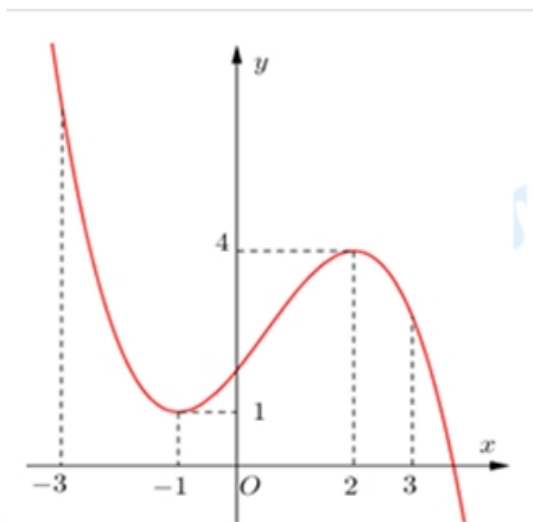


ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I – LỚP 12 NĂM HỌC 2022-2023

THỜI GIAN: 90 PHÚT

PHẦN I: ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho đồ thị hàm số



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 4)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 3)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	-2	-1	1	3		
y'		+	0	-		+
y			1			5
	0			-2		

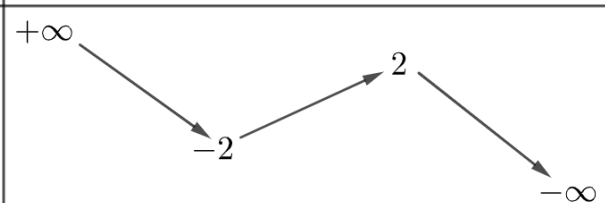
Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên

- A.** $[-2; -1]$. **B.** $(-1; 1)$.
C. $(-1; 3)$. **D.** $(-2; 1)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định bên dưới.

- A.** $\min_{[1;2]} y = \frac{1}{2}$. **B.** $\max_{[-2; -1]} y = 0$. **C.** $\min_{[3;5]} y = \frac{2}{3}$. **D.** $\max_{[-2; -1]} y = \frac{1}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						

- A. $x = 0$. B. $y = -2$. C. $(0; -2)$. D. $y = 2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Số điểm cực trị của hàm số là:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{4x+1}$. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- A. $x = \frac{1}{2}$. B. $x = -\frac{1}{4}$. C. $y = \frac{1}{2}$. D. $y = -\frac{1}{4}$.

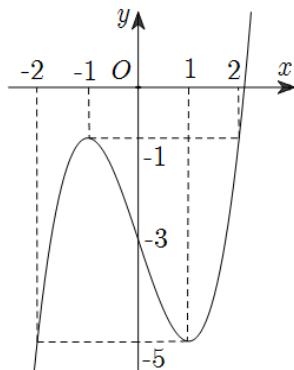
Câu 7. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-2x}{x+1}$ là

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 8. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$

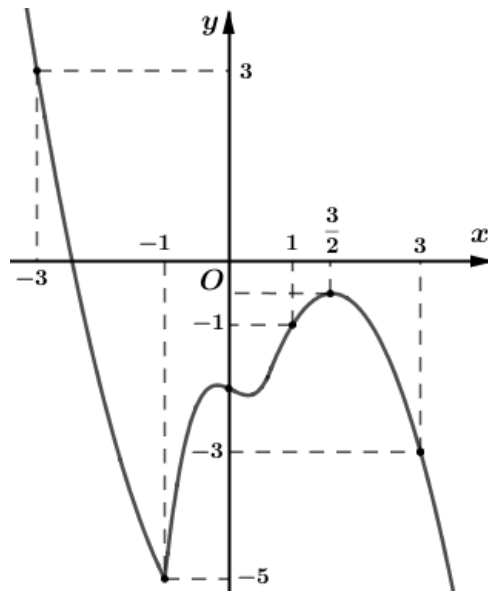
- A. Điểm $P(1; -1)$. B. Điểm $N(1; -2)$. C. Điểm $M(1; 0)$. D. Điểm $Q(1; 1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tổng $M + m$ trong đó giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



- A. -3. B. -1. C. -5. D. -6.

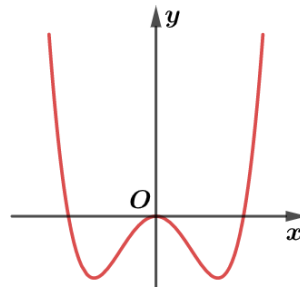
Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau đây:



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

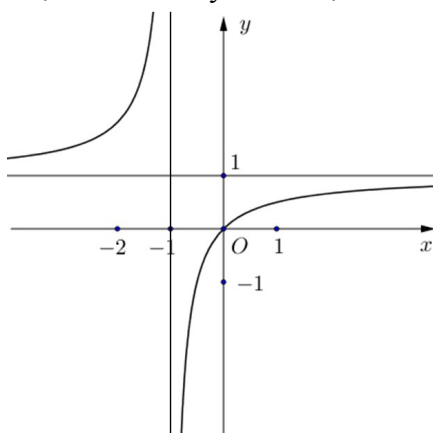
- A. $\min_{[-2;1]} y = -5$ B. $\min_{[-2;1]} y = -3$ C. $\max_{[-2;1]} y = -\frac{1}{2}$ D. $\max_{[-2;1]} y = 3$

Câu 11. Đồ thị bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

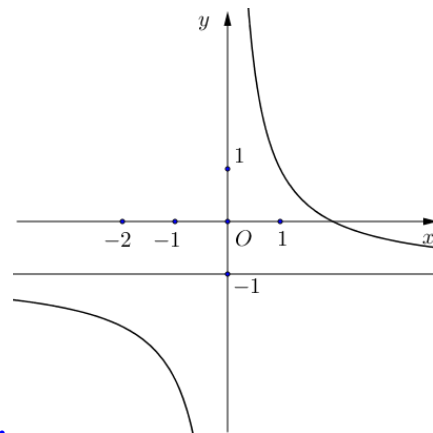


- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$
C. $y = -2x^2 + x^4$ D. $y = -x^4 + 2x^2$

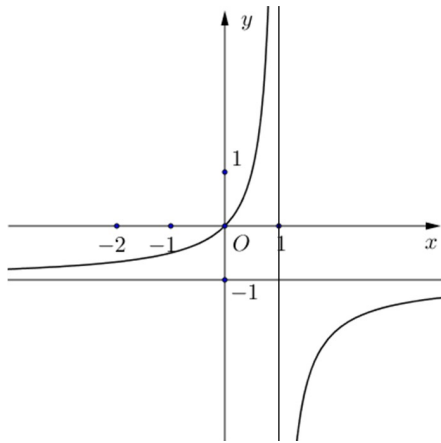
Câu 12. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{-x}{x-1}$?



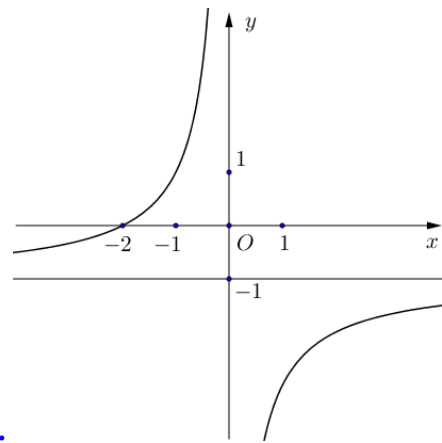
A.



B.



C.



D.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 4$ là

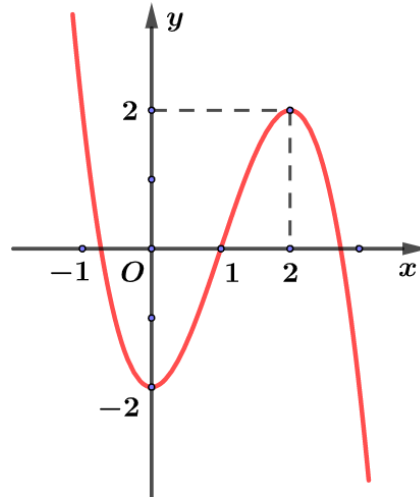
A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 15. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ tại điểm $M(0;1)$.

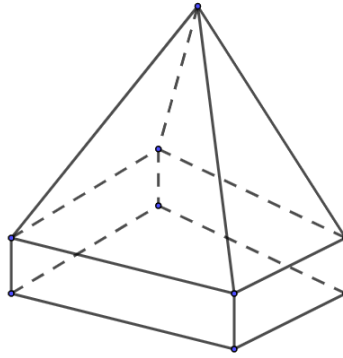
A. $k = 1$.

B. $k = \sqrt{2}$.

C. $k = -1$.

D. $k = 3$.

Câu 16. Hình đa diện sau có bao nhiêu mặt.



A. 10.

B. 11.

C. 8.

D. 9.

Câu 17. Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ có bao nhiêu cạnh.

A. 6.

B. 12.

C. 20.

D. 30.

Câu 18. Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp biết $OA=5, OB=4, OC=6$.

A. 120.

B. 40.

C. 30.

D. 20.

Câu 19. Cho khối chóp có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. a^3 .

B. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $3a^3$.

Câu 20. Thể tích khối hộp chữ nhật có các kích thước là $2a, 3a, 5a$ là

A. $15a^3$.

B. $10a^3$.

C. $30a^3$.

D. $6a^3$.

Câu 21. Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$. Biết hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$.

A. -1538.

B. 28.

C. 26.

D. 1538.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = mx^4 - (m-3)x^2 + 10$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số có 3 cực trị.

A. $\begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$.

B. $0 < m < 3$.

C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 0 \end{cases}$.

D. $0 \leq m \leq 3$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	
y	$+\infty$	$+\infty$	1	0

$\swarrow$ 1 $-\infty$ $\nearrow$ 0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 25. Đồ thị của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2023}}{x^2+2021x-2022}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

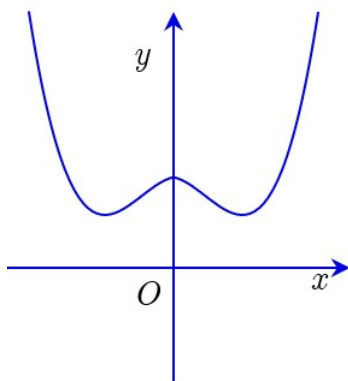
Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ trên đoạn $[-2; 0]$.

- A. $\max_{[-2;0]} y = 9$ B. $\max_{[-2;0]} y = -5$ C. $\max_{[-2;0]} y = -\frac{16}{3}$ D. $\max_{[-2;0]} y = -5,9$

Câu 27. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng.

- A. -1. B. 1. C. $\frac{3}{5}$. D. -3.

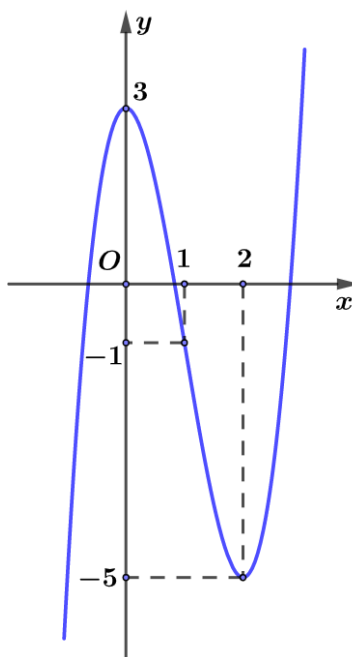
Câu 28. Cho đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) như hình vẽ bên



Mệnh đề đúng về dấu của các hệ số a, b, c là

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$ B. $a > 0, b > 0, c > 0$
C. $a < 0, b < 0, c > 0$ D. $a < 0, b > 0, c > 0$

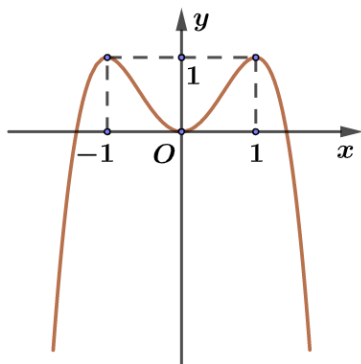
Câu 29. Cho đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) như hình vẽ bên



Đồ thị trong hình vẽ trên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. B. $y = x^3 - 5x^2 + 3$. C. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$. D. $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 4 = 0$ là

A. 0 . B. 4 . C. 3 . D. 2 .

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m + 2 = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. $0 < m < 4$. B. $m > 4$. C. $m < 4$. D. $0 \leq m \leq 4$.

Câu 32. Cho khối chóp có đáy là đa giác $2n$ cạnh. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Số cạnh của khối chóp bằng $2n + 1$.
 B. Số mặt của khối chóp bằng $4n$.
 C. Số đỉnh của khối chóp nhiều hơn số mặt của nó.
 D. Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó.

Câu 33. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. B. a^3 . C. $3\sqrt{3}a^3$. D. $\sqrt{3}a^3$.

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$?

A. $V = 9a^3$. B. $V = 2a^3$. C. $V = 6a^3$. D. $V = 3a^3$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $4a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

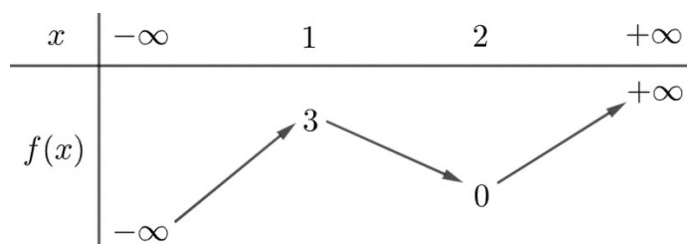
Câu 36. Giá trị m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m-1)x + 3$ đồng biến trên đoạn $[-2; 3]$ là:

A. $m \geq 2$. B. $m \leq -2$. C. $m > 2$. D. $m < -2$.

Câu 37. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2(m-2)x^2 + (m^2+3)x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$?

A. $m = 9$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = -9$.

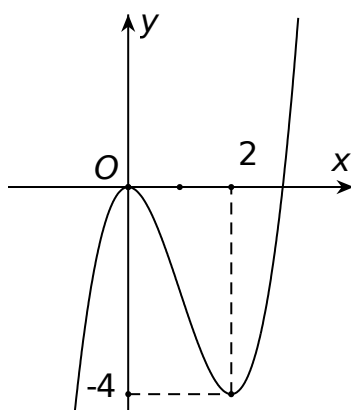
Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2022}{-2f(x)+3}$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 39. Biết hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 9f[f(x)] + 2022$?



- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-2c+1$	$-a$	$+\infty$	

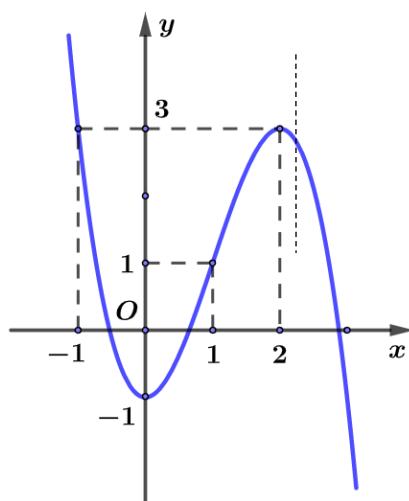
Trong các số a, b, c, d có bao nhiêu số dương?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 41. Số mặt phẳng đối xứng của một khối lập phương là

- A. 6. B. 9. C. 15. D. 4.

- Câu 42.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\sin x) + (m - 2022)f(\sin x) + m - 2023 = 0$ có đúng 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0, 2\pi]$ là



- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

- Câu 43.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Gọi A, a là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(2 - f(\sqrt{4x - x^2}))$ trên đoạn $[0; 4]$. Tính giá trị biểu thức $P = A + 2a$

- A. 13. B. 14. C. 15. D. 12.

- Câu 44.** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi tâm I cạnh bằng a và $\angle ABC = 120^\circ$. Điểm A' cách đều các điểm A, B, D . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{3a}{\sqrt{13}}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a .

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

- Câu 45.** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh $AB = a\sqrt{2}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Gọi M là điểm đối xứng với C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh A .

- A. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{18}$. B. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{18}$. D. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{6}$.

- Câu 46.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để $(d): y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau. Tổng các phần tử của S bằng

- A. -1. B. 1. C. 0. D. $-\frac{3}{2}$.

- Câu 47.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(1-2x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(1-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 3. B. 7. C. 5. D. 4.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Tách các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x - m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{7}$ là:

- A. 4. B. 2. C. -2. D. -4.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$. Biết $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-\sqrt{2})$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $(1; 3)$ bằng.

- A. $\min_{(1;3)} f(x) = c - 4a$ B. $\min_{(1;3)} f(x) = 12a + c$
C. $\min_{(1;3)} f(x) = c - 4b$ D. $\min_{(1;3)} f(x) = c + 4b$

Câu 50. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

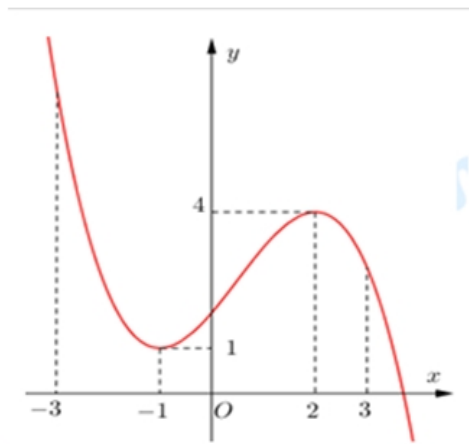
----- HẾT -----

PHẦN II: ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.C	4.B	5.B	6.C	7.C	8.A	9.D	10.A
11.C	12.C	13.C	14.B	15.D	16.D	17.D	18.D	19.A	20.C
21.D	22.C	23.C	24.D	25.A	26.B	27.A	28.A	29.D	30.D
31.A	32.D	33.A	34.C	35.B	36.A	37.D	38.D	39.A	40.C
41.B	42.C	43.B	44.D	45.C	46.C	47.D	48.D	49.A	50.D

PHẦN III: GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho đồ thị hàm số



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 3)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

FB tác giả: Lê Phương Tú

Dựa vào ĐTHS, hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	-2	-1	1	3		
y'		+	0	-		+
y			1		-2	5

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên

- A. $[-2; -1]$.
 B. $(-1; 1)$.
 C. $(-1; 3)$.
 D. $(-2; 1)$.

Lời giải

FB tác giả: Lê Phương Tú

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. **Chọn B.**

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định bên dưới.

- A. $\min_{[1;2]} y = \frac{1}{2}$.
 B. $\max_{[-2; -1]} y = 0$.
 C. $\min_{[3;5]} y = \frac{2}{3}$.
 D. $\max_{[-2; -1]} y = \frac{1}{2}$.

Lời giải

FB tác giả: Lê Phương Tú

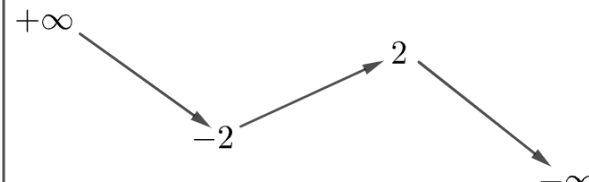
Ta có:

$$y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

$$\min_{[1;2]} y = f(2) = 1, \quad \max_{[-2;-1]} y = f(-2) = \frac{1}{5}, \quad \min_{[3;5]} y = f(5) = \frac{2}{3}.$$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						

A. $x = 0$.

B. $y = -2$

C. $(0; -2)$.

D. $y = 2$.

Lời giải

FB tác giả: Cam Trinh

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số $y = -2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Số điểm cực trị của hàm số là:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+	0	-

A. 4.

B. 3

C. 2.

D. 1

Lời giải

FB tác giả: Cam Trinh

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $y' = 0$ có 4 nghiệm mà chỉ có 3 nghiệm qua đó y' đổi dấu nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{4x+1}$. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = -\frac{1}{4}$.

C. $y = \frac{1}{2}$

D. $y = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

FB tác giả: Cam Trinh

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{1}{2}$ nên $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 7. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-2x}{x+1}$ là

A. $x = -2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$

D. $x = 2$.

Lời giải

FB tác giả: Vân Khánh

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2-2x}{x+1} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2-2x}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

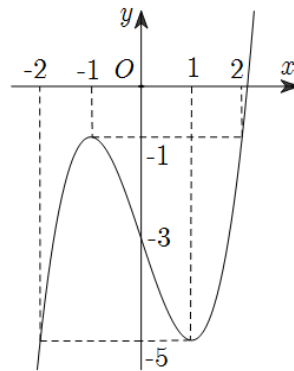
- Câu 8.** Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$
A. Điểm $P(1; -1)$ **B.** Điểm $N(1; -2)$ **C.** Điểm $M(1; 0)$ **D.** Điểm $Q(1; 1)$.

Lời giải

FB tác giả: Vân Khánh

Với $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1-3}{1+1} = -1$.

- Câu 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tổng $M + m$ trong đó giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



- A.** -3 **B.** -1 **C.** -5 **D.** -6

Lời giải

FB tác giả: Vân Khánh

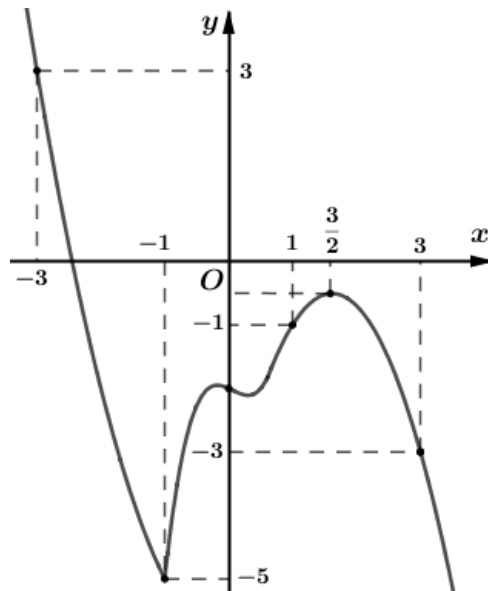
Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$$M = \max_{[-2; 2]} f(x) = -1 \text{ khi } x = -1 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$m = \min_{[-2; 2]} f(x) = -5 \text{ khi } x = -2 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy $M + m = -6$.

- Câu 10.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau đây:



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

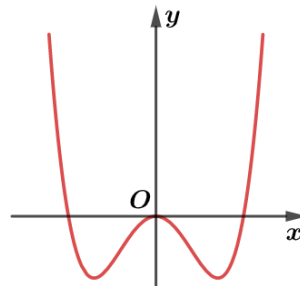
- A.** $\min_{[-2;1]} y = -5$ **B.** $\min_{[-2;1]} y = -3$ **C.** $\max_{[-2;1]} y = -\frac{1}{2}$ **D.** $\max_{[-2;1]} y = 3$

Lời giải

FB tác giả: Lý Hồng Huy

Từ đồ thị ta được GTNN của hàm số đã cho trên $[-2;1]$ là -5 khi đó $x = -1$.

Câu 11. Đồ thị bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$
C. $y = -2x^2 + x^4$ **D.** $y = -x^4 + 2x^2$

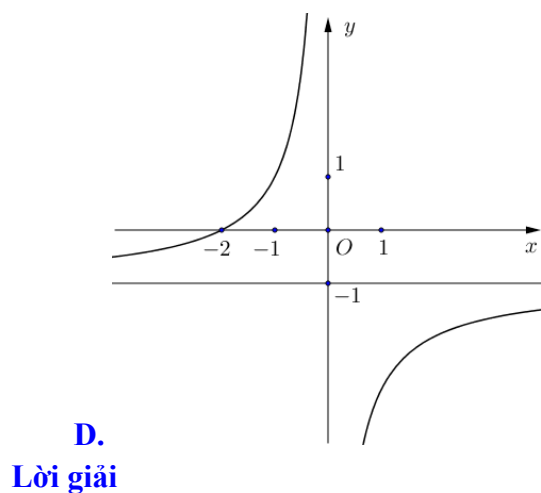
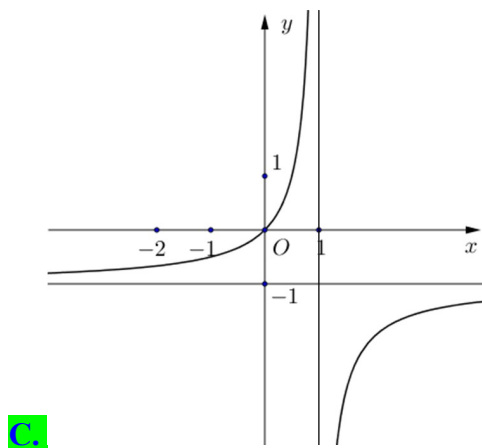
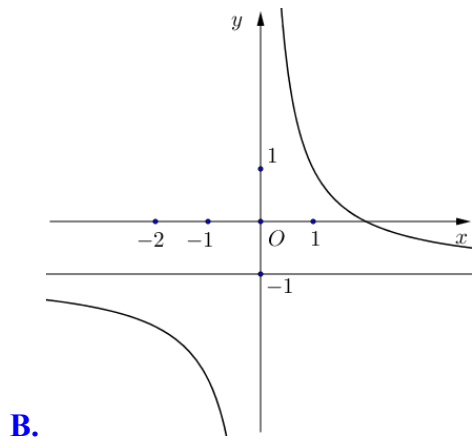
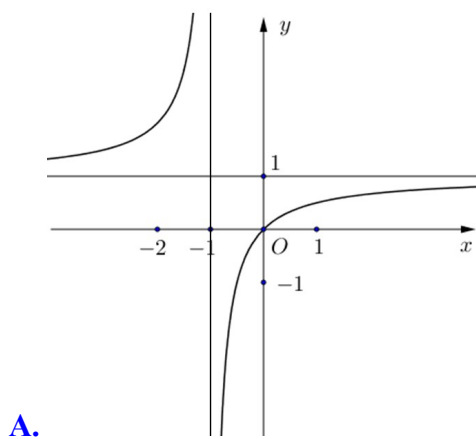
Lời giải

FB tác giả: Lý Hồng Huy

Ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc bốn có hệ số $a > 0$ nên ta loại phương án **A** và loại phương án **D**.

Đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên ta chọn phương án **C**.

Câu 12. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{-x}{x-1}$?



FB tác giả: Lý Hồng Huy

Đồ thị của hàm số $y = \frac{-x}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Đồ thị hàm số trong phương án **A** có đường tiệm cận đứng $x=-1$ nên ta loại phương án **A**.

Đồ thị hàm số trong phương án **B** có đường tiệm cận đứng $x=0$ nên ta loại phương án **B**.

Đồ thị hàm số trong phương án **C** có đường tiệm cận đứng $x=1$ nên ta chọn phương án **C**.

Đồ thị hàm số trong phương án **D** có đường tiệm cận đứng $x=0$ nên ta loại phương án **D**.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 3	$\searrow$ -5	$\nearrow$ $+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(x)=4$ là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

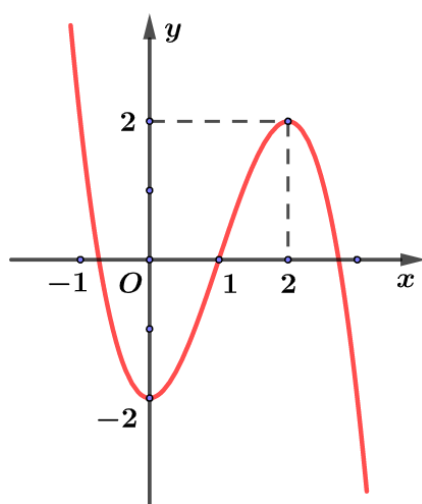
D. 2.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Hồng Vân

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Hồng Vân

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 15. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ tại điểm $M(0;1)$.

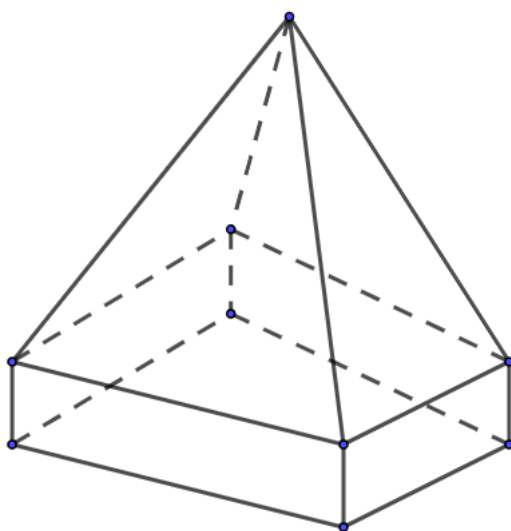
- A. $k = 1$. B. $k = \sqrt{2}$. C. $k = -1$. D. $k = 3$.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Hồng Vân

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y'(0) = 3$.

Câu 16. Hình đa diện sau có bao nhiêu mặt.



- A. 10. B. 11. C. 8. D. 9.

Lời giải

FB tác giả: Trần Thu Hương

Hình đa diện trên có 9 mặt.

- Câu 17.** Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ có bao nhiêu cạnh.
A. 6. B. 12. C. 20. **D. 30.**

Lời giải

FB tác giả: Trần Thu Hương

Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều, có 30 cạnh.

- Câu 18.** Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp biết $OA=5, OB=4, OC=6$.
A. 120. B. 40. C. 30. **D. 20.**

Lời giải

FB tác giả: Trần Thu Hương

Khối chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau có thể tích:

$$V = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 = 20$$

- Câu 19.** Cho khối chóp có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. a^3 B. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ D. $3a^3$

Lời giải

FB tác giả: Hoàng Trọng Tấn

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \cdot a \sqrt{3} = a^3$

- Câu 20.** Thể tích khối hộp chữ nhật có các kích thước là $2a, 3a, 5a$ là

A. $15a^3$ B. $10a^3$ **C. $30a^3$** D. $6a^3$

Lời giải

FB tác giả: Hoàng Trọng Tấn

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $2a \cdot 3a \cdot 5a = 30a^3$

- Câu 21.** Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

Lời giải

FB tác giả: Hoàng Trọng Tấn

Tập xác định $D = (-\infty; 2]$

Đạo hàm $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2-x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{2-x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{2-x}(\sqrt{2-x}+1)} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Ta có

Để thấy y' đổi dấu từ dương sang âm tại $x = 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; 2)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$. Biết hàm số đạt cực trị tại $x_1; x_2$. Tính giá trị biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$.

A. - 1538.

B. 28.

C. 26.

D. 1538.

Lời giải

FB tác giả: Dung Pham

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		15		-17	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực trị tại các điểm $x_1 = -1, x_2 = 3$ nên $A = x_1^3 + x_2^3 = (-1)^3 + (3)^3 = 26$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = mx^4 - (m-3)x^2 + 10$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số có 3 cực trị.

A. $\begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$

B. $0 < m < 3$.

C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 0 \end{cases}$

D. $0 \leq m \leq 3$.

Lời giải

FB tác giả: Dung Pham

Cách 1:

Xét hàm số $f(x) = mx^4 - (m-3)x^2 + 10$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4mx^3 - 2(m-3)x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 4mx^2 - 2(m-3) = 0. \end{cases}$$

Ta có

Để hàm số có 3 cực trị thì $g(x) = 4mx^2 - 2(m-3) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 0,

$$\begin{cases} g(0) = -2(m-3) \neq 0 \\ \Delta' = 8m(m-3) > 0, m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 0. \end{cases}$$

nên ta có

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh.

Hàm số có 3 cực trị khi $ab < 0 \Leftrightarrow -m(m-3) < 0 \Leftrightarrow m(m-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 0. \end{cases}$

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$-$	$+$	$-$
y	$+\infty$	1	$+\infty$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải

FB tác giả: Ha Nguyen

♦ Từ bảng biến thiên ta có :

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -2$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

♦ Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng 3.

Câu 25. Đồ thị của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2023}}{x^2+2021x-2022}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Lời giải

FB tác giả: Ha Nguyen

Điều kiện: $\begin{cases} x-2023 \geq 0 \\ x^2+2021x-2022 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2023 \\ x \neq -1; x \neq -2022 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2023.$

Tập xác định $D = [2023; +\infty)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2023}}{x^2+2021x-2022} = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ trên đoạn $[-2; 0]$.

- A. $\max_{[-2; 0]} y = 9$ B. $\max_{[-2; 0]} y = -5$ C. $\max_{[-2; 0]} y = -\frac{16}{3}$ D. $\max_{[-2; 0]} y = -5,9$

Lời giải

FB tác giả: Huyền Kem

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 0]$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \notin [-2; 0] \\ x = -1 \in [-2; 0] \end{cases}$

Do $y(-2) = -\frac{16}{3}$; $y(-1) = -5$; $y(0) = -6$.

Vậy $\max_{[-2; 0]} y = y(-1) = -5$

Câu 27. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng.

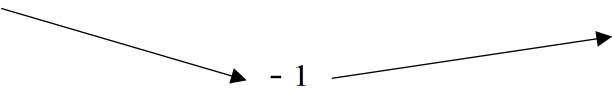
- A.** -1 **B.** 1 **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** -3

Lời giải

FB tác giả: Huyền Kem

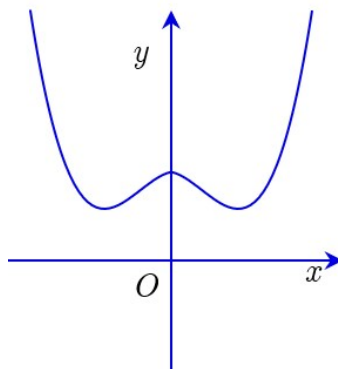
Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; +\infty) \\ x = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Dựa vào BBT, $\min_{(0; +\infty)} y = y(1) = -1$.

Câu 28. Cho đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) như hình vẽ bên



Mệnh đề đúng về dấu của các hệ số a , b , c là

- A.** $a > 0, b < 0, c > 0$ **B.** $a > 0, b > 0, c > 0$

C. $a < 0, b < 0, c > 0$

D. $a < 0, b > 0, c > 0$

Lời giải

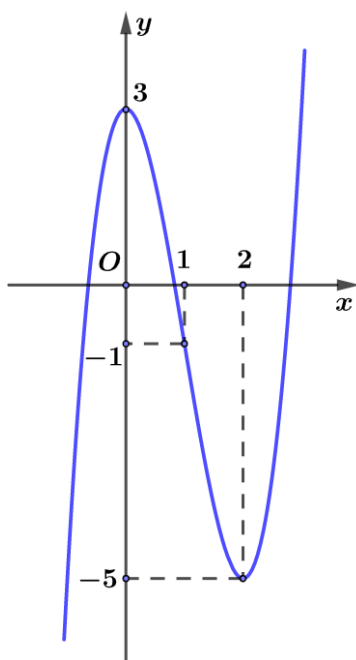
FB tác giả: *Hua Vu Hai*

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hệ số $a > 0$.

Vì hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0$, mà do $a > 0$ nên suy ra $b < 0$.

Giao điểm của đồ thị và trục tung là điểm nằm phía trên trục hoành. Vậy hệ số $c > 0$.

Câu 29. Cho đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) như hình vẽ bên



Đồ thị trong hình vẽ trên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

B. $y = x^3 - 5x^2 + 3$

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$

D. $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$

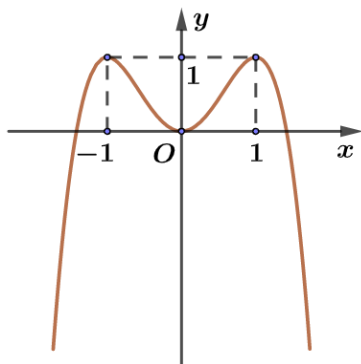
Lời giải

FB tác giả: *Hua Vu Hai*

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên suy ra hệ số $a > 0$.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị đi qua điểm $A(1; -1)$ và $B(2; -5)$, kiểm tra các hàm số đã cho ở 4 phương án, ta thấy hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ thỏa mãn.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 4 = 0$ là
A. 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

FB tác giả: Quochieu Nguyen

Ta có $2f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2$. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m + 2 = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt?
A. $0 < m < 4$ **B.** $m > 4$ **C.** $m < 4$ **D.** $0 \leq m \leq 4$.

Lời giải

FB tác giả: Quochieu Nguyen

Ta có $x^3 - 3x - m + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = m$ (1).

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Tập xác định $\mathbb{R}$;

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases};$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ta có phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 4$.

Câu 32. Cho khối chóp có đáy là đa giác $2n$ cạnh. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?
A. Số cạnh của khối chóp bằng $2n + 1$.

B. Số mặt của khối chóp bằng $4n$.

C. Số đỉnh của khối chóp nhiều hơn số mặt của nó.

D. Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó.

Lời giải

FB tác giả: Trần Phước Trường

Câu A sai vì số cạnh của khối chóp bằng $4n$.

Câu B sai vì số mặt của khối chóp bằng $2n + 1$.

Câu C sai vì số đỉnh của khối chóp bằng số mặt của nó.

Câu 33. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$

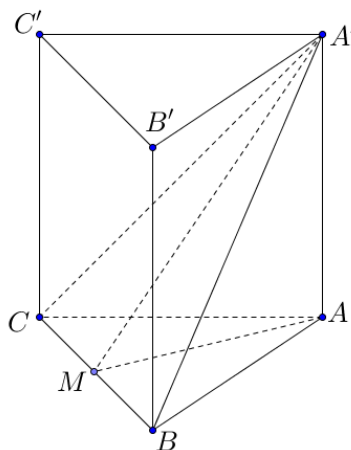
B. a^3

C. $3\sqrt{3}a^3$

D. $\sqrt{3}a^3$

Lời giải

FB tác giả: Trần Phước Trường



Gọi M là trung điểm cạnh BC .

$$\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = \angle A'MA = 45^\circ$$

Ta có

$$\tan \angle A'MA = \frac{A'A}{AM} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{\tan 45^\circ} = a\sqrt{3}$$

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a\sqrt{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = 2a$$

Tam giác ABC đều nên

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'A = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = 3a^3$$

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$?

A. $V = 9a^3$

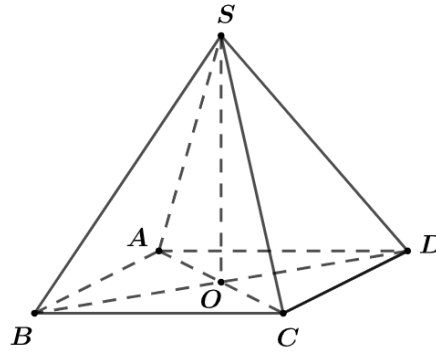
B. $V = 2a^3$

C. $V = 6a^3$

D. $V = 3a^3$

Lời giải

FB tác giả: Phan Tấn Tài



Diện tích đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = (a\sqrt{6})^2 = 6a^2$.

Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy $(ABCD)$ là $(\overline{SD}, (ABCD)) = \angle SDO \Rightarrow \angle SDO = 60^\circ$

$ABCD$ là hình vuông suy ra $DO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông SOD : $SO = DO \cdot \tan \angle SDO = a\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3a$.

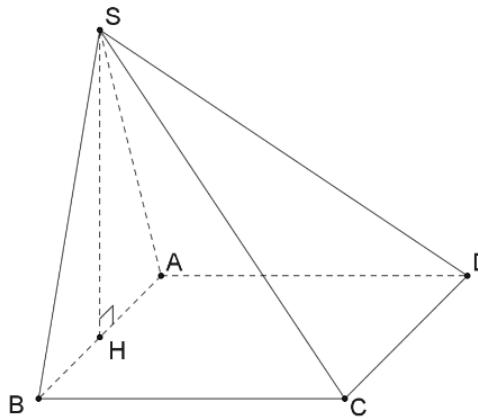
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot 6a^2 = 6a^3$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $4a^3\sqrt{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

FB tác giả: Phan Tấn Tài



Gọi H là trung điểm của AB , ta có $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng AB nên $SH \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36. Giá trị m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m-1)x + 3$ đồng biến trên đoạn $[-2; 3]$ là:

- A. $m \geq 2$ B. $m \leq -2$ C. $m > 2$ D. $m < -2$

Lời giải

FB tác giả: Mai Thị Hương Lan

Ta có: $y' = x^2 + 2x + m - 1$

$$\text{ycbt: } x^2 + 2x + m - 1 \geq 0, \forall x \in [-2; 3] \Leftrightarrow m \geq -x^2 - 2x + 1, \forall x \in [-2; 3] \\ \Leftrightarrow m \geq \max_{[-2; 3]} (-x^2 - 2x + 1) (*)$$

Đặt $g(x) = -x^2 - 2x + 1$

$$g'(x) = -2x - 2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$g(-2) = 1; g(-1) = 2; g(3) = -14 \Rightarrow \max_{[-2; 3]} g(x) = 2$$

Vậy: $(*) \Leftrightarrow m \geq 2$

- Câu 37.** Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2(m-2)x^2 + (m^2+3)x + 2$ đạt cực đại tại $x=2$?
- A. $m=9$. B. $m=-1$. C. $m=1$. **D. $m=-9$**

Lời giải

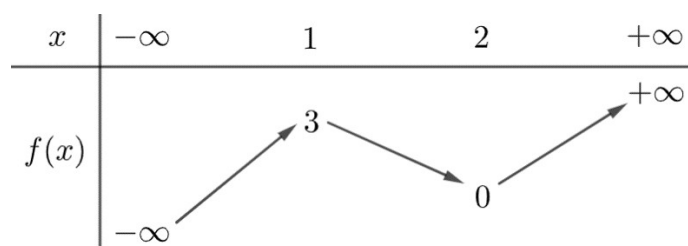
FB tác giả: Mai Thị Hương Lan

Ta có: $y' = x^2 + 4(m-2)x + m^2 + 3$

$$y'' = 2x + 4m - 8$$

$$\text{ycbt: } \begin{cases} y'_{(2)} = 0 \\ y''_{(2)} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 8m - 16 + m^2 + 3 = 0 \\ 4 + 4m - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m - 9 = 0 \\ 4m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \Leftrightarrow m = -9. \\ m < 1 \end{cases}$$

- Câu 38.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:



- Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2022}{-2f(x)+3}$ là
- A. 2. B. 1. C. 4. **D. 3**

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Đức Việt

$$\text{Đặt } y = h(x) = \frac{2022}{-2f(x)+3}$$

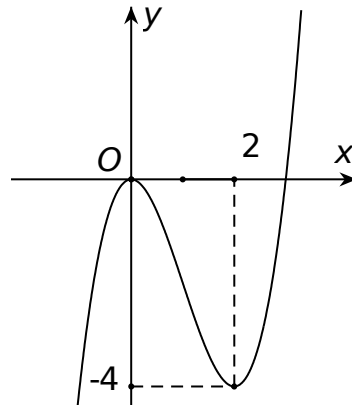
$$\text{Xét phương trình: } -2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = \frac{3}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

Vậy số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là 3.

Câu 39. Biết hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 9f[f(x)] + 2022$?



A. 4

B. 6

C. 5

D. 3

Lời giải

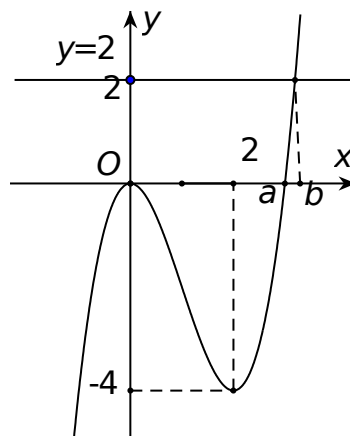
FB tác giả: Nguyễn Đức Việt

Ta có: $y' = [9f(f(x)) + 2022]' = 9f'(x) \cdot f'(f(x))$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)) = 0 & (2) \end{cases}$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ vì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = 0; x = 2$.

Phương trình $(2) \Leftrightarrow f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm bội chẵn $x=0$ và một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x=a>2$.

Kẻ đường thẳng $y=2$ nhận thấy phương trình $f(x)=2$ có một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x=b>a$

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x=0; x=2, x=a, x=b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-2c+1$	$-a$	$+\infty$	

Trong các số a, b, c, d có bao nhiêu số dương?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Người làm: Đình Duy; Fb: Đình Duy

Chọn C

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(1)=0 \\ f(-2)=-2c+1 \\ f(1)=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=-2c+1 \\ a+b+c+d=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-12 \\ d=5 \end{cases}$$

Vậy có 3 số dương.

Câu 41. Số mặt phẳng đối xứng của một khối lập phương là

A. 6.

B. 9.

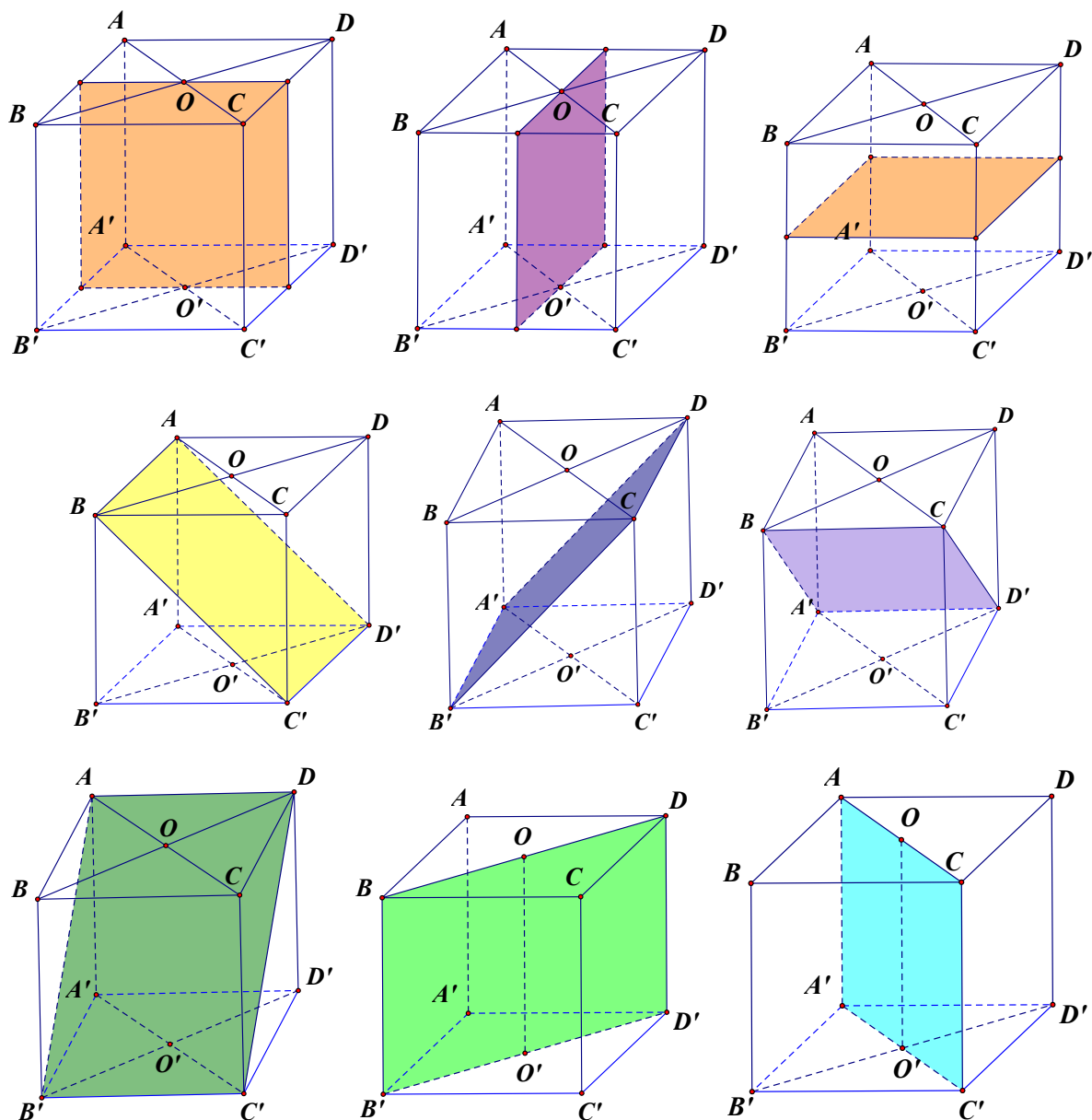
C. 15.

D. 4.

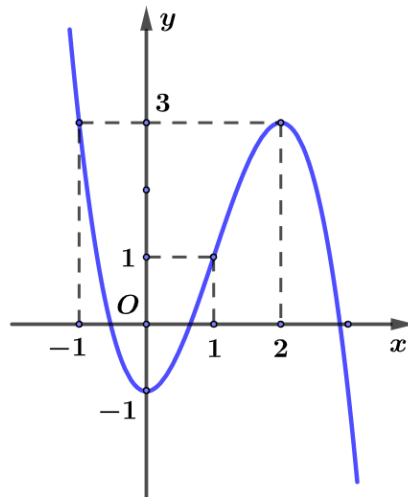
Lời giải

Người làm: Đình Duy; Fb: Đình Duy

Khối lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.



Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\sin x) + (m - 2022)f(\sin x) + m - 2023 = 0$ có đúng 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0, 2\pi]$ là



A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

FB tác giả: Trần Văn Thiết.

Ta có

$$f^2(\sin x) + (m - 2022)f(\sin x) + m - 2023 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\sin x) = -1 \\ f(\sin x) = 2023 - m \end{cases} \quad (1)$$

* Với $f(\sin x) = -1$

Dựa vào đồ thị ta có

$$f(\sin x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = x_1 \ (x_1 > 1) \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi$$

Vì $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi\}$

* Với $f(\sin x) = 2023 - m$

Đặt $t = \sin x \ (t \in [-1; 1])$

Với $t \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ thì phương trình $t = \sin x$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 2\pi]$.

Với $\begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$ thì phương trình $t = \sin x$ có 1 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$

Với $t = 0$ thì phương trình $t = \sin x$ có 3 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$

Phương trình trở thành $f(t) = 2023 - m$

Để phương trình (1) có tất cả 7 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\sin x) = 2023 - m$ có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 0; \pi; 2\pi$, hay phương trình $f(t) = 2023 - m$ có 2 nghiệm phân biệt

$$t \in (-1; 1) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 2023 - m < 1 \\ 2023 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2022 < m < 2024 \\ m \neq 2023 \end{cases}$$

Vì m nguyên nên không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Gọi A, a là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(2 - f(\sqrt{4x - x^2}))$ trên đoạn $[0; 4]$. Tính giá trị biểu thức $P = A + 2a$

A. 13.

B. 14.

C. 15.

D. 12.

Lời giải

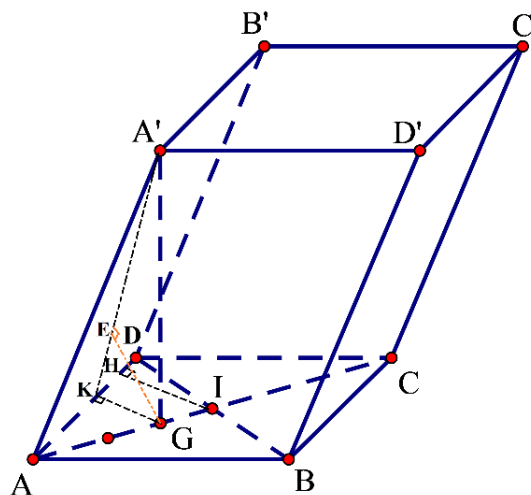
$$\begin{aligned}
 & t = \sqrt{4x - x^2}; x \in [0; 4] \Rightarrow t = \sqrt{x(4 - x)} \leq \frac{x + 4 - x}{2} = 2 \\
 & \text{Đặt} \\
 & \Rightarrow t \in [0; 2] \\
 & f'(t) = 3t^2 - 6t \leq 0 \forall t \in [0; 2] \\
 & \Rightarrow f(2) \leq f(t) \leq f(0) \forall t \in [0; 2] \Leftrightarrow -2 \leq f(t) \leq 2 \forall t \in [0; 2] \\
 & \Rightarrow 0 \leq 2 - f(t) \leq 4 \\
 & u = 2 - f(\sqrt{4x - x^2}) = 2 - f(t) \Rightarrow u \in [0; 4] \\
 & \text{Đặt} \\
 & \Rightarrow y = f(u); u \in [0; 4] \\
 & y' = f'(u) = 3u^2 - 6u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 2 \end{cases} \\
 & f(0) = 2; f(2) = -2; f(4) = 18 \\
 & A = \max y = 18; a = \min y = -2 \Rightarrow P = 18 + 2 \cdot (-2) = 14
 \end{aligned}$$

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi tâm I cạnh bằng a và $\angle ABC = 120^\circ$. Điểm A' cách đều các điểm A, B, D . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{3a}{\sqrt{13}}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a .

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$**

Lời giải

FB tác giả: Dao Huu Lam



Ta có điểm A' cách đều các đỉnh A, B, D cho nên hình chiếu của điểm A' là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABD .

Ta có $\angle ABC = 120^\circ$ nên $\angle ABD = 60^\circ \Rightarrow$ tam giác ABD là tam giác đều.

Vậy ta có $A'G \perp (ABD)$ với G là trọng tâm tam giác ABD .

Tam giác ABD đều có cạnh bằng a , AI là trung tuyến ($I = AC \cap BD$)

$$\Rightarrow AI = a \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} AG = \frac{2}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CA = 3GA \\ AC = 2AI = a\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BD = a \Rightarrow IB = \frac{1}{2} BD = \frac{a}{2} \\ S_{\Delta ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Tam giác ABD đều có cạnh bằng a

Do $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (A'D'DA) \Rightarrow d_{(BC, A'A)} = d_{(C, (A'D'DA))} = 3d_{(G, (A'D'DA))} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$ (do $CA = 3GA$).

$$\Rightarrow d_{(G, (A'D'DA))} = \frac{a}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Kẻ } IH \perp AD \Rightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{ID^2} + \frac{1}{IA^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Kẻ } GK \parallel IH \Rightarrow \frac{GK}{IH} = \frac{AG}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK = \frac{2}{3} IH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Kẻ } GE \perp A'K \Rightarrow GE \perp (A'D'DA) \Rightarrow d_{(G, (A'D'DA))} = GE = \frac{a}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{GE^2} = \frac{1}{GK^2} + \frac{1}{A'G^2} \Leftrightarrow \frac{1}{A'G^2} = \frac{1}{GE^2} - \frac{1}{GK^2} = \frac{13}{a^2} - \frac{12}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow A'G = a$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ } V = A'G \cdot S_{ABCD} = a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$$

Câu 45. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh $AB = a\sqrt{2}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

Gọi M là điểm đối xứng với C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh A .

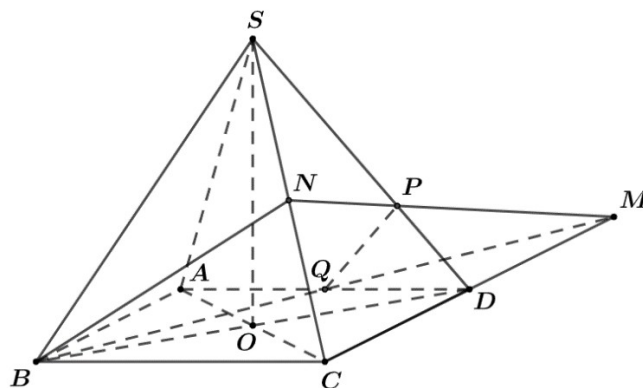
A. $\frac{5a^3 \sqrt{3}}{18}$

B. $\frac{5a^3 \sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{7a^3 \sqrt{3}}{18}$

D. $\frac{7a^3 \sqrt{3}}{6}$

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$; $Q = BM \cap AD$; $P = MN \cap SD$

Suy ra Q là trung điểm AD , P là trọng tâm tam giác SCM .

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (\overline{SA}, (ABCD)) = (\overline{SA}, OA) = \angle SAO = 60^\circ$

Xét $\triangle SAO$ vuông tại O , có $SO = OA \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

Mặt khác: $\frac{V_{M.DPQ}}{V_{M.BCN}} = \frac{PM}{MN} \cdot \frac{MD}{MC} \cdot \frac{MQ}{MB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{NPQDCA} = \frac{5}{6} V_{N.BCM} = \frac{5}{6} V_{S.BCD} = \frac{5}{12} V_{S.ABCD}$

$$\Rightarrow V_{S.ABNPQ} = \frac{7}{12} V_{S.ABCD} = \frac{7}{12} \cdot \frac{2a^3\sqrt{3}}{3} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{18}$$

Câu 46. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để $(d): y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau. Tổng các phần tử của S bằng

A. -1.

B. 1.

C. 0

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

FB tác giả: Phạm Tuấn

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x+2}{x-1} = x+m \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x - m - 2 = 0.$$

(C) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 12 > 0$ (luôn đúng).

Gọi x_A, x_B lần lượt là hoành độ của A và B .

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_A + x_B = -m + 2 \\ x_A \cdot x_B = -m - 2. \end{cases}$

Tiếp tuyến của (C) tại A và tiếp tuyến của (C) tại B song song với nhau

$$\Leftrightarrow y'(x_A) = y'(x_B) \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_A-1)^2} = \frac{-3}{(x_B-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ x_A + x_B = 2. \end{cases}$$

• Với $x_A = x_B$, suy ra A trùng B (loại).

• Với $x_A + x_B = 2$, ta có $-m + 2 = x_A + x_B = 2 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).

Suy ra tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(1-2x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(1-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 3.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Văn Tráng

Từ bảng xét dấu của $f'(1-2x)$ ta có $f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Đặt $t = 1 - 2x$, khi đó ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$.

Do đó có bảng xét dấu $f'(t)$ như sau

t	$-\infty$	-3	-1	7	$+\infty$			
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x)$, ta có $g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x)$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f'(x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x = -3 \\ x^2 - 4x = -1 \\ x^2 - 4x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \\ x = 2 \pm \sqrt{11} \end{cases}$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{11}$	$2-\sqrt{3}$	1	2	3	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{11}$	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 4 điểm cực đại.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Tích các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x - m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{7}$ là:

A. 4.

B. 2.

C. -2.

D. -4.

Lời giải

FB tác giả: Lê Chí Tâm

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là:

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x+1 = (2x-m)(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - (m+4)x + m - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2 - (m+4) + m - 1 \neq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 24 > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases}$ (đúng với mọi m)

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), tọa độ hai giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là: $A(x_1; 2x_1 - m); B(x_2; 2x_2 - m)$

$$\Rightarrow \text{độ dài của đoạn } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2} = \sqrt{5}|x_2 - x_1|$$

$$\text{Mà } d(O; d) = \frac{|m|}{\sqrt{5}}. \text{ Suy ra } S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}|x_2 - x_1| \Leftrightarrow \frac{|m| \cdot |x_2 - x_1|}{2} = \sqrt{7} \Leftrightarrow m^2(x_2 - x_1)^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow m^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 28$$

$$\text{Theo Định lí Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+4}{2} \\ x_1x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 28 \Leftrightarrow m^2\left[\left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{m-1}{2}\right)\right] = 28 \Leftrightarrow m^2\left(\frac{m^2+24}{4}\right) = 28$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 24m^2 - 112 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy tích các giá trị của m bằng -4 .

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$. Biết $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-\sqrt{2})$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $(1; 3)$ bằng.

A. $\min_{(1; 3)} f(x) = c - 4a$

B. $\min_{(1; 3)} f(x) = 12a + c$

C. $\min_{(1; 3)} f(x) = c - 4b$

D. $\min_{(1; 3)} f(x) = c + 4b$

Lời giải

FB tác giả: Đình Khang

Ta có hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Do hàm số đã cho là hàm số chẵn nên có đồ thị hàm số đối xứng qua trục tung, theo tính chất hàm trùng phương ta được

$$\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-\sqrt{2}) \rightarrow \begin{cases} \min_{(1;3)} f(x) = f(\sqrt{2}) \\ \frac{-b}{2a} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \min_{(1;3)} f(x) = f(\sqrt{2}) = 4a + 2b + c \\ b = -4a \end{cases} \Rightarrow \min_{(1;3)} f(x) = f(\sqrt{2}) = c - 4a$$

$$\text{Vậy } \min_{(1;3)} f(x) = f(\sqrt{2}) = c - 4a$$

Câu 50. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

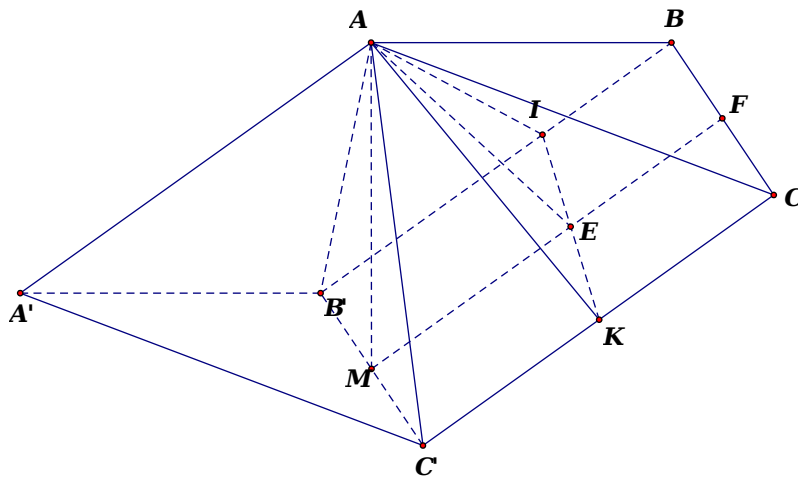
B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

FB tác giả: Trần Phiến Trúc



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$

Vì khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2 nên $AI = 1$, $AK = 2$.

$$\text{Gọi } F \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow A'M = AF = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$$

Vì $CC' \parallel BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow \Delta AIK$ vuông tại A . Gọi E là trung điểm của IK

$\Rightarrow EF \parallel BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$. Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC)

và $\widehat{AIK}$ là góc giữa EF và AM bằng góc $\widehat{AME} = \widehat{PAE}$. Ta có $\cos \widehat{PAE} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\Rightarrow \widehat{PAE} = 30^\circ$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là $\triangle AIK$ nên ta có:

$$S_{AIK} = S_{ABC} \cos \widehat{PAF} \Rightarrow 1 = S_{ABC} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}. \text{ Xét } \triangle AMF \text{ vuông tại } A:$$

$$\tan \widehat{AMF} = \frac{AF}{AM}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$