

CHỦ ĐỀ 2**TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR****DẠNG 1****TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR**

* Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

* Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A.** $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Câu 3. Cho hai vector a và b thỏa mãn $|a|=3, |b|=2$ và $a \cdot b = -3$. Xác định góc α giữa hai vector a và b

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha, b) \rightarrow \cos(\alpha, b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \rightarrow (\alpha, b) = 120^\circ$$

Ta có

Câu 4. Cho hai vector a và b thỏa mãn $|a|=|b|=1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector a và b .

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 180^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

$$\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b} \right) (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}a^2 - \frac{13}{5}ab - 3b^2 = 0 \quad |a|=|b|=1 \rightarrow ab = -1$$

Ta có

$$\cos(\alpha, b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \rightarrow (\alpha, b) = 180^\circ$$

Suy ra

Câu 5. Cho hai vector a và b thỏa mãn điều kiện $|a|=|b|=1$ và $a \cdot b = 3$. Độ dài vector $3a + 5b$:

- A. $5\sqrt{5}$. B. $\sqrt{24}$. C. 8. D. 124.

Lời giải

Chọn B.

$$(3a + 5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2 = 9 + 90 + 25 = 124.$$

$$\Rightarrow |3a + 5b| = \sqrt{124}$$

Câu 6. Cho a, b có $(a + 2b)$ vuông góc với vector $(5a - 4b)$ và $|a|=|b|$. Khi đó:

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

+ Vì $(a+2b)$ vuông góc với vector $(5a-4b)$ nên:

$$\overrightarrow{(a+2b)} \cdot \overrightarrow{(5a-4b)} = 0 \Leftrightarrow 5a^2 - 8b^2 + 6ab = 0 \Leftrightarrow ab = \frac{-5a^2 + 8b^2}{6}$$

Ta có $|a| = |b| \Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2$. Suy ra $\overrightarrow{ab} = \frac{3a^2}{6}$

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{ab}}{|a||b|} = \frac{\frac{3a^2}{6}}{a^2} = \frac{1}{2}$$

+

Câu 7. Cho hai vector a, b thỏa mãn: $|a|=4; |b|=3; |a-b|=4$. Gọi α là góc giữa hai vector a, b . Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$

B. $\alpha = 30^\circ$

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

D. $\alpha = 60^\circ$

Lời giải

Chọn A.

$$(a-b)^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2ab \Rightarrow ab = \frac{9}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{ab}{|a||b|} = \frac{3}{8}$$

Do đó:

Câu 8. u và v là 2 vector đều khác 0 . Khi đó $|\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}|^2$ bằng

A. $\overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{v}^2 - 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

B. $\overrightarrow{u}^2 + 4\overrightarrow{v}^2 + 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

C. $\overrightarrow{u}^2 + 4\overrightarrow{v}^2$

D. $4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}|^2 = (\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 4\overrightarrow{v}^2 + 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Câu 9. Cho hai vector a và b có $|a|=5$, $|b|=12$ và $|a+b|=13$. Khi đó $\cos$ của góc giữa hai vector $\overrightarrow{a-b}$ và $\overrightarrow{a+b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$

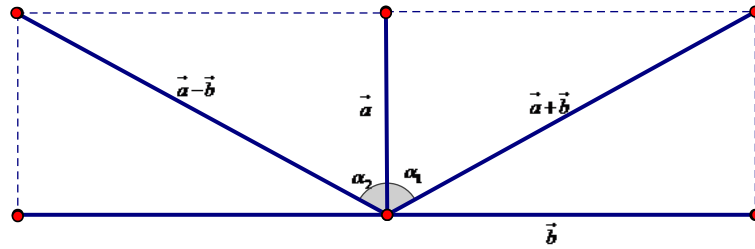
B. $\frac{5}{12}$

C. $-\frac{119}{169}$

D. $\frac{119}{169}$

Lời giải

Chọn C.



Nhận thấy $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ suy ra $a \perp b$

Mặt khác:

$$\cos(\alpha_2) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha_2 = \cos^{-1} \frac{5}{13}$$

Do đó góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_2 = 2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}$

$$\cos(\overrightarrow{a-b}, \overrightarrow{a+b}) = \cos\left(2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}\right) = -\frac{119}{169}$$

Vậy

Câu 10. Cho $u = a + 3b$ vuông góc với $v = 7a - 5b$ và $x = a - 4b$ vuông góc với $y = 7a - 2b$. Khi đó góc giữa hai vector a và b bằng

- A. $(a, b) = 75^\circ$ B. $(a, b) = 60^\circ$ C. $(a, b) = 120^\circ$ D. $(a, b) = 45^\circ$

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\begin{cases} u \cdot v = 0 \\ x \cdot y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 3b) \cdot (7a - 5b) = 0 \\ (a - 4b) \cdot (7a - 2b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7|a|^2 - 15|b|^2 = -16ab \\ 7|a|^2 + 8|b|^2 = 30ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b|^2 = 2ab \\ |a|^2 = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b|^2 = 2ab \\ |a| = |b| \end{cases}$$

$$\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (a, b) = 60^\circ$$

Từ đó, ta có:

Câu 11. Cho hai vector a, b thỏa mãn: $|a| = 4; |b| = 3; a \cdot b = 10$. Xét hai vector $y = a - b$ và $x = a - 2b$. Gọi α là góc giữa hai vector x, y . Chọn khẳng định đúng.

- A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$ B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$ C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$ D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$x \cdot y = (a - 2b) \cdot (a - b) = (a)^2 + 2(b)^2 - 3a \cdot b = 4$$

$$|x| = \sqrt{(x)^2} = \sqrt{(a - 2b)^2} = \sqrt{(a)^2 + 4(b)^2 - 4a \cdot b} = 2\sqrt{3}$$

$$|y| = \sqrt{(y)^2} = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(a)^2 + (b)^2 - 2a.b} = \sqrt{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{x.y}{|x|.|y|} = \frac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

Câu 12. Cho hai vector a, b thỏa mãn: $|a| = 26; |b| = 28; |a+b| = 48$. Độ dài vector $a-b$ bằng?

A. 25.

B. $\sqrt{616}$.

C. 9.

D. $\sqrt{618}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} |a-b|^2 &= (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a.b = 2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 \\ &= 2(|a|^2 + |b|^2) - |a+b|^2 = 2(26^2 + 28^2) - 48^2 = 616 \\ \Rightarrow |a-b| &= \sqrt{616}. \end{aligned}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho $a=3, b=5$ góc giữa a và b bằng 120° .

A. $|a+b| = \sqrt{19}$

B. $|a-b| = 8$

C. $|a-2b| = \sqrt{139}$

D. $|a+2b| = 9$

Lời giải

A. $|a+b| = \sqrt{19}$ **ĐÚNG**

B. $|a-b| = 8$ **SAI**

C. $|a-2b| = \sqrt{139}$ **ĐÚNG**

D. $|a+2b| = 9$ **SAI**

Ta có:

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2a.b = |a|^2 + |b|^2 + 2|a|.|b|\cos(\widehat{a.b}) = 9 + 25 + 2.3.5\left(-\frac{1}{2}\right) = 19 \\ \Rightarrow |a+b| &= \sqrt{19} \end{aligned}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 4 \cdot 25 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 139$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 79$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{79}$$

Câu 14. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Lời giải

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ **ĐÚNG**

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ **ĐÚNG**

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ **SAI**

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ **ĐÚNG**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và D.

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

• A đúng, vì $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

• B đúng, vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Cho 2 vector a và b thỏa mãn $|a|=4, |b|=3$ và $|a+2b|=2\sqrt{7}$. Tính (a, b) .

Lời giải

Đáp án: $(a, b) = 120^\circ$.

Ta có:

$$|a+2b|=2\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow (a+2b)^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4b^2 + 4ab = 28$$

$$\Leftrightarrow |a|^2 + 4|b|^2 + 4|a||b|\cos(a, b) = 28 \quad \cos(a, b) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (a, b) = 120^\circ$$

Câu 16. Cho hai vector a và b tạo với nhau góc 120° và $|a|=3, |b|=5$. Tính $|a+2b|$.

Lời giải

Đáp án: $|a+2b| = \sqrt{79}$.

Cách 1 :

$$\begin{aligned} |a+2b|^2 &= (a+2b)^2 = |a|^2 + 4|b|^2 + 4a \cdot b = |a|^2 + 4|b|^2 + 4|a||b|\cos(a, b) = 9 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 79 \\ \Rightarrow |a+2b| &= \sqrt{79} \end{aligned}$$

Cách 2 :

Vẽ hình bình hành $ABCD$ sao cho: $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = 2b$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $|a+2b| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Áp dụng định lý hàm cosin trong tam giác ACD :

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{79}$$

Câu 17. Cho ba vector a, b, c thỏa mãn $|a|=1, |b|=2, |a-b|=3$. Tính $(a-2b) \cdot (2a+b)$.

Lời giải

Đáp án: $(a-2b) \cdot (a+2b) = 0$.

$$\text{Ta có: } |a-b|=3 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 9 \Leftrightarrow 1 - 2a \cdot b + 4 = 9 \Leftrightarrow a \cdot b = -2$$

$$\text{Ta có: } (a-2b) \cdot (2a+b) = 2(a^2 - 3a \cdot b - 2b^2) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 = 0$$

Câu 18. Cho hai vectơ a, b có $|a| = |b| = 1$ và $(a, b) = 60^\circ$. Xác định sao cho thỏa mãn $|xa + b| = \sqrt{3}$.

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Ta có:

$$|xa + b| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (xa + b)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 a^2 + 2xab + b^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xcos60^\circ + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Câu 19. Cho ba véc-tơ a, b, c thỏa mãn: $|a| = 4, |b| = 1, |c| = 5$ và $5(b - a) + 3c = 0$. Khi đó biểu thức $M = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ có giá trị bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $M = 29$.

Ta có $5(b - a) + 3c = 0 \Leftrightarrow 5(a - b) = 3c \Leftrightarrow 25(a - b)^2 = 9c^2$

$$\Leftrightarrow 25(a^2 - 2ab + b^2) = 9c^2 \Leftrightarrow ab = 4$$

Tương tự: $5(b - a) + 3c = 0 \Leftrightarrow 5a = 5b + 3c \Leftrightarrow b \cdot c = 5$.

$$5(b - a) + 3c = 0 \Leftrightarrow 5b = 5a - 3c \Leftrightarrow a \cdot c = 20$$

Vậy $M = 4 + 5 + 20 = 29$.

Câu 20. Cho hai véc tơ a và b thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1, |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}$. Đặt $u = a + b$ và $v = 2ka - b, k \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $(u, v) = 60^\circ$

Lời giải

Đáp án: $k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15} \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4ab = 15 \Leftrightarrow 2ab = 1$$

$$uv = (a + b)(2ka - b) = 2k|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + (2k - 1)ab = 2k - 4 + \frac{2k - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} (|u||v|)^2 &= ((a+b)|(2ka-b)|)^2 = (|a|^2 + |b|^2 + 2ab)(4k^2|a|^2 + |b|^2 - 4kab) = (5+2ab)(4k^2+4-4kab) \\ &= 6(4k^2+4-2k) \Rightarrow |u||v| = \sqrt{6(4k^2+4-2k)} \end{aligned}$$

$$(u, v) = 60^\circ \Rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{uv}{|u||v|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2k-4+\frac{2k-1}{2}}{\sqrt{6(4k^2+4-2k)}} \Leftrightarrow \sqrt{6(4k^2+4-2k)} = 6k-9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6(4k^2+4-2k)} = 6k-9 \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ \sqrt{6(4k^2+4-2k)} = 6k-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ 12k^2 - 96k + 57 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ k = 4 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

DẠNG 2 GÓC GIỮA HAI VECTOR

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

- $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$
- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác 0 luôn bằng 0° .
- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác 0 luôn bằng 180° .



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\angle BAC = \angle BAD = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$?

A. 60° .

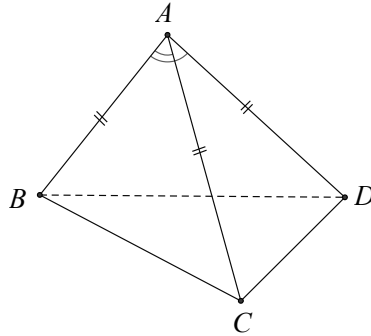
B. 45° .

C. 120° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D.



Ta có

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{CD} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ &\Rightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) = 90^\circ\end{aligned}$$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\vec{SA}$ và $\vec{BC}$?

A. 120° .

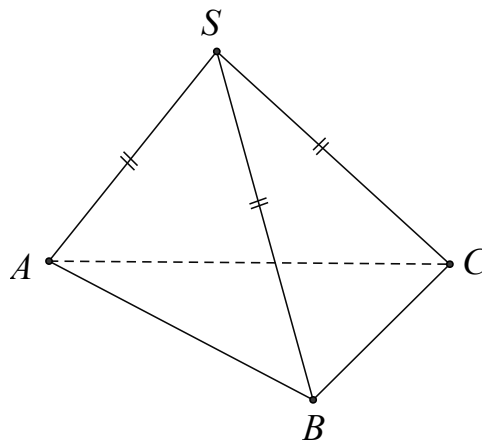
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B.



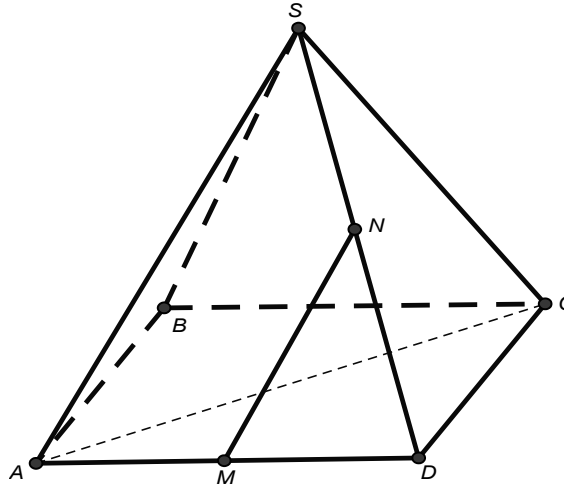
Ta có

$$\begin{aligned}\vec{SA} \cdot \vec{BC} &= \vec{SA} \cdot (\vec{SC} - \vec{SB}) = \vec{SA} \cdot \vec{SC} - \vec{SA} \cdot \vec{SB} \\ &= SA \cdot SC \cdot \cos \angle ASC - SA \cdot SB \cdot \cos \angle ASB = 0 \\ &\Rightarrow (\vec{SA}, \vec{BC}) = 90^\circ\end{aligned}$$

- Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:
- A. 45° B. 30° **C. 90°** D. 60°

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$$

$\Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S .

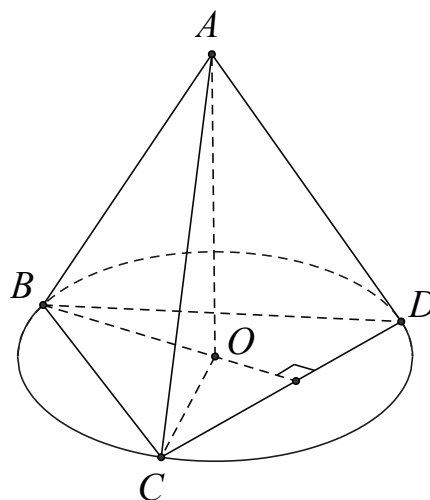
Khi đó:
$$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}) = 90^\circ \Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ$$

- Câu 24.** Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu ?

- A. 0° . B. 30° . **C. 90°** . D. 60° .

Lời giải

Chọn C.



Ta có
$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} \cdot \cos 30^\circ - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} \cdot \cos 60^\circ \\
 &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Suy ra $AO \perp CD$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A.

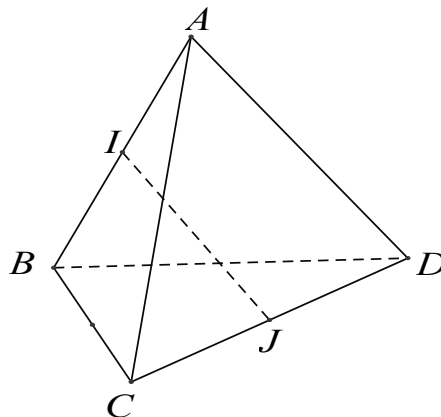
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$$

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\angle BAC = \angle BAD = 60^\circ, \angle CAD = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn B.



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD .

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

Ta có:

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\angle BAC = 60^\circ$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

$$\text{Xét } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90° .

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Lời giải

Chọn B.

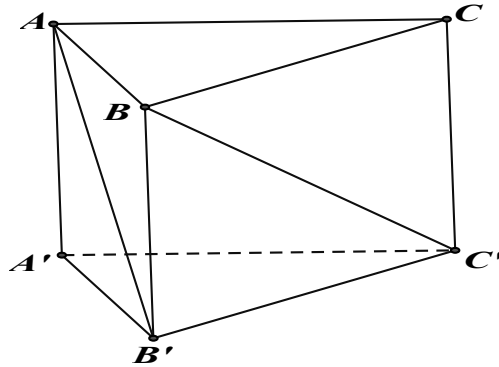
Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\vec{CD} \cdot \vec{AB} = (\vec{AD} - \vec{AC}) \cdot \vec{AB}$

$$= |\vec{AB}| |\vec{AD}| \cos 60^\circ - |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Vậy $AB \perp CD$.

Câu 28. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. 60° .

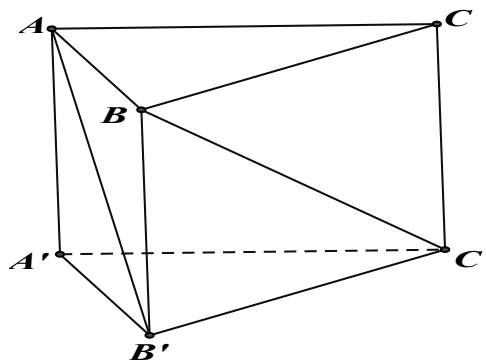
B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $\vec{AB'} \cdot \vec{BC'} = (\vec{AB} + \vec{BB'}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CC'}) = \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CC'} + \vec{BB'} \cdot \vec{BC} + \vec{BB'} \cdot \vec{CC'}$

$$= \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CC'} + \vec{BB'} \cdot \vec{BC} + \vec{BB'} \cdot \vec{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$\cos(\vec{AB'}, \vec{BC'}) = \frac{\vec{AB'} \cdot \vec{BC'}}{|\vec{AB'}| \cdot |\vec{BC'}|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{AB'}, \vec{BC'}) = 60^\circ$$

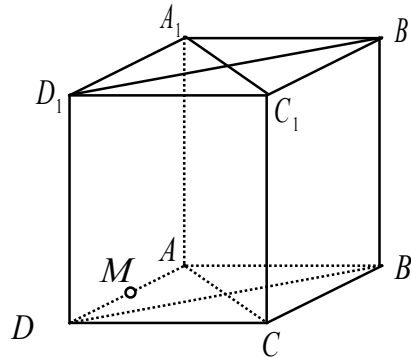
Suy ra

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{3}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có:

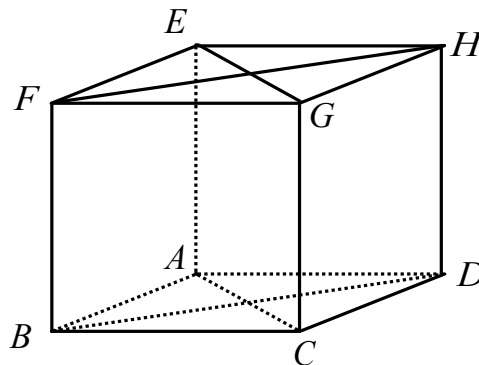
$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1} &= (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}) \\ &= \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90° B. 60° C. 45° D. 120°

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $EG \parallel AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 45^\circ$$

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

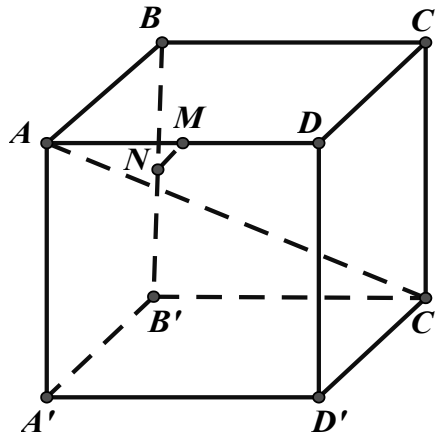
B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

* Đặt $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AD}$, $\vec{c} = \vec{AA'}$ $\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

* Ta có:

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BN} - \vec{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow |\vec{MN}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow |\vec{AC'}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\vec{AC'} \cdot \vec{MN} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$$

$$\cos(\vec{MN}; \vec{AC'}) = \left| \cos(\vec{MN}; \vec{AC'}) \right| = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{AC'}|}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{AC'}|} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.

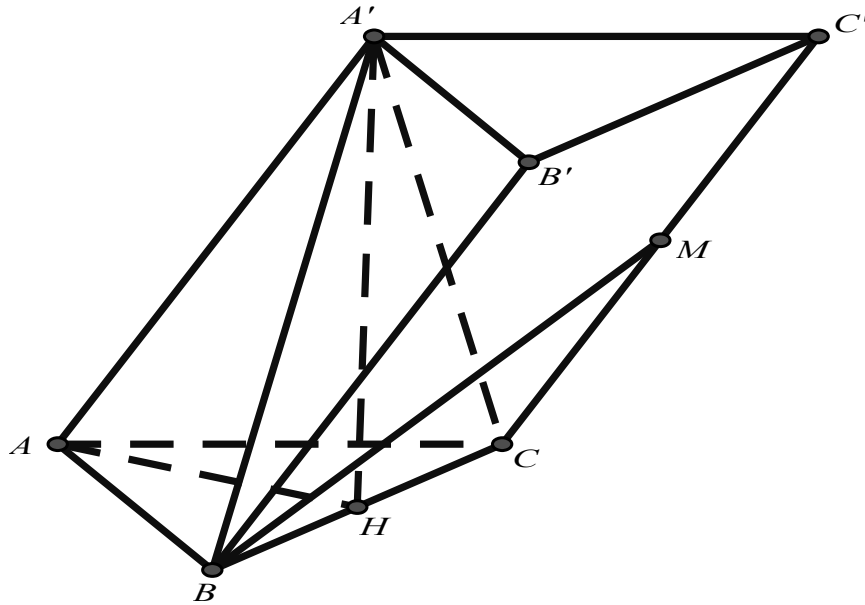
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = a \frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0 + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{3a^2}{4}$.

$$\cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\left| \frac{3a^2}{4} \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}.$$

Suy ra

Câu 33. Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$

B. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

C. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

D. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB AC \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AB^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 (1 - \cos^2 A)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \end{aligned}$$

Câu 34. Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

B. $2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Lời giải

Chọn A.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$.

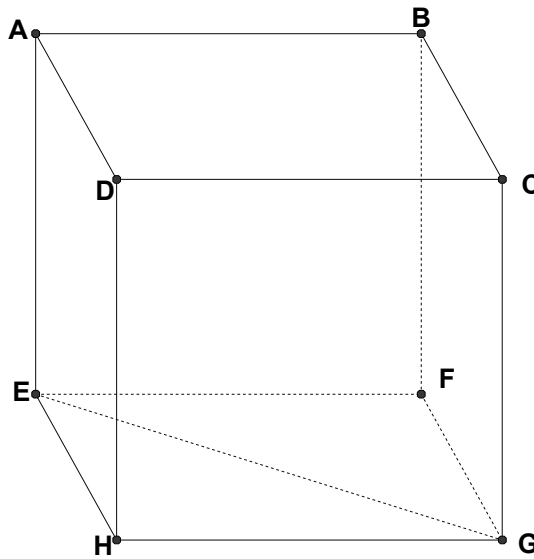
B. a^2 .

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) = a^2 \quad (\text{Vì } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD})$$

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$

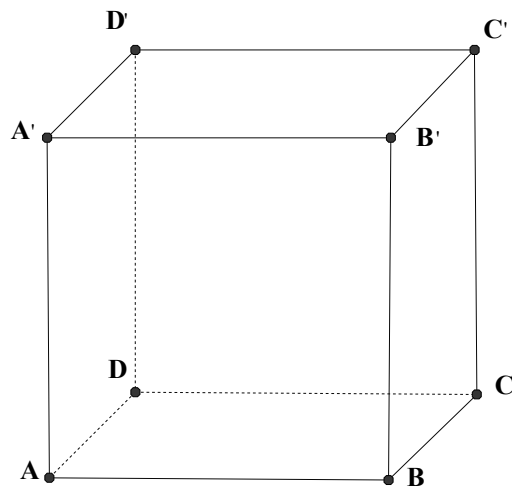
B. $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$

C. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$

D. $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có : $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = 0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'A'}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (vô lí)}$$

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD$, $\angle CAB = \angle DAB = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

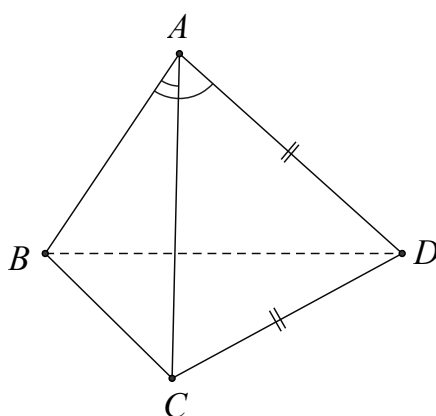
B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D.



$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD}$$

Ta có

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \\ &= AB \cdot AD \cdot \frac{1}{2} - AB \cdot \frac{3}{2} AD \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} AB \cdot AD = -\frac{1}{4} AB \cdot CD. \end{aligned}$$

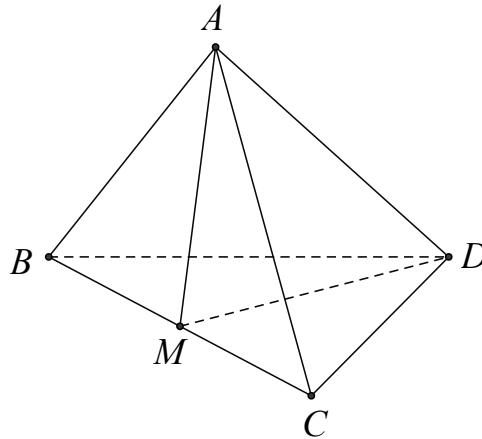
Do có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\frac{1}{4} AB \cdot CD}{AB \cdot CD} = -\frac{1}{4}$. Suy ra $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 38. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.



Giả sử cạnh của tứ diện là a .

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Ta có

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AM \cdot \cos 30^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ \\ &= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Do có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương. Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

- A. Sai ở bước 3. **B. Đúng ba bước** C. Sai ở bước 2. D. Sai ở bước 1.

Lời giải

Chọn B.

Bài giải đúng.

Câu 40. Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chọn hệ thức đúng?

- A. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$. B. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$.
C. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2)$. **D. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.**

Lời giải

Chọn D.

Cách 1

Ta có

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} &= 0 \\ \Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + (GA^2 + GB^2 - AB^2) + (GA^2 + GC^2 - AC^2) + (GB^2 + GC^2 - BC^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + BC^2 &= 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) \end{aligned}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 &= \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \quad \text{p} \quad GA^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \right) \\ GA &= \frac{2}{3} MA \end{aligned}$$

Tương tự ta suy ra được

Cách 3: Chuẩn hóa giả sử tam giác ABC đều có cạnh là 1. Khi đó

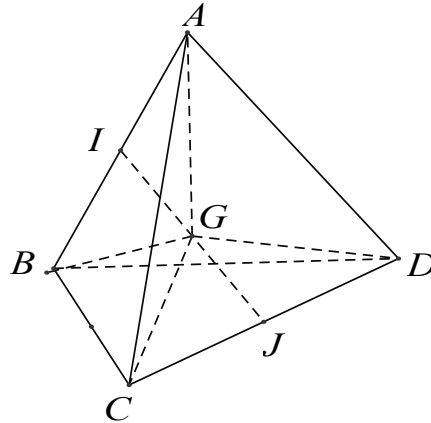
$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= 3 \\ GA^2 + GB^2 + GC^2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{p} \quad 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2.$$

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Chọn khẳng định đúng?

- A. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.
B. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.
C. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.
D. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

Lời giải

Chọn B.



$$\begin{aligned}
 & AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 \\
 &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD})^2 + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD})^2 + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GD})^2 \\
 &= 3AG^2 + 3BG^2 + 3CG^2 + 3DG^2 + 2(\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GD}) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}
 & (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 0 \\
 & \Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\
 &= 2(\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GD}) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a .

- A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 90^\circ$
- B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -a^2$
- C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}$
- D. $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0$

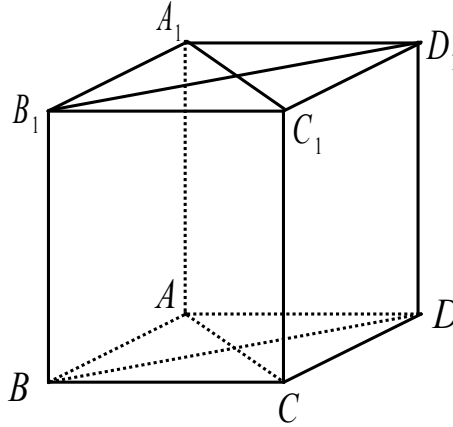
Lời giải

A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 90^\circ$ ĐÚNG

B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -a^2$ ĐÚNG

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}$ ĐÚNG

D. $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0$ ĐÚNG



Câu 43. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a, BC = 2a, AA_1 = 3a$.

A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 45^\circ$

B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{D_1D} = 9a^2$

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1}$

D. $\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$

Lời giải

A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 45^\circ$ SAI

B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{D_1D} = 9a^2$ ĐÚNG

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1}$ ĐÚNG

D. $\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$ ĐÚNG

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

B. Đúng vì

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}; \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

C. Sai vì

D. Đúng vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **sai**?

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng 90° .

B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60° .

C. Góc giữa AD và B_1C bằng 45° .

D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng 90° .

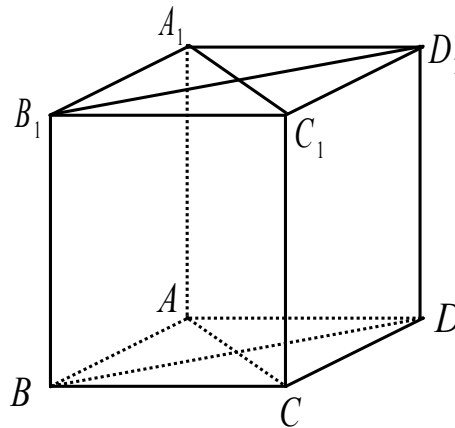
Lời giải

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng 90° . **ĐÚNG**

B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60° . **SAI**

C. Góc giữa AD và B_1C bằng 45° . **ĐÚNG**

D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng 90° . **ĐÚNG**



$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB_1} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

Ta có:

$$= \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (\text{vì } (\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BA}) = 90^\circ \text{ và } (\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ)$$

$$(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{B_1D_1}) = 90^\circ \Rightarrow (AA_1, B_1D_1) = 90^\circ$$

Do đó:

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

A. $A'C' \perp BD$

B. $BB' \perp BD$

C. $A'B \perp DC'$

D. $BC' \perp A'D$

Lời giải

A. $A'C' \perp BD$ **ĐÚNG**

B. $BB' \perp BD$ **SAI**

C. $A'B \perp DC'$ **ĐÚNG**

D. $BC' \perp A'D$ **ĐÚNG**

Ta có: $\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB'} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BA} (\cos \angle B'BA + \cos \angle B'BC)$$

Vì $AA'B'B$ và $ABCD$ là hai hình thoi bằng nhau nên

$$+ \angle B'BA = \angle B'BC \Rightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BD} \neq 0 \text{ suy ra } BB' \text{ không vuông góc với } BD$$

$$+ \angle B'BA + \angle B'BC = 180^\circ \Rightarrow \cos \angle B'BA = -\cos \angle B'BC \Rightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ suy ra } BB' \perp BD$$

Nên đáp án B có thể sai vì chưa có điều kiện của góc $\angle B'BA$ và $\angle B'BC$

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và

N sao cho $MD = NB = x (0 \leq x \leq a)$.

A. $AC' \perp B'D'$

B. AC' cắt $B'D'$

C. $AC' \perp MN$

D. Cả A, B, C đều đúng

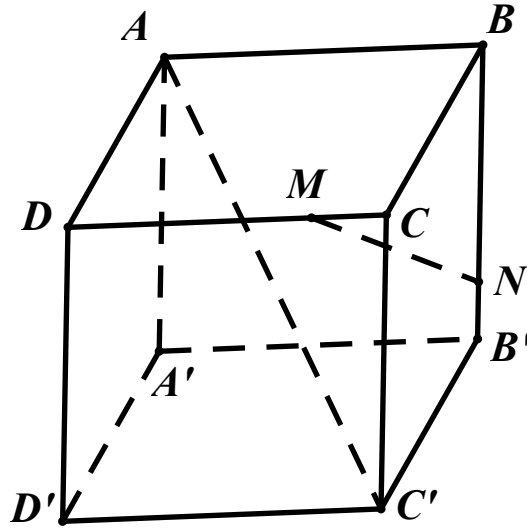
Lời giải

A. $AC' \perp B'D'$ **ĐÚNG**

B. AC' cắt $B'D'$ **SAI**

C. $AC' \perp MN$ **ĐÚNG**

D. Cả A, B, C đều đúng **SAI**



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'} = \vec{c} - \vec{b}$ nên

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{b} = a^2 - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{B'D'}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) = \left(\vec{b} + \frac{x}{a} \vec{a} \right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a} \vec{b} \right) = \frac{x}{a} \vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \left[\frac{x}{a} \vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c} \right]$$

Từ đó ta có

$$= \frac{x}{a} a^2 + \left(1 - \frac{x}{a} \right) b^2 - c^2 = x \cdot a + \left(1 - \frac{x}{a} \right) a^2 - a^2 = 0$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{MN}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = k$

Lời giải

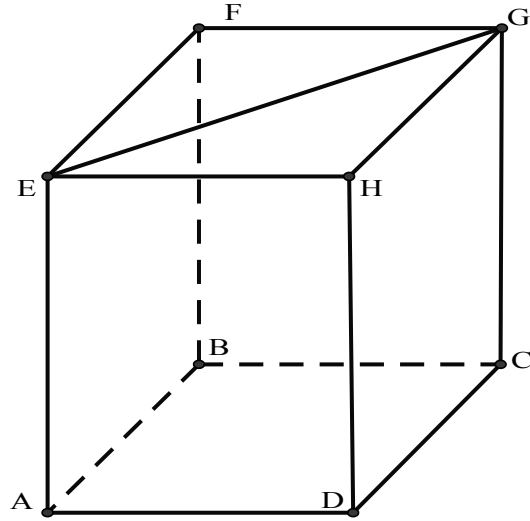
Đáp án: $k = 0$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{aligned}$$

Câu 49. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng? Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = a^2$.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} &= (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) \\ &= \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= 0 + a^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = a^2 \end{aligned}$$

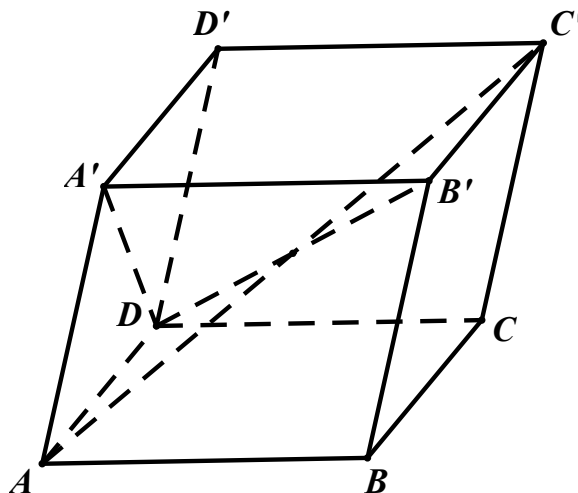
Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc $\angle A'D'B' = 60^\circ, \angle A'AD = \angle A'AA = 120^\circ$.

- Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.
- Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.
- Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA' .

Lời giải

Đáp án:

- $\angle (AB, A'D) = 60^\circ; \angle (AC', B'D) = 90^\circ$
- $S_{A'B'CD} = a^2\sqrt{3}; S_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}$
- $\angle (AC', AB) = \angle (AC', AD) = \angle (AC', AA') = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$



a)

Đặt $\overrightarrow{AA'} = a, \overrightarrow{A'B'} = b, \overrightarrow{A'D'} = c$

Ta có $\overrightarrow{A'D} = a + c$ nên

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}) \right|$$

$$= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'D}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{A'D}|} = \frac{|a(a+c)|}{|a| |a+c|}$$

Để ý rằng $|a+c| = a, \overrightarrow{a(a+c)} = \frac{a^2}{2}$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}) = 60^\circ$$

Từ đó

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{b} + c - a, \overrightarrow{B'D} = a - b + c$, từ đó tính được

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'D} = (b+c-a)(a-b+c) = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'D}) = 90^\circ$$

b)

$$\overrightarrow{A'C} = a + b + c, \overrightarrow{B'D} = a - b + c \Rightarrow \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D} = (a+b+c)(a-b+c) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{B'D} \text{ nên } S_{A'B'DC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D}$$

$$\text{Dễ dàng tính được } \overrightarrow{A'C} = a\sqrt{2}, \overrightarrow{B'D} = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{A'B'DC} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$$

$$S_{AA'C'C} = AA' AC \sin(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}), \quad AA' = a, AC = a\sqrt{3}$$

$$\sin(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}) = \sqrt{1 - \cos^2(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC})} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Tính được

$$\text{Vậy } S_{AA'C'C} = AA' AC \sin(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2 \sqrt{2}$$

$$\text{c) ĐS: } (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AA'}) = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$$