) = b(y - f(b)) \Rightarrow y(a - b) = af(a) - bf(b) \Rightarrow y = \frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$. Nếu f tăng ($f(a) > f(b), a > b$) $\Rightarrow y > f(a) > f(b)$. Từ đây ta có lời giải bài toán như sau:

Giả sử tồn tại $u < v$ mà $f(u) < f(v)$.

Chọn $y = \frac{vf(v) - uf(u)}{v - u} > \frac{vf(v) - uf(v)}{v - u} = f(v)$. Thay y bởi $y - f(u)$, x bởi u vào (1) $\Rightarrow f(y) = uf(1 + u(y - f(u)))$. Thay y bởi $y - f(v)$, x bởi v vào (1) $\Rightarrow f(y) = vf(1 + v(y - f(v)))$. Có $u(y - f(u)) = v(y - f(v))$ (do cách chọn của y) $\Rightarrow u = v$ (vô lý). Vậy với $0 < x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Tính $f(1)$: Thay $x = 1$ vào (1) ta có

$$f(f(1) + y) = f(1 + y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Nếu $f(1) > 1$, thay y bởi $y - 1$ vào (2) $\Rightarrow f(y + f(1) - 1) = f(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}^+, y > 1 \Rightarrow f(y) = \text{const} = c$ với mọi $y > 1$ (nhớ lại kết bài trước: tồn tại $a > 0: f(x + a) = f(x), f$ đơn điệu $\Rightarrow f = \text{const}$). Thay vào (1) $\Rightarrow c = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow c = 0$ (vô lý). Tương tự $1 > f(1)$, thay y bởi $y - 1 \Rightarrow$ vô lý. Vậy $f(1) = 1$.

Ta lại làm xuất hiện x bên vế phải (1). Chọn $y = \frac{x - 1}{x}$ ($x > 1$) thay vào (1) $\Rightarrow f\left(f(x) + \frac{x - 1}{x}\right) = xf(x)$ với mọi $x > 1$. Ở đây, ta dự đoán được $f(x) = \frac{1}{x}$.

+) Giả sử tồn tại $x: f(x) > \frac{1}{x}$
 $\Rightarrow f(x) + \frac{x - 1}{x} > 1$ ($x > 1$) $\Rightarrow f\left(f(x) + \frac{x - 1}{x}\right) \leq f(1) \Rightarrow xf(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$ (vô lý).

+) Tương tự $f(x) < \frac{1}{x}$ ($x > 1$) $\Rightarrow$ vô lý.

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x > 1$.

Thay $y = 1$ vào (1) ta có $f(f(x) + 1) = xf(1 + x)$ với mọi $x > 0$. Có $f(x) + 1 > 1$, $x + 1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x) + 1} = x \cdot \frac{1}{1 + x}$ với mọi $x > 0 \Leftrightarrow xf(x) + x = 1 + x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$. Thử lại thấy hàm số thỏa mãn.

Bài toán 3.4.11. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy - uv) = f(x)f(y) - f(u)f(v), \quad \forall x, y, u, v \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = y = u = v = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(0) = 0$. Thay $u = v = 0$ vào (1) ta có

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Thay $y = v = 1$ vào (1) ta có

$$f(x - u) = (f(x) - f(u))f(1), \quad \forall x, u \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay $u = 0$ vào (2) $\Rightarrow f(x) = f(x)f(1)$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(1) = 1$ hoặc $f(x) = 0$ (nếu $f(1) \neq 1$) với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

+) $f(1) = 1$. (2) $\Rightarrow f(x - u) = f(x) - f(u)$ với mọi $x, u \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có kết quả quen thuộc $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $f \equiv 0$ và $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là các hàm số cần tìm.

Bài toán 3.4.12. Cho $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xy)f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

a, Tìm f nếu $0 < x < y$ thì $0 < f(x) \leq f(y)$.

b, Tìm f nếu $0 < x < y$ thì $0 < f(y) \leq f(x)$.

Lời giải. a, Thay $x = 1$ vào (1) ta có

$$f(y)f(f(y)) = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+. \quad (2 \text{ a})$$

Giả sử tồn tại $y > 0$ sao cho $f(y) < f(f(y)) \Rightarrow f_2(y) \leq f_3(y) \Rightarrow f(y) < f_3(y)$. Thay y bởi $f(y)$ vào (2a) $\Rightarrow f_2(y)f_3(y) = 1$ với mọi $y > 0 \Rightarrow f(y) = f_3(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}^+$. Vậy không tồn tại $y: f(y) < f_2(y)$.

Giả sử tồn tại $y > 0: f(y) > f_2(y) \Rightarrow f_2(y) \geq f_3(y) \Rightarrow f(y) > f_3(y)$ (vô lý). Vậy $f(y) = f_2(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}^+$. Thay vào (2a) $\Rightarrow f^2(y) = 1$ với mọi $y > 0 \Rightarrow f(y) = 1$ với mọi $y > 0$ (do $f(y) \in \mathbb{R}^+$) (thử lại thấy thỏa mãn).

b, Tính $f(1)$: Thay $x = y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(1)f(f(1)) = 1$. Đặt $f(1) = a$ ($a > 0$) $\Rightarrow f(a) = \frac{1}{a}$. Thay $y = a$ vào (1) ta có

$$f(ax)f\left(\frac{1}{ax}\right) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (2b)$$

Thay $x = \frac{1}{a}$ vào (2b) $\Rightarrow f^2(1) = 1 \Rightarrow f(1) = 1$.

Với bài này, ta sẽ sử dụng giả thiết 2 như sau.

Trường hợp 1. Tồn tại $a \neq 1: f(a) = 1$.

Thay $y = a$ vào (1) $\Rightarrow f(ax)f\left(\frac{f(a)}{x}\right) = 1$ với mọi $x > 0 \Rightarrow f(ax)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ với mọi $x > 0$. Thay $y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(ax) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Ta nhớ lại kết quả quan trọng: Với $0 < a \neq 1, f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ đơn điệu thỏa mãn $f(ax) = f(x)$ với mọi $x > 0$ thì $f(x) = \text{const}$.

Thật vậy, quy nạp ta có $f(a^n x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Nếu $a > 1$, xét $0 < x < y$ và $n = \left\lceil \log_a \frac{y}{x} \right\rceil \Rightarrow n \leq \log_a \frac{y}{x} \leq n+1$
 $\Rightarrow a^n x \leq y \leq a^{n+1} x \Rightarrow f(a^n x) \geq f(y) \geq f(a^{n+1} x) \Rightarrow f(y) = f(x)$
 $\Rightarrow f = \text{const}$.

Nếu $0 < a < 1$, xét $0 < x < y$ và $n = \left\lceil \log_{\frac{1}{a}} \frac{y}{x} \right\rceil$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow n \leq \log_{\frac{1}{a}} \frac{y}{x} \leq n+1 &\Rightarrow \frac{1}{a^n} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{1}{a^{n+1}} \Rightarrow a^{n+1} y \leq x \leq a^n y \\ &\Rightarrow f(a^{n+1} y) \geq f(x) \geq f(a^n y) \Rightarrow f(x) = f(y). \end{aligned}$$

Vậy $f = \text{const}$, có $f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ với mọi $x > 0$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. ($f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$)

Thay x bởi $f(y)$ vào (1) $\Rightarrow f(yf(y))f(1) = 1$ với mọi $y > 0 \Rightarrow f(yf(y)) = 1$ với mọi $y > 0 \Rightarrow yf(y) = 1$ với mọi $y > 0 \Rightarrow f(y) = \frac{1}{y}$ với mọi $y > 0$ (thỏa mãn).

Vậy $f \equiv 1$ và $f(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$ là các hàm cần tìm.

Bài toán 3.4.13. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)), \quad \forall x, y > 0.$$

Lời giải. Ta chứng minh f không giảm. Thật vậy, giả sử tồn tại x_1, x_2 : $0 < x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Đặt $y = \frac{x_2 - x_1}{f(x_1) - f(x_2)} > 0 \Rightarrow yf(x_1) - yf(x_2) = x_2 - x_1 \Rightarrow yf(x_1) + x_1 = yf(x_2) + x_2$. Thay $y = \frac{x_2 - x_1}{f(x_1) - f(x_2)}$, x bởi x_1, x_2 ta có $f(x_1)f(y) = f(x_2)f(y) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (vô lý). Vậy với mọi $0 < x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Ta có $f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) \geq 2f(x)$ (do $yf(x) + x > x$) $\Rightarrow f(y) > 2$ với mọi $y \in \mathbb{R}^+$. Ta có

$$\begin{aligned} 2f(x + yf(x)) &= f(x)f(y) = 2f(y + xf(y)) \geq 2f(y + 2x) \geq 2f(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow f(x + yf(x)) \geq f(2x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Đề ý: Với mỗi $y \in \left(0, \frac{x}{f(x)}\right]$ ta có $x + yf(x) \in (x, 2x]$. Lại có f không giảm trên $\mathbb{R}^+ \Rightarrow f(y) = \text{const}$ với mọi $y \in (x, 2x]$, với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Với $x > 0$ bất kỳ, do $\mathbb{R}$ là tập trù mật $\Rightarrow$ tồn tại ε : $0 < \varepsilon < x \Rightarrow x + \varepsilon < 2x < 2(x + \varepsilon)$. Ta có $f(y) = \text{const}$ với mọi $y \in (x + \varepsilon, 2(x + \varepsilon)] \Rightarrow f(y) = \text{const}$ với mọi $y \in (x, 2(x + \varepsilon)]$. Quy nạp ta được $f(y) = \text{const}$ với mọi $y \in (x, 2(x + k\varepsilon)]$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Xét với mọi $y > x$: Với ε : $0 < \varepsilon < x$, theo nguyên lý Acsimet tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn để $2k\frac{\varepsilon}{y} > 1$ hay $2k\varepsilon > y \Rightarrow x < y < 2(x + k\varepsilon) \Rightarrow f(y) = \text{const}$ với mọi $y > x$. Vậy $f(x) = c$ với mọi $x > 0$. Thay lại $\Rightarrow f(x) = 2$ (thỏa mãn).

MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 3.4.14. Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Từ điều kiện ta có $f(f(x) + y) = f(f(y) + x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ đó $f(x) = x + c$ với c là hằng số. Thử lại ta suy ra $f(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.4.15. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực x ta có

$$f(20x^5 + 2011x^3 + 11x) \leq x \leq 20[f(x)]^5 + 2011[f(x)]^3 + 11[f(x)].$$

Bài tập 3.4.16. (Olympic sinh viên năm 2010). Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x) - x$ và $f(x) - x^3$ là những hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $f(x) - \frac{\sqrt{3}x^2}{2}$ cũng là hàm tăng.

Gợi ý. Dùng đạo hàm và bất đẳng thức AM - GM.

Bài tập 3.4.17. Tìm tất cả các hàm tăng $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+1) = f(x) + 2^{-x}, \quad \forall x > 0.$$

Gợi ý. Giả sử tồn tại f . Đặt $f(x) - 2^{1-x} = g(x)$ thì do f là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+$ nên g cũng là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+$. Ngoài ra $g(x+1) = g(x)$, hay g là hàm tuần hoàn, mâu thuẫn với khẳng định g tăng. Vậy không có f thỏa mãn bài toán.

Bài tập 3.4.18. Tìm hàm $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall x, y \geq 1. \quad (1)$$

Gợi ý. Chỉ ra f đơn ánh, $f(1) = 1$ và $f(f(y)) = y$. Khi đó, trong (1) thay y bởi $f(y)$ ta có $f(xy) = f(xf(f(y))) = f(y)f(x) \geq f(x)$ với mọi $x, y \geq 1$. Suy ra f đồng biến, kết hợp với $f(f(y)) = y$, ta có $f(x) = x$ với mọi $x \geq 1$.

Bài tập 3.4.19. Tìm hàm số đơn điệu $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$[f(x) + f(y)]^2 = f(x^2 - y^2) + 2f(xy), \quad \forall x, y \geq 0.$$

Gợi ý. Cho $(x, y) = (0, 0)$ suy ra $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1/2$.

• Nếu $f(0) = 1/2$. Thay $(x, y) = (1, 0)$ suy ra $f(1) = -1/2$ hoặc $f(1) = 1/2$. Nếu $f(1) = -1/2$, cho $(x, y) = (1, 1)$ suy ra $f(2) = 1/2$. Khi đó $f(0) > f(1)$ và $f(1) < f(2)$, mâu thuẫn với giả thiết f đơn điệu. Vậy $f(1) = 1/2$, xét dãy $x_{n+1} = 2x_n^2$, $x_0 = 1$, thay $(x, y) = (x_n, y_n)$ ta suy ra $f(x_n) = 1/2$. Do $f(x)$ đơn điệu nên $f(x) = 1/2$ với mọi $x \geq 0$.

• Xét $f(0) = 0$. Cho $(x, y) = (x, 0)$, suy ra $[f(x)]^2 = f(x^2)$. Cho $(x, y) = (x, x)$ thì $4[f(x)]^2 = f(2x^2)$, suy ra $4f(x) = f(2x)$ với mọi $x \geq 0$. Thay $(x, y) = (u+v, u-v)$ ta suy ra $[f(u+v) + f(u-v)]^2 = 4[f(u) + f(v)]^2$. Suy ra $f(u+v) + f(u-v) = 2[f(u) + f(v)]$ với mọi $u \geq v \geq 0$. Từ đó chứng minh $f(x) = f(1)x^2$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Từ đó suy ra nếu $f(1) = 0$ thì $f(x) = 0$ với mọi $x \geq 0$; còn nếu $f(1)$ khác 0 thì $f(1) = 1$ và $f(x) = x^2$ với mọi $x \geq 0$. Bài toán xuất phát từ đẳng thức hình bình hành.

Bài tập 3.4.20. Tìm tất cả các hàm đồng biến $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f^{-1}(y) = x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý. Thay $y = x$, ta có $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$. Đến đây đưa về bài toán APMO 1989.

Bài tập 3.4.21. (KHTN 2010). Tìm hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x^3 + y) = [f(x)]^3 + \frac{f(xy)}{f(x)}, \quad \forall x, y > 0.$$

Gợi ý. Chỉ ra $f(x^3 + 1) = [f(x)]^3 + 1$ và $f(y + 1) = [f(1)]^3 + \frac{f(y)}{f(1)}$. Từ đây đi tính $f(1) = 1$. Do đó $f(x + 1) = f(x) + 1$ và $f(x^3) = [f(x)]^3$. Từ đây chỉ ra $f(r) = r$ với mọi $r \in \mathbb{R}$. Chứng minh f là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+$, và do đó $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Bài tập 3.4.22. (Iran 1997). Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu giảm, thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x + y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x))), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Gợi ý. Thay $y = x$ ta có

$$f(2x) + f(2f(x)) = f(2f(x + f(x))). \quad (1)$$

Trong (1) thay x bởi $f(x)$ ta có

$$f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f(2f(f(x) + f(f(x)))). \quad (2)$$

Trừ (2) cho (1) ta có

$$f(2x) - f(2f(f(x))) = f(2f(x + f(x))) - f(2f(f(x) + f(f(x)))). \quad (3)$$

Từ (3), kết hợp với giả thiết f giảm ta suy ra trường hợp tồn tại x mà $f(f(x)) > x$ hoặc $f(f(x)) < x$ không thể xảy ra. Do đó $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.4.23. (IMO 2003, Shortlist). Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ không giảm thỏa mãn

i) $f(0) = 0, f(1) = 1;$

ii) $f(a) + f(b) = f(a)f(b) + f(a + b - ab),$ với mọi $a < 1 < b.$

Gợi ý. Đặt $g(x) = f(x + 1) - 1.$ Khi đó $g(x)$ không giảm và $g(-1) = -1, g(0) = 0.$ Chỉ ra $g(x)$ là hàm nhân tính. Từ đó xét các trường hợp $g(1) = 0$ hoặc $g(1)$ khác 0.

Bài tập 3.4.24. (Olympic Châu Mỹ La Tinh 1991). Cho hàm f xác định và không giảm trên đoạn $[0, 1]$ thỏa mãn

i) $f(0) = 0;$

ii) $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{2}$ với mọi $x \in [0, 1];$

iii) $f(1 - x) = 1 - f(x)$ với mọi $x \in [0, 1].$

Tìm giá trị của $f\left(\frac{18}{1991}\right).$

Bài tập 3.4.25. (Brazil 2003). Cho hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tăng thực sự trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Chứng minh rằng tồn tại $x > 0$ sao cho $f(x) < 0.$

Gợi ý. Đặt $x_n = 1/n$ và $f(x_n) = y_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*.$ Ta có

$$\frac{2x_{n-1}x_{n+1}}{x_{n-1} + x_{n+1}} = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

từ đó kết hợp với điều kiện ta suy ra

$$y_n = \frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2} \Rightarrow y_n - y_{n+1} = y_{n-1} - y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $d = y_1 - y_0 > 0$ thì ta có $y_{n+1} = y_1 - nd.$ Vậy với n đủ lớn ta có điều phải chứng minh.

3.5. Sử dụng tính chất điểm bất động

Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}, a$ được gọi là điểm bất động của hàm f nếu $a \in X, f(a) = a.$

Bài toán 3.5.1. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(0) \text{ và } f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $x = 1$ ta có

$$f(f(y)) = yf(1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Có $f(1) > 0 \Rightarrow f$ là đơn ánh. Thay $y = 1$ vào (2) $\Rightarrow f(f(1)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1$. Gọi S là tập tất cả các điểm bất động của $f \Rightarrow 1 \in S$ hay $S \neq \emptyset$. Với $a \in S$, ta có, thay $x = y = a$ vào (1) $\Rightarrow f(a^2) = a^2$. Quy nạp ta được $f(a^n) = a^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n \in S$. Thay $x = \frac{1}{a}$, $y = a$ vào (1) ta có

$$f(1) = af\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} \in S.$$

Vậy nếu $a \neq 1$, $a \in S$, ta có:

+) $a > 1 \Rightarrow a^n \in S \Rightarrow f(a^n) = a^n$ mà $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ (vô lý).

+) $a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \in S \Rightarrow f\left(\frac{1}{a^n}\right) = \frac{1}{a^n} \rightarrow +\infty$ (vô lý).

Vậy $S = \{1\}$.

Thay $y = x$ vào (1) ta có $f(xf(x)) = xf(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xf(x)$ là điểm bất động của $f \Rightarrow xf(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.5.2. Cho $S = (-1; +\infty)$. Tìm $f : S \rightarrow S$ thỏa mãn

a, $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ với mọi $x, y \in S$.

b, $\frac{f(x)}{x}$ là tăng ngặt với $-1 < x < 0$ và với $x > 0$.

Lời giải. Giả sử tồn tại f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thay $x = y$ vào a, ta có

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x), \quad \forall x \in S \quad (1)$$

khiến ta nghĩ tới điểm bất động.

Tìm điểm bất động: Để ý $\frac{f(x)}{x}$ là hàm tăng $\Rightarrow f(x) = x$ có tối đa ba nghiệm là $x = 0$, $x \in (-1, 0)$ và $x \in (0, +\infty)$. Ta sẽ chỉ ra $x = 0$ là điểm bất động duy nhất.

Trường hợp 1. Tồn tại $x_0 \in (-1, 0)$: $f(x_0) = x_0$. Thay $x = y = x_0$ vào a, $\Rightarrow f(2x_0 + x_0^2) = 2x_0 + x_0^2$. Có $2x_0 + x_0^2 \in (-1, 0)$ do $(x_0 \in (-1, 0)) \Rightarrow 2x_0 + x_0^2$ là điểm bất động của f trong $(-1, 0) \Rightarrow 2x_0 + x_0^2 = x_0$ (do trong $(-1, 0)$ tồn tại tối đa một điểm bất động) $\Rightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -1$ (vô lý).

Trường hợp 2. Tồn tại $x_0 \in (0, +\infty)$: $f(x_0) = x_0$. Thay $x = y = x_0$ vào a, $\Rightarrow f(2x_0 + x_0^2) = 2x_0 + x_0^2 \Rightarrow 2x_0 + x_0^2$ cũng là điểm bất động của f

$$\Rightarrow 2x_0 + x_0^2 = x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -1 \end{cases} \quad (\text{vô lý}).$$

Từ (1) $\Rightarrow f$ tồn tại điểm bất động. Vậy $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x + f(x) + xf(x) = 0$ với mọi $x \in (-1, +\infty) \Leftrightarrow f(x)(x+1) = -x$ với mọi $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{x+1}$ với mọi $x \in (-1, +\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.5.3. Tìm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Lời giải. Tính $f(0)$. Thay $m = n = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(f(0)) = f(f(0)) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Thay $n = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(m) = f(f(m))$ với mọi $m \in \mathbb{N} \Rightarrow f(m)$ cũng là điểm bất động của f với mọi $m \in \mathbb{N}$.

+) Nếu a, b là hai điểm bất động của f thì ta có

$$f(a + b) = f(a + f(b)) = f(f(a)) + f(b) = a + b. \quad (2)$$

Trường hợp 1. $f \equiv 0$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. f không đồng nhất bằng 0 $\Rightarrow$ tồn tại $m \in \mathbb{N}$: $f(m) > 0$. Do $\{f(m) : m \in \mathbb{N}\}$ là các điểm bất động của f nên ta có thể giả sử a là điểm bất động khác 0 bé nhất của f .

+) Nếu $a = 1$, từ (2) $\Rightarrow f(2) = 2$. Quy nạp ta được $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

+) Nếu $a > 1$, $f(a) = a$, từ (2) quy nạp ta được $f(ka) = ka$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Với $n \in \mathbb{N}$ bất kỳ, đặt $n = ka + r$ ($r < a - 1$). n thỏa mãn $f(n) = n$ thì ta có

$$\begin{aligned} n = f(n) &= f(ka + r) = f(r + f(ka)) = f(f(r)) + f(ka) = f(r) + ka \\ &\Rightarrow f(r) = r < a. \end{aligned}$$

Do a là điểm bất động bé nhất khác 0 $\Rightarrow r = 0$ hay $n = ka$. Do $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ là điểm bất động của $f \Rightarrow f(n) = a$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với $i < a$, ta có $f(i) = n_i a$,

$n_i \in \mathbb{N}, n_0 = 0$. Với n bất kỳ, ta có $n = ka + i$ (viết được như này là do $\{i | i < a\}$ là HTĐĐĐ)

$$\Rightarrow f(n) = f(ka + i) = f(i + ka) = f(i) + f(ka) = n_i a + ka = (n_i + k)a, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kiểm tra: Với $m = ka + i, n = la + j$ ($i, j < a$).

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(m + f(n)) &= f(ka + i + f(la + j)) = f(ka + i + (l + n_j)a) \\ &= (k + l + n_i + n_j)a \end{aligned}$$

$$f(f(m)) + f(n) = f((k + n_i)a) + (l + n_j)a = (k + l + n_i + n_j)a.$$

Vậy hàm được xây dựng như trên thỏa mãn.

Bài toán 3.5.4. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(f(x)) = x^2 - 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Đặt $g(x) = f(f(x)) \Rightarrow g(x) = x^2 - 2$. Tìm điểm bất động của $g(x)$:

$$g(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 2 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Có

$$g(g(x)) = g^2(x) - 2 = (x^2 - 2)^2 - 2$$

$$g(g(x)) = x \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2)(x^2 + x - 1) = 0 \text{ (do } g(g(-1)) = -1, g(g(2)) = 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 = a \\ x = 2 = b \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = c \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = d \end{cases}$$

$\Rightarrow g(a) = a, g(b) = b, g(g(c)) = c, g(g(d)) = d$. Đặt $g(c) = y \Rightarrow g(y) = c \Rightarrow y = g(g(y)) \Rightarrow y$ là một điểm bất động của $g \circ g \Rightarrow y = \{a, b, c, d\}$.

+) $y = a \Rightarrow g(a) = c$ và $g(c) = a$. Có $a = g(a) \Rightarrow a = c$ (vô lý).

+) $y = b \Rightarrow g(b) = d$ và $g(d) = b$ (vô lý).

+) $y = c \Rightarrow g(c) = c \Rightarrow c = \{a, b\}$ (vô lý).

Vậy $g(c) = d$. Tương tự $g(d) = c$.

Ta có $f \circ g = f \circ f \circ g = g \circ f$. Có $g(a) = a \Rightarrow f(a) = f(g(a)) = g(f(a)) \Rightarrow f(a) = \{a, b\}$. Tương tự, ta có $f(b) = \{a, b\} \Rightarrow f : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$. Có $f \circ g \circ g = g \circ g \circ f$, $f(c) = g(g(f(c))) \Rightarrow f(c) = \{a, b, c, d\}$. Tương tự, ta có $f(d) = \{a, b, c, d\}$.

+) Xét $f(c) = a \Rightarrow f(a) = f(f(c)) = g(c) = d$ (vô lý do $f : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$).

+) $f(c) = b \Rightarrow f(b) = f(f(c)) = g(c) = d$ (vô lý).

+) $f(c) = c \Rightarrow c = \{a, b\}$ (vô lý).

$\Rightarrow f(c) = d \Rightarrow f(d) = f(f(c)) = g(c) = d \Rightarrow d = \{a, b\}$ (vô lý).

Vậy không tồn tại f thỏa mãn.

Tổng quát: Cho tập S và $g : S \rightarrow S$ là hàm số có đúng hai điểm bất động $\{a, b\}$ và $g \circ g$ có đúng bốn điểm bất động $\{a, b, c, d\}$ thì không tồn tại hàm số $f : S \rightarrow S$ để $g = f \circ f$ (a, b, c, d đôi một khác nhau).

Bài toán 3.5.5. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

(a) $f(f(x) + y) = xf(y) + f(f(x) + f(y))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) f có một điểm bất động.

Lời giải. Gọi $b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(b) = b$. Thay $y = a$ vào (a) $\Rightarrow f(f(x) + b) = bx + f(f(x) + f(b))$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow bx = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0$. Vậy $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$. Thay $x = 0$ vào (a) $\Rightarrow f(y) = f(f(y))$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn). Vậy $f \equiv 0$ là hàm cần tìm.

MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 3.5.6. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + 2f(y)) = 2x + f(y) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3.5.7. (Tournoi des villes 1996). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) = x^2 - 1996, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3.5.8. Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

- i) $f(-x + y) = x + f(y) + y^2 f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;
 ii) $\frac{f(x)}{x}$ giảm thực sự trên $(-\infty, 0)$ và tăng thực sự trên $(0, +\infty)$.

Bài tập 3.5.9. Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

- i) $2x + y = f(x + 2f(y) + y^2 f(y))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
 ii) $\frac{f(x)}{x}$ giảm thực sự trên $(-\infty, 0)$ và tăng thực sự trên $(0, +\infty)$.

Bài tập 3.5.10. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) = x^2 - x - 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3.5.11. (Italy TST 2005). Cho hàm số $f : \{1, 2, \dots, 1600\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 1600\}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f^{2005} = x$ với mọi $x \in \{1, 2, \dots, 1600\}$.

- a) Chứng minh rằng f có một điểm bất động khác 1.
 b) Tìm tất cả $n > 1600$ sao cho với mọi hàm $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn các điều kiện trên có ít nhất hai điểm bất động.

Gợi ý. Ta có các nhận xét sau:

- Hàm f đơn ánh.
- Nếu $f^{n_1}(x_0) = x_0, f^{n_2}(x_0) = x_0$ thì $f^d(x_0) = x_0$ với $d = (n_1, n_2)$.
- Nếu n nhỏ nhất thỏa mãn $f^n(x_0) = x_0$ thì $n|2005$ và tập

$$A = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$$

có tính chất $f^n(x) = x$ với mọi $x \in A$. Khi đó ta gọi tập A có tính chất T_n .

Giả sử $f(x) \neq x$ với mọi $x > 1$. Khi đó $\{2, 3, \dots, 1600\}$ có thể phân hoạch thành p tập có tính chất T_5 và q tập có tính chất T_{401} , và r tập có tính chất T_{2005} với $p, q, r \in \mathbb{N}$. Suy ra $5p + 401q + 2005r = 1599$, phương trình này vô nghiệm dẫn đến giả sử trên là sai. Và ta có điều phải chứng minh.

3.6. Đưa về phương trình sai phân

Bài toán 3.6.1. Tìm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(n)f(m) = f(m+n) + f(n-m), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $m = n = 0$ vào (1) ta có

$$f^2(0) = 2f(0) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = 2. \end{cases}$$

Nếu $f(0) = 0$, thay $m = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ (thỏa mãn).

Nếu $f(0) = 2$, thay $m = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(n)f(1) = f(n+1) - f(n-1)$ với mọi $n \geq 1 \Rightarrow f(n+1) = f(1)f(n) - f(n-1)$ với mọi $n \geq 1$. Đặt $a = f(1)$, $x_n = f(n)$ với mọi $n \geq 0 \Rightarrow x_0 = 2, x_1 = a, x_{n+2} = ax_{n+1} - x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét phương trình đặc trưng: $x^2 - ax + 1 = 0$ có $\Delta = a^2 - 4$.

• Nếu $a^2 < 4 \Rightarrow x_n = k_1 \cos nt + k_2 \sin nt$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong đó $\tan t = \frac{4 - a^2}{a^2}$ hay $t = \arctan \frac{4 - a^2}{2}$.

$$\begin{cases} k_1 = 2, \\ k_1 \cos t + k_2 \sin t = a \end{cases} \Rightarrow k_2 = \frac{a}{\sin t} - \frac{2 \cos t}{\sin t}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{a}{\sin t} \cdot \sin nt, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{a}{\sin t} \cdot \sin nt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

• Nếu $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2 \Rightarrow x_n = (k_1 + k_2 n) \lambda^n \sqrt{1 + a^2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong đó $\lambda = \frac{a}{2}$.

Nếu $a = 2 \Rightarrow x_n = (k_1 + k_2 n) \sqrt{5}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\begin{cases} k_1 \sqrt{5} = 2, \\ (k_1 + k_2) \sqrt{5} = 2 \end{cases} \Rightarrow k_2 = 0 \Rightarrow x_n = 2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = 2, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Nếu $a = -2 \Rightarrow x_n = (k_1 + k_2 n)(-1)^n \sqrt{5}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\begin{cases} k_1 \sqrt{5} = 2, \\ (k_1 + k_2)(-\sqrt{5}) = -2 \end{cases} \Rightarrow k_2 = 0 \Rightarrow x_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(n) = 2, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (thỏa mãn)}.$$

• Nếu $a^2 > 4 \Rightarrow$ phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt λ_1, λ_2 ,
 $x_n = k_1 \lambda_1^n + k_2 \lambda_2^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{a - 2\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ k_2 = \frac{2\lambda_1 - a}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(n) = k_1 \lambda_1^n + k_2 \lambda_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Bài toán 3.6.2. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn với $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

Lời giải. Với $x_0 > 0$, đặt $u_0 = x_0, u_1 = f(x_0), u_{n+1} = f(u_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ (1) ta có

$$u_{n+2} + au_{n+1} = b(a+b)u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Xét phương trình đặc trưng: $x^2 + ax - b(a+b) = 0 \Rightarrow x_1 = b$ và $x_2 = -(a+b)$.
 Khi đó ta có

$$\begin{aligned} u_n &= c_1 b^n + c_2 (-1)^n (a+b)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &= (a+b)^n \left[c_1 \left(\frac{b}{a+b} \right)^n + c_2 (-1)^n \right]. \end{aligned}$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a+b} \right)^n = 0$.

Nếu $c_2 > 0$ thì $u_n < 0$ với n lẻ đủ lớn.

Nếu $c_2 < 0$ thì $u_n < 0$ với n chẵn đủ lớn.

Vậy ta có $c_2 = 0$. Vậy $u_n = c_1 b^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $u_0 = c_1 = x_0, u_1 = c_1 b x_0 = f(x_0)$. Vậy $f(x) = bx$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ (thỏa mãn).

Bài toán 3.6.3. Tìm $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ thỏa mãn

$$f(2x - f(x)) = x, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử tồn tại f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó ta có

$$0 \leq 2x - f(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Lần lượt thay $x = 0, x = 1$ vào (2) ta có

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

Đặt $g(x) = 2x - f(x)$ với mọi $x \in [0, 1] \Rightarrow g(x) \in [0, 1]$ với mọi $x \in [0, 1]$ và

$$f(x) = 2x - g(x). \quad (*)$$

Từ (1) ta có $f(g(x)) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Từ (*), thay x bởi $g(x)$ ta có

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2g(x) - g(g(x)), \forall x \in [0, 1] \\ \Rightarrow 2g(x) - g(g(x)) &= x, \forall x \in [0, 1] \\ \Rightarrow g(g(x)) &= 2g(x) - x, \forall x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3)$$

Thay x bởi $g(x)$ vào (3) ta có $g_3(x) = 2g_2(x) - g(x) = 4g(x) - 2x - g(x) = 3(g(x) - x) + x$ với mọi $x \in [0, 1]$. Quy nạp ta được

$$g_n(x) = n(g(x) - x) + x, \forall x \in [0, 1] \quad (4)$$

và $g_n(x) \in [0, 1]$ với mọi $x \in [0, 1]$. (4) $\Rightarrow g_n(x) - x = n(g(x) - x)$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Giả sử tồn tại $x_0: g(x_0) \neq x_0$. Đặt $a = |g(x_0) - x_0| > 0$ ($x_0 \in [0, 1]$). Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty$. Mặt khác $|g_n(x_0) - x_0| \leq 1$ với $x_0 \in [0, 1]$ (vô lý). Vậy $g(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$. Ta suy ra $f(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Bài toán 3.6.4. Tìm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, f(1) = 2, \\ f(n+1)f^2(n-1) &= f^3(n), \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Lời giải. Từ (1) ta thấy nếu $f(n), f(n-1) > 0 \Rightarrow f(n+1) > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $f(n) > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lấy logarit hai vế của (1) ta có

$$\ln f(n+1) + 2 \ln f(n-1) = 3 \ln f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $g(n) = \ln f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \quad g(1) = \ln 2, \\ g(n+2) + 2g(n-1) &= 3g(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2)$$

Xét phương trình đặc trưng: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$. Khi đó ta có

$$g(n) = c_1 1^n + c_2 2^n = c_1 + c_2 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\ln 2 \\ c_2 = \ln 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln f(n) = -\ln 2 + \ln 2 \cdot 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(n) = 2^{2^n - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Bài toán 3.6.5. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(0) = 1, \quad f(n+1) = 3f(n) + \sqrt{8f^2(n) + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Lời giải. Từ (1) $\Rightarrow f(n+1) > 3f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow f(n+1) - 3f(n) = \sqrt{8f^2(n) + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow f^2(n+1) + 9f^2(n) + 6f(n+1)f(n) = 8f^2(n) + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow f^2(n+1) + f^2(n) - 6f(n+1)f(n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Thay n bởi $n+1$ ta có

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f^2(n+2) + f^2(n+1) - 6f(n+2)f(n+1) = 1, \\ &\Rightarrow f^2(n+2) - f^2(n) - 6f(n+1)[f(n+2) - f(n)] = 0, \\ &\Rightarrow f(n+2) - 6f(n+1) + f(n) = 0 \\ &(\text{do } f(n+2) > 3f(n+1) > 9f(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Thay $n = 0$ vào (1) ta có $f(1) = 3f(0) + 3 = 6$.

Xét phương trình đặc trưng:

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{8}, \quad x_2 = 3 - \sqrt{8}.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
 f(n) &= c_1(3 + \sqrt{8})^n + c_2(3 - \sqrt{8})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + (3 + \sqrt{8}) + c_2 + (3 - \sqrt{8}) = 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3\sqrt{2} + 4}{8} \\ c_2 = \frac{-3\sqrt{2} + 4}{8} \end{cases} \\
 \Rightarrow f(n) &= \frac{3\sqrt{2} + 4}{8} \cdot (3 + \sqrt{8})^n + \frac{4 - 3\sqrt{2}}{8} \cdot (3 - \sqrt{8})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Bài toán 3.6.6. Tìm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(n+3)f(n+1) = f(n) + f(n+2), \quad \forall n \geq 0.$$

Lời giải Đặt $a_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in \mathbb{N}^*$.

Và

$$\begin{aligned}
 a_{n+3}a_{n+1} &= a_n + a_{n+2}, \\
 a_{n+4}a_{n+2} &= a_{n+1} + a_{n+3}, \\
 a_{n+5}a_{n+3} &= a_{n+2} + a_{n+4}, \\
 \Rightarrow (a_{n+5} - a_{n+1})a_{n+3} &= a_{n+4} - a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
 \Rightarrow a_4 - a_0 &= a_3(a_5 - a_1) \\
 &= a_3a_4(a_6 - a_2) = \dots = \\
 &= a_3a_4 \dots a_{n+2}(a_{n+4} - a_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Ta chứng minh $a_{4n}a_{4n+1}a_{4n+2}a_{4n+3} \geq 2$.

Ngược lại $a_{4n}a_{4n+1}a_{4n+2}a_{4n+3} \leq 1$ mà $a_n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_{4n} = a_{4n+1} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 1$. Ta có $4n + 3a_{4n+1} = a_{4n} + a_{4n+2}$ (vô lý).

Giả sử $a_4 \neq a_0$. Khi đó ta có

$$|a_4 - a_0| = a_3 \dots a_{4n+3}(a_{4n+5} - a_{4n+3}) \geq 2^n |a_{4n+5} - a_{4n+3}|.$$

Có $|a_{4n+5} - a_{4n+3}| \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \Rightarrow |a_4 - a_0| > +\infty$ (vô lý).

Vậy $a_4 = a_0$, $a_5 = a_1$. Suy ra (a_n) là dãy tuần hoàn với chu kỳ 4, $a_{n+4} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Từ (1) ta có

$$a_0 + a_2 = a_1 a_3$$

$$a_1 + a_3 = a_0 a_2.$$

Có $(a_1 - 1)(a_3 - 1) \geq 0$ (do $a_n \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_1 a_3 &\geq a_1 + a_3 - 1 \Rightarrow a_0 + a_2 \\ &\geq a_1 a_2 - 1 \Rightarrow (a_0 - 1)(a_2 - 1) \leq 2 \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $a_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + a_2 = a_1 a_3 \\ a_1 + a_3 = a_2 \end{cases} \Rightarrow 1 + a_1 + a_3 = a_1 a_3$

$$\Rightarrow (a_1 - 1)(a_3 - 1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 5$$

$$\Rightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 5, 3) = (1, 3, 5, 2).$$

Trường hợp 2: $a_0 = 2.$

$$\text{Nếu } a_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3 = a_1 a_3 \\ a_1 + a_3 = 2 \end{cases} \quad (\text{loại}).$$

$$\text{Nếu } a_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} 4 = a_1 a_3 \\ a_1 + a_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_3 = 2.$$

Trường hợp 3: $a_0 \geq 3 \Rightarrow a_2 = 1 \Rightarrow (a_1, a_3) = (2, 3) = (3, 2), a_0 = 5.$

3.7. Các bài tập tổng hợp

Bài toán 3.7.1. Tìm $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ thỏa mãn

- 1) $f(x) \leq 2(1+x) \quad \forall x \geq 1;$
- 2) $xf(x+1) = f^2(x) - 1 \quad \forall x \geq 1.$

Lời giải. Ta dễ thấy $f(x) = x+1$ thỏa mãn phương trình. Giả sử f là hàm cần tìm. Ta có

$$\begin{aligned} f^2(x) &= xf(x+1) + 1 \leq x + 2(x+2) + 1 < 2(x+1)^2, \quad \forall x \geq 1, \\ \Rightarrow f(x) &\leq \sqrt{2}(x+1), \quad \forall x \geq 1, \\ \Rightarrow f^2(x) &= xf(x+1) + 1 \leq x(\sqrt{2}(x+1)) + 1 \\ &= \sqrt{2}(x^2 + x) + 1 \leq \sqrt{2}(x+1)^2, \\ \Rightarrow f(x) &< 2^{\frac{1}{4}}(x+1), \quad \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

Quy nạp ta có $f(x) < 2^{\frac{1}{2^k}}(x+1) \forall x \geq 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Do $\lim_{k \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{2^k}} = 1$ nên

$$f(x) \leq x+1, \quad \forall x \geq 1. \quad (*)$$

Ta lại có $f(x+1) = \frac{f^2(x)-1}{x}$, có $f(x+1) \geq 1$ với mọi $x \geq 1 \Rightarrow f^2(x) - 1 \geq x \Rightarrow f(x) \geq \sqrt{x+1} > x^{\frac{1}{2}}$ với mọi $x \geq 1 \Rightarrow f^2(x) = xf(x+1) + 1 > x\sqrt{x+1} + 1 > x^{\frac{3}{2}}$ với mọi $x \geq 1 \Rightarrow f(x) > x^{\frac{3}{4}}$ với mọi $x \geq 1$. Quy nạp ta có $f(x) > x^{1-\frac{1}{2^n}}$ với mọi $x \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{1-\frac{1}{2^n}} = x \Rightarrow f(x) \geq x$ với mọi $x \geq 1$.

$f^2(x) = xf(x+1) + 1 \geq x(x+1) + 1 > \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f(x) \geq x + \frac{1}{2}$ với mọi $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} f^2(x) &= xf(x+1) + 1 \geq x\left(x + \frac{3}{2}\right) + 1 > \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \\ &\Rightarrow f(x) > x + 1 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Quy nạp ta có

$$f(x) > x + 1 - \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ nên suy ra

$$f(x) \geq x+1. \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $f(x) = x+1$ với mọi $x \geq 1$.

Bài toán 3.7.2. Chứng minh rằng không tồn tại $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f^2(x) \geq f(x+y)(f(x)+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $y = 1$ vào (1) ta có $f^2(x) \geq f(x+1)(f(x)+1)$ với mọi $x > 0$. Ta suy ra

$$f(x+1) \leq \frac{f^2(x)}{f(x)+1} < f(x), \quad \forall x > 0, \quad (\text{do } f(x) > 0).$$

Để ý nếu $\exists c: f(x) - f(x+1) \geq c > 0$ với mọi $x > 0$ thì $f(x) - f(x+m) \geq mc \forall m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(x+m) \leq f(x) - mc \Rightarrow$ với m đủ lớn thì $f(x+m) < 0$ (với mọi x). Vậy nhiệm vụ ta phải tìm c .

Từ (1) ta có

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x+y) &\geq f(x+y) \cdot \frac{f(x)+y}{f(x)} - f(x+y) \\
\Rightarrow f(x) - f(x+y) &\geq \frac{f(x+y)y}{f(x)} > 0, \forall x, y > 0. \\
(1) \Rightarrow f^2(x) - f(x+y)(f(x)+y) &\geq 0 \\
\Rightarrow f^2(x) + yf(x) - f(x+y)(f(x)+y) &\geq yf(x) \\
\Rightarrow f(x) - f(x+y) &\geq \frac{f(x)y}{f(x)+y}, \forall x, y > 0. \quad (*)
\end{aligned}$$

Với $x > 0$, theo nguyên lý Ac-simet, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$: $nf(x+1) > 1$. Với $0 \leq k \leq n-1$, $k \in \mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned}
f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+1) &> 0 \text{ (do } 1 - \frac{k}{n} \geq \frac{1}{n} > 0) \\
f(x) - f(x+y) &> 0 \quad \forall x, y > 0) \\
\Rightarrow f\left(x + \frac{k}{n}\right) &> f(x+1) > \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Thay x bởi $x + \frac{k}{n}$, $y = \frac{1}{n}$ vào (*), ta có

$$f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) \geq \frac{f\left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{f\left(x + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{f\left(x + \frac{k}{n}\right)} + n} \geq \frac{1}{2n}.$$

Cho k chạy từ 0 đến $n-1$ rồi cộng các tổng với nhau:

$$f(x) - f(x+1) \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Vậy không tồn tại f thỏa mãn (điều phải chứng minh).

Bài toán 3.7.3. Tìm $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ thỏa mãn:

- i) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ với mọi $x, y \geq 0$;
- ii) $f(2) = 0$;
- iii) $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0, 2]$.

Lời giải. Thay $y = 2$ vào (1) ta có $f(x+2) = 0$ với mọi $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \geq 2$. Kết hợp với iii), ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Với mọi $y < 2$ và với mọi $x + y \geq 2$ hay $x \geq 2 - y$ ta có $f(xf(y))f(y) = f(x + y) = 0 \Rightarrow f(xf(y)) = 0 \Rightarrow xf(y) \geq 2 \Rightarrow f(y) \geq \frac{2}{x}$. Lấy $x = 2 - y$, ta có

$$f(y) \geq \frac{2}{2 - y} \quad \forall y \in [0, 2). \quad (*)$$

Với mọi $y < 2$, $x + y < 2$ ta có $f(xf(y))f(y) = f(x + y) > 0 \Rightarrow f(xf(y)) > 0 \Rightarrow xf(y) \in [0, 2] \Rightarrow f(y) < \frac{2}{x} \quad \forall x < 2 - y$. Cho $x \rightarrow 2 - y$ ta có

$$f(y) \leq \frac{2}{2 - y}, \quad \forall y \in [0, 2). \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có

$$f(y) = \frac{2}{2 - y}, \quad \forall y \in [0, 2).$$

Bài toán 3.7.4. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + xf(y)) = xf(y + 1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Phân tích bài toán: Việc có x đứng ngoài, đầu tiên ta nghĩ tới giả thiết 1. Trường hợp $f \equiv 0$, ta chỉ cần giải quyết trường hợp tồn tại $a : f(a) \neq 0$. Nếu thay $y = a - 1 \Rightarrow f$ là toàn ánh $\Rightarrow \exists b : f(b) = 0$. Thay $x = b$, ta có

$$f(bf(y)) = bf(y + 1), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Rõ ràng nếu $f(y) = 1 \Rightarrow bf(y + 1) = 0 \Rightarrow b = 0 (\Rightarrow f(0) = 0)$ hoặc $f(y + 1) = 0$ (không giải quyết được điều gì). Tuy đến đây là ngõ cụt đoạn $f(y + 1) = 0$ nhưng để ý ta thu được $f(0) = 0$ và f là toàn ánh $\Rightarrow \exists y$ sao cho

$$f(y) = -\frac{f(x)}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Điều này hướng cho ta lời giải của giả thiết 2. Cũng để ý một điều, trường hợp 2 của giả thiết 2 cũng suy ra được toàn ánh.

Trước hết ta tính $f(0)$. Thay $x = y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(f(0)) = 0$. Đặt $f(0) = a \Rightarrow f(a) = 0$. Ta tính a bằng mệnh đề đảo.

Giả sử $a \neq 0$. Thay $x = y = a$ vào (1) $\Rightarrow f(0) = af(a + 1) \Rightarrow a = af(a + 1) \Rightarrow f(a + 1) = 1$ (do $a \neq 0$). Thay $y = a$ vào (1) ta có $f(f(x)) = xf(a + 1) = x \quad \forall a \in \mathbb{R}$. Vậy f là song ánh. Thay $x = 1$ vào (1) ta có

$$f(f(1) + f(y)) = f(y + 1), \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(1) + f(y) &= y + 1, \forall y \in \mathbb{R}, \\ \Rightarrow f(y) &= y + 1 - f(1), \forall y \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{2}$$

Thay $y = 1 \Rightarrow f(1) = 1$. (2) $\Rightarrow f(y) = y \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ (vô lý). Vậy $a = 0$.

Xét giả thiết 2:

Trường hợp 1: Tồn tại $b \neq 0$: $f(b) = 0$. Thay $y = b$ vào (1) ta có

$$f(f(x)) = xf(b+1), \forall x \in \mathbb{R}.\tag{3}$$

Thay $x = b$ vào (3) ta có $f(f(b)) = bf(b+1) \Rightarrow bf(b+1) = f(0) = 0 \Rightarrow f(b+1) = 0$ (do $b \neq 0$). Từ (3) suy ra $f(f(x)) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Thay y bởi $f(f(y))$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(f(x) + xf(f(f(y)))) &= xf(f(f(y)) + 1), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(f(x)) &= xf(1), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(1) &= 0.\end{aligned}$$

Thay $x = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(f(y)) = f(y+1)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y+1) = 0 \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$). Thay $y = 0$ vào (1) ta có

$$f(f(x)) = xf(1).\tag{4}$$

Do $f(1) \neq 0$ ($1 \neq 0$) nên f là song ánh. Thay $x = 1$ vào (1) ta có $f(f(1) + f(y)) = f(y+1)$ với mọi $y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y) = y + 1 - f(1) \Rightarrow f(y) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Để ý trường hợp 2, ta sử dụng ($f(0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$) do đó bài vẫn giải được giả thiết 1, mâu chốt là tìm được $f(0) = 0$.

Bài toán 3.7.5. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}.\tag{1}$$

Lời giải. (1) $\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) + f(xy) - f(x)f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Xét

$$f(x+y+z) = f(x) + f(y+z) + f(x(y+z)) - f(x)f(y+z)$$

$$\begin{aligned}
&= f(x) + [1 - f(x)][f(y) + f(z) + f(yz) - f(y)f(z)] \\
&\quad + f(xy) + f(xz) + f(x^2yz) - f(xy)f(xz) \\
&= f(x) + f(y) + f(z) + f(xy) + f(yz) + f(xz) + f(x)f(y)f(z) \\
&\quad - f(x)f(y) - f(x)f(z) - f(y)f(z) \\
&\quad + f(x^2yz) - f(xy)f(xz) - f(x)f(yz).
\end{aligned}$$

Hoán đổi vai trò x, y, z ta có

$$f(x^2yz) - f(xy)f(xz) - f(x)f(yz) = f(xy^2z) - f(xy)f(yz) - f(y)f(xz). \quad (*)$$

Thay $y = 1$ vào $(*)$ ta có

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x^2z) - f(x)f(xz) - f(x)f(z) = f(xz) - f(x)f(z) - f(1)f(xz) \\
&\Rightarrow f(x^2z) = (1 - f(1))f(xz) + f(x)f(xz), \quad \forall x, z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Mặt khác thay y bởi xz vào (1) ta có

$$\begin{aligned}
f(x^2z) &= f(x + xz) + f(x)f(xz) - f(x) - f(xz) \\
&\Rightarrow f(x + xz) = (2 - f(1))f(xz) + f(x), \quad \forall x, z \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \quad (2)$$

Thay $z = 0$ vào (2) $\Rightarrow [2 - f(1)]f(0) = 0$. Đặt $2 - f(1) = a$.

Nếu $a = 0$, thay $x = 1$ vào (2) $\Rightarrow f(1 + z) = f(x) = f(1) \quad \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Thay $z = -1$ vào (2) $\Rightarrow f(0) = af(-x) + f(x) \Rightarrow f(x) = -af(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-x) = -af(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = a^2f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn) hoặc $a^2 = 1$.

• $a = -1 \Rightarrow 2 - f(1) = -1 \Rightarrow f(1) = 3$. Thay vào (2) ta có $f(x + xz) = -f(xz) + f(x)$ với mọi $x, z \in \mathbb{R}$. Thay $x = \frac{1}{2}, z = -1 \Rightarrow f(1) = -f(1/2) + f(1/2) = 0$ (vô lý).

• $a = 1$. Từ (2) suy ra

$$f(x + xz) = f(xz) + f(x), \quad \forall x, z \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Với mọi $x \neq 0$, thay $z = \frac{y}{x}$ vào (3) ta có

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Có (**) cũng đúng với $x = 0 \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y); \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(xy) = f(x)f(y); \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$ (loại), hoặc $f(x) = 2 \forall x \in \mathbb{R}$ (loại), hoặc $f(x) = x$.

Vậy $f \equiv 0$, $f \equiv 2$ và $f(x) = x; \forall x \in \mathbb{R}$ là các hàm cần tìm.

Bài toán 3.7.6. Cho $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(2x) \geq x + f(f(x)), \forall x > 0. \quad (1)$$

Chứng minh rằng $f(x) \geq x$ với mọi $x > 0$.

Lời giải. Từ (1) ta dễ thấy $f(x) > \frac{x}{2}, \forall x > 0$.

Nếu ta có $f(x) > ax, \forall x \in \mathbb{R}^+$ thì

$$f(x) \geq \frac{x}{2} + f\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) > \frac{x}{2} + a^2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{1+a^2}{2} \cdot x, \forall x > 0.$$

Vậy ta xét dãy (a_n) thỏa mãn

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2}, a_0 = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N},$$

Thì dễ dàng quy nạp được

$$f(x) > a_n x, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Nếu $a_n < 1 \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1+1}{2} = 1$. Vậy $a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Xét

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1+a_n^2}{2} - a_n \\ &= \frac{(a_n - 1)^2}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Vậy (a_n) là dãy tăng bị chặn bởi 1 $\Rightarrow$ tồn tại $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ($0 \leq a \leq 1$)
 $\Rightarrow a = \frac{1+a^2}{2} \Rightarrow a = 1$. Từ (*) cho $n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x) \geq x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Bài toán 3.7.7. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f^2(x) \leq 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

và

$$f(x) \leq 1, \forall x \in (-1, 1). \quad (2)$$

Chứng minh rằng

$$f(x) \leq \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Lời giải. Thay $x = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(0) = 0$ thỏa mãn (*). Xét $x \neq 0$, từ (1) $\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Đặt $g(x) = \frac{2f(x)}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow g^2(x) \leq g\left(\frac{x}{2}\right), g(x) \geq 0, \forall x \neq 0 \\ &\Rightarrow g^{2^n}(x) \leq g\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall x \neq 0 \\ &\Rightarrow g(x) \leq \sqrt[2^n]{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}, \forall x \neq 0.\end{aligned}$$

Với x bất kỳ có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0 \Rightarrow$ tồn tại $N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \frac{x}{2^n} \in (-1, 1)$. Suy ra với mọi $n \geq N$, ta có

$$g(x) \leq \sqrt[2^n]{\frac{2f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2}} \leq \sqrt[2^n]{\frac{2^{2n+1}}{x^2}}.$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{2n+1}{2^n}} = 1$, do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 1 \Rightarrow g(x) \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \leq \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (điều phải chứng minh).

Bài toán 3.7.8. Tìm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f((x-y)^2) = f^2(x) - 2xf(y) + y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Do tính chất đối xứng của x và y trong (1) ta có

$$\begin{aligned}f^2(x) - 2xf(y) + y^2 &= f^2(y) - 2yf(x) + x^2 \\ \Rightarrow (f(x) + y)^2 &= (f(y) + x)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}\end{aligned} \quad (2)$$

Thay $x = 0$ vào (2) ta có

$$f^2(y) = (y + f(0))^2, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Thay $x = y = 0$ vào (1) $\Rightarrow f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

$f(0) = 0$. Từ (3) $\Rightarrow f(y) = y$ hoặc $f(y) = -y$. Giả sử tồn tại $a, b \neq 0$: $f(a) = a$ và $f(b) = -b$. Thay $x = a, y = b$ vào (1) ta có

$$\Rightarrow f((a-b)^2) = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = (a-b)^2 \\ (a+b)^2 = -(a-b)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ab = 0 \\ a^2 + b^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô lý}).$$

Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

$f(0) = 1 \Rightarrow f(y) = y + 1$ hoặc $f(y) = -(y + 1) \Rightarrow f(-1) = 0$. Giả sử tồn tại $a \neq 0, a \neq -1$: $f(a) = -(a + 1)$. Thay $x = a, y = -1$ vào (2),

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f(a) - 1)^2 &= (f(-1) + a)^2 \\ (-a - 1 - 1)^2 &= a^2 \Rightarrow (a + 2)^2 = a^2 \Rightarrow a = -1 \text{ (vô lý)}. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Bài toán 3.7.9. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

- 1) $f(x + 1) \geq x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$,
- 2) $f(x + y) \geq f(x)f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Thay $x = y$ vào (2) ta có $f(2x) \geq f^2(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f^n\left(\frac{x}{n}\right) \text{ (do } x = \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}) \\ \Rightarrow f(x) &\geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cố định x , ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0 \Rightarrow$ tồn tại $N \in \mathbb{N}$: với mọi $n \geq N, \frac{x}{n} + 1 > 0 \Rightarrow$ với mọi $n \geq N$:

$$f(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0.$$

Ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Từ đó suy ra $f(x) \geq e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $x = y = 0$ vào (2) $\Rightarrow f(0) \geq f^2(0)$, lại có $f(0) \geq e^0 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$. Ta có

$$1 = f(0) \geq f(x)f(-x) \geq e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

Vậy $f(x) = e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

3.8. Phương trình hàm trên tập số tự nhiên

Bài toán 3.8.1. Tìm $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

- 1) $f(mn) = f(m) + f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$,
- 2) $f(30) = 0$,
- 3) $f(n) = 0$ nếu n có tận cùng bên phải bằng 7.

Lời giải. Ta có $0 = f(30) = f(2 \cdot 3 \cdot 5) = f(2) + f(3) + f(5) \Rightarrow f(2) = f(3) = f(5) = 0$. Từ (3) ta có $f(n) = 0$ nếu $n \equiv 7 \pmod{10}$. Ta có $n \in \mathbb{N}^*$ bất kỳ thì n có phân tích nguyên tố

$$n = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} \prod_{k=4}^{+\infty} p_k^{a_k} \text{ với } a_i \in \mathbb{N}, p_i > 5$$
$$= 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot h \text{ với } (h, 2) = (h, 3) = (h, 5) = 1, (h \in \mathbb{N}^*).$$

Từ (1) $\Rightarrow f(n) = f(h)$. Do $(h, 2) = (h, 5) = 1 \Rightarrow (h, 10) = 1$. Từ đó suy ra

$$A = \{th \mid t = \overline{1, 10}\}$$

là hệ tự do đồng dư (mod) 10. Từ đó suy ra $\forall n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại t_n : $t_n h_n \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow 0 = f(t_n h_n) = f(t_n) + f(h_n) \Rightarrow f(h_n) = 0$ (do $f \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$).

Bài toán 3.8.2. Chứng minh rằng với $b \in \mathbb{N}$, tồn tại duy nhất $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(m + f(n)) = n + f(m + b), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử tồn tại $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$: $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow f$ là đơn ánh.

$$f(f(m) + f(n)) = n + f(m + b) = m + n + f(2b).$$

Vậy với $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn: $m + n = p + q$ thì

$$f(f(p) + f(q)) = f(f(m) + f(n)) \Rightarrow f(m) + f(n) = f(p) + f(q).$$

Thay $p = q = k$, $m = k + 1$, $n = k - 1$ ($k \geq 2$) thì $k + 1 + k - 1 = 2k$ và $f(k + 1) + f(k - 1) = 2f(k)$ với mọi $k \geq 2$. Từ đó

$$\Rightarrow f(k + 1) - f(k) = f(k) - f(k - 1) = \dots = f(2) - f(1) = d \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow f(1), f(2), \dots, f(n)$ lập thành cấp số cộng công sai d
 $\Rightarrow f(n) = (n-1)d + a$ với $d \in \mathbb{Z}, d \neq 0, a = f(1)$ (do f là đơn ánh).

Thay vào (1) ta có

$$d([m + (n-1)d + a] - 1) + a = n + d(m + b - 1) + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2 = 1 \\ d(a-d) = bd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \pm 1 \\ a = b + d \end{cases}$$

$d = 1 \Rightarrow f(1) = b + 1 \Rightarrow f(n) = n + b$ (thỏa mãn) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$d = -1 \Rightarrow f(n) = -n + b$ với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) < 0$ với mọi $n > b$ (vô lý).

Bài toán 3.8.3. Chứng minh rằng không tồn tại $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

- 1) $f(0) = 1$,
- 2) $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$,
- 3) Tồn tại $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ mà $f(x_0) \in \mathbb{Z}$.

Lời giải. Thay $y = 0$ vào (2) $\Rightarrow f(x + 1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(n) = n + 1$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$, mà $f(x + n) = f(x) + n, \forall x \in \mathbb{R}$, với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Đặt $x_0 = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \geq 2, (p, q) = 1$. Ta có $f\left(\frac{p}{q}\right) = n \in \mathbb{Z}$. Ta đi tính $f\left(\frac{p}{q} + f\left(\frac{p}{q}\right)\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q} + f\left(\frac{p}{q}\right)\right) &= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\right) + 1 \\ &= f\left(\frac{2p}{q}\right) + 1 \text{ (theo (2))} \\ f\left(\frac{p}{q} + f\left(\frac{p}{q}\right)\right) &= f\left(\frac{p}{q} + n\right) \\ &= f\left(\frac{p}{q}\right) + n = 2n \\ \Rightarrow f\left(\frac{2p}{q}\right) &= 2n - 1 \\ f\left(\frac{3p}{q}\right) &= f\left(\frac{2p}{q} + \frac{p}{q}\right) \\ &= f\left(\frac{2p}{q} + f\left(\frac{p}{q}\right)\right) - 1 \\ &= f\left(\frac{2p}{q} + n\right) - 1 \end{aligned}$$

$$= f\left(\frac{2p}{q}\right) + n - 1 = 3n - 2.$$

Làm tương tự ta có $f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = qn - (q - 1) \Rightarrow f(p) = qn - q + 1 \Rightarrow p + 1 = qn - q + 1 \Rightarrow n = \frac{p+q}{q} = 1 + \frac{p}{q}$. Có $x_0 = \frac{p}{q} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$ (vô lý). Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.8.4. Chứng tỏ rằng không tồn tại song ánh $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Lời giải. Thay $n = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(m) = f(m) + f(1) + 3f(m)f(1) \Rightarrow f(1)[1 + 3f(m)] = 0 \Rightarrow f(1) = 0$. Do f là song ánh nên suy ra với mọi $n > 1$, $f(n) \geq 1$. Xét $k = m \cdot n$ là hợp số, $m, n \geq 2$ thì

$$f(k) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n) \geq 5.$$

Do f là song ánh nên $\{1, 2, 3, 4\}$ được nhận bởi các số nguyên tố $\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{P}$: $f(p) = 1, f(q) = 3$. Ta có

$$f(q^2) = 2f(q) + 3f^2(q) = 33,$$

$$f(pr) = f(p) + f(r) + 3f(p)f(r) = 4f(r) + 1.$$

Do f là toàn ánh nên tồn tại duy nhất số r : $f(r) = 8 \Rightarrow f(q^2) = f(pr) \Rightarrow q^2 = pr$ (vô lý).

Bài toán 3.8.5. Cho f xác định trên $\mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$1) f(p) = 1 \text{ với mọi } p \in \mathbb{P},$$

$$2) f(mn) = mf(n) + nf(m) \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm n để $f(n) = n$.

Lời giải. Ta có

$$f(p^2) = 2pf(p) = 2p, \quad \forall p \in \mathbb{P},$$

$$f(p^3) = p^2f(p) + pf(p^2) = 3p^2, \quad \forall p \in \mathbb{P}.$$

Quy nạp ta có $f(p^k) = kp^{k-1}$ với mọi $p \in \mathbb{P}$. Với $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2}$, ta có

$$f(n) = p_1^{m_1}f(p_2^{m_2}) + p_2^{m_2}f(p_1^{m_1})$$

$$\begin{aligned}
&= p_1^{m_1} \cdot m_2 p_2^{m_2-1} + p_2^{m_2} \cdot m_1 p_1^{m_1-1} \\
&= \frac{m_2 n}{p_2} + \frac{m_1 n}{p_1} = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{p_i} \cdot n.
\end{aligned}$$

Quy nạp với $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$, ta có $f(n) = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{p_i} \cdot n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử có $f(n) = n$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^k \frac{m_i}{p_i} \cdot n = n \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{p_i} = 1 \quad (m_i \geq 1) \\
&\Rightarrow p_1 \sum_{i=2}^k \frac{m_i}{p_i} = p_1 - m_1 \in \mathbb{Z} \\
&\dots \\
&\Rightarrow p_1 \cdots p_{k-1} \cdot \frac{m_k}{p_k} \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow m_k : p_k.
\end{aligned}$$

Tương tự $m_i : p_i$ với mọi i . Vậy $k = 1 \Rightarrow \frac{m_1}{p_1} = 1 \Rightarrow m = p = p_1$. Vậy $n = p^p$ (thỏa mãn).

Bài toán 3.8.6. Cho $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(mf(n)) = nf(m), \quad m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Chứng tỏ rằng nếu $p \in \mathbb{P}$ thì $f(p) \in \mathbb{P}$.

Lời giải. Thay $m = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(f(n)) = nf(1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f$ là đơn ánh trên $\mathbb{N}^*$ (chưa suy ra được toàn ánh).

Thay $n = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(mf(1)) = f(m)$ với mọi $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow mf(1) = m$ với mọi $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(f(n)) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f$ là song ánh.

Thay n bởi $f(n)$ vào (1) $\Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f$ là hàm nhân tính.

Hàm nhân tính trên $\mathbb{N}^*$ có tính chất sau:

$$\begin{aligned}
n &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \\
\Rightarrow f(n) &= [f(p_1)]^{\alpha_1} \cdots [f(p_i)]^{\alpha_i}.
\end{aligned}$$

Xét $p \in \mathbb{P}$ và đặt $f(p) = m \cdot n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ ($m, n \geq 2$),

$$\Rightarrow f(f(p)) = f(m \cdot n) = f(m)f(n) = p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(m) = 1, f(n) = p, \\ f(m) = p, f(n) = 1. \end{cases}$$

$f(m) = 1, f(n) = p \Rightarrow m = 1$ (do f là đơn ánh) (vô lý).

Vậy $f(p)$ là số nguyên tố (điều phải chứng minh).

Bài toán 3.8.7. Cho $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(mf(n)) = n^2 f(m), \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Chứng minh rằng nếu $p \in \mathbb{P}$ thì $f(p) \in \mathbb{P}$ hoặc $f(p)$ là số chính phương của một số nguyên tố.

Lời giải. Thay $m = 1$ vào (1) ta có

$$f(f(n)) = n^2 f(1), \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Giả sử tồn tại $f(n_1) = f(n_2)$, từ (2) $\Rightarrow n_1^2 f(1) = n_2^2 f(1) \Rightarrow n_1 = n_2$ (do $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$). Vậy f là đơn ánh.

Thay $n = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(mf(1)) = f(m)$ với mọi $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow mf(1) = m$ với mọi $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(1) = 1$. Từ (2) ta có $f(f(n)) = n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Thay m bởi $f(m)$ vào (1),

$$\Rightarrow f(f(m)f(n)) = n^2 f(f(m)) = m^2 n^2 = f(f(mn)), \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow f(mn) = f(m)f(n), \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Gọi $p \in \mathbb{P}$. Nếu $f(p)$ là hợp số thì $f(p) = a \cdot b$, $a \geq b \geq 2$. Ta có $p^2 = f(f(p)) = f(ab) = f(a)f(b)$. Từ đó ta có

$$\begin{cases} f(a) = 1, f(b) = p^2 \\ f(a) = p^2, f(b) = 1 \\ f(a) = f(b) = p. \end{cases}$$

• $f(a) = 1, f(b) = p^2 \Rightarrow a = 1$ (do f là đơn ánh) (vô lý).

• $f(a) = p^2, f(b) = 1 \Rightarrow b = 1$ (vô lý).

• $f(a) = f(b) = p \Rightarrow a = b \Rightarrow f(p) = a^2$. Ta chứng minh $a \in \mathbb{P}$. Đặt $a = m \cdot n$ với $p = f(a) = f(mn) = f(m)f(n)$, ta suy ra

$$\left[\begin{array}{l} f(m) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{P} \\ f(n) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{P}. \end{array} \right.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

KẾT LUẬN

Sau thời gian hai năm học tập tại Khoa Toán- Cơ- Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, được sự giúp đỡ tận tình của các thầy cô trong Khoa, đặc biệt là TS. Phạm Văn Quốc, tôi đã hoàn thành luận văn với tên đề tài “*Một số phương pháp giải phương trình hàm*”.

Luận văn đạt được một số kết quả sau:

1. Luận văn đã nêu ra được một số kiến thức cơ bản trong đại số và giải tích có ứng dụng nhiều trong việc giải quyết các bài toán phương trình hàm.
2. Luận văn đã hệ thống và phân loại một số dạng toán thường gặp theo phương pháp giải của các bài toán phương trình hàm với nhiều bài toán có lời giải, nhận xét và bình luận.
3. Luận văn đã nêu ra một số hướng khai thác mở rộng, tổng quát và các hướng tư duy tìm lời giải cùng các biến hóa trong một số dạng toán phương trình hàm.

Phân dạng các phương trình hàm sẽ giúp cho sự định hướng và giải quyết chúng. Vì vậy tôi hi vọng luận văn này có thể làm tài liệu tham khảo cho quá trình nghiên cứu, giảng dạy và học tập toán ở bậc học phổ thông. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để đề tài này tiếp tục được hoàn thiện.

Xin chân thành cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Tài Chung (2014), *Bồi dưỡng học sinh giỏi phương trình hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [2] Trần Nam Dũng (2010), *Tài liệu bồi dưỡng đội tuyển Việt Nam tham dự IMO*.
- [3] Nguyễn Quý Dy (chủ biên) (2001), *Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán-Tập 3*, Nhà xuất bản giáo dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu (2001), *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [5] Nguyễn Trọng Tuấn (2004), *Bài toán hàm số qua các kì thi Olympic*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [6] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.
- [7] Website: mathlinhks.ro, vnmath.com, diendantoanhoc.net,...