Tuyển tập đề thi học sinh giỏi các tỉnh thành 2008-2009

phuchung - 11 Toán- THPT Quốc Học Huế

Ngày 11 tháng 5 năm 2009

Mục lục

1 Hải Phòng

1.1 Chọn sinh giỏi không chuyên

Bài 1: (3 điểm)
Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$
1. Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị lập với 2 đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.
2. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số thoả mãn tiếp tuyến tại điểm đó lập với 2 đường tiệm cận 1 tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Bài 2: (1 điểm)
Cho phương trình: $(65\sin x - 56)\left(80 - 64\sin x - 65\cos^2 x\right) = 0$ (1)
Chứng minh rằng tồn tại 1 tam giác có các góc thoả mãn phương trình (1).

Bài 3: (3 điểm)
Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều cạnh a, đường cao SA = h.
1. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
2. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SD cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng tứ giác AB'C'D' nội tiếp trong 1 đường tròn.
3. Chứng minh rằng AB'>C'D'.

Bài 4: (2 điểm)
Cho phương trình $\mathrm{a}x^3 + 21x^2 + 13x + 2008 = 0$ (1).
Biết rằng phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt, hỏi phương trình sau có tối đa bao nhiêu nghiệm thực:

$$4\left(\mathrm{a}x^3 + 21x^2 + 13x + 2008\right)(3\mathrm{a}x + 21) = \left(3ax^2 + 42x + 13\right)^2$$

Bài 5: (1 điểm)
Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \cos x = x^2 \\ y\tan y = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ đã cho có duy nhất 1 nghiệm $(x; y)$ thoả mãn $0 < x < y < 1$.

1.2 Chọn đội tuyển quốc gia

Bài 1:
Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 10.2^{2008}$

Bài 2:
Cho 3 số thực dương x, y, z thoả mãn $x + y + z + 1 = 4xyz$. Chứng minh rằng:

$$xy + yz + xy \geq x + y + z$$

Bài 3:
Cho hàm số $f(x) : N^* \to N$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(1) = 2; f(2) = 0; \\ f(3k) = 3f(k) + 1; f(3k+1) = 3f(k) + 2; f(3k+2) = 3f(k) \end{cases}$$

Hỏi có thể tồn tại n để $f(n) = 2008$ được không?

Bài 4:
Cho tam giác ABC với O, I theo thứu tự là tâm của đường tròn ngoại, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\widehat{AIO} \leq 90^0$ khi và chỉ khi $AB + AC \geq 2.BC$

Bài 5.
Cho dãy (u_n) thoả mãn: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2008} \end{cases}$
Hãy tính $\lim \left[\sum_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1}}\right]$

2 Nghệ An

2.1 Chọn đội tuyển quốc gia

2.1.1 Vòng 1

Bài 1 (2đ): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} |y| = |x - 3| \\ (2\sqrt{z} - 2 + y)y = 1 + 4y \\ x^2 + z - 4x = 0 \end{cases}$$

Bài 2 (3đ)
Cho số nguyên a.Chứng minh rằng: phương trình
$$x^4 - 7x^3 + (a+2)x^2 - 11x + a = 0$$
không thể có nhiều hơn 1 nghiệm nguyên.

Bài 3 (3đ)
Cho dãy số thực x_n được xác định bởi: $x_0 = 1, x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1+\sqrt{x_n}} \forall n \in N$
Ta xác định dãy y_n bởi công thức $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.2^i, \forall n \in N^*$.Tìm công thức tổng quát của dãy y_n

Bài 4 (3đ)
Cho các số nguyên a,b,c khác 0 thoả mãn:
$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \in Z \\ \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} \in Z \end{cases}$$
Chứng minh rằng: $\dfrac{3a^4}{b^2} + \dfrac{2b^4}{c^2} + \dfrac{c^4}{a^2} - 4|a| - 3|b| - 2|c| \geq 0$

Bài 5 (3đ)
Trong mp toạ độ Oxy cho 9 điểm có toạ độ là các số nguyên,trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 9 điểm trên có diện tích là 1 số chẵn.

Bài 6 (3đ)
Cho 2 đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại điểm K,((O') nằm trong (O)).ĐiểmA nằm trên (O)sao cho 3 điểm A, O, O' không thẳng hàng.Các tiếp tuyến AD và AE của (O') cắt (O) lần lượt tại Bvà C (D, E là các tiếp điểm).Đường thẳng AO'cắt (O) tại F.Chứng minh rằng các đường thẳng BC, DE, FK đồng quy

Bài 7 (3đ)
Cho $n \geq 2, n \in N$.Kí hiệu $A = \{1, 2, ..., n\}$.Tập con B của tập A được gọi là 1 tập "tốt" nếu B khác rỗng và trung bình cộng của các phần tử của B là 1 số nguyên.Gọi T_n là số các tập tốt của tập A.Chứng minh rằng $T_n - n$ là 1 số chẵn

2.1.2 Vòng 2

Bài 1 (2đ)
Giải phương trình: $16x^3 - 24x^2 + 12x - 3 = \sqrt[3]{x}$

Bài 2 (3đ)
Tìm tất cả các số nguyên a, b, c thoả mãn điều kiện $1 < a < b < c$ và abc chia hết cho $(a-1)(b-1)(c-1)$

Bài 3 (3đ)
Cho a, b, c, x, y, zlà các số thực thay đổi thoả mãn $(x+y)c - (a+b)z = \sqrt{6}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$F = a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz$$

Bài 4 (3đ)
Tìm tất cả các hàm $f : R \to R$ sao cho:

$$f(x + cos(2009y)) = f(x) + 2009cos(f(y)), \forall x, y \in R$$

Bài 5 (3đ)
Cho tam giác ABC thay đổi.GọiH là trực tâm,O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.Xác định GTNN của số k sao cho $\frac{OH}{R} < k$

Bài 6 (3đ)
Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.M vàN là các điểm lần lượt thay đổi trên các cạnh AB và CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{ND}$.Điểm$P$ thay đổi trên đoạn thẳng MN sao cho$\frac{PM}{PN} = \frac{AB}{CD}$.Chứng minh rằng tỷ số diện tích của 2 tam giácPAD và PBC không phụ thuộc vào vị trí của M và N

Bài 7 (3đ)
Gọi S là tập hợp các số nguyên dương đồng thời thoả mãn 2 điều kiện sau:
1.Tồn tại 2 phần tử $x, y \in S$ sao cho $(x, y) = 1$
2.Với bất kỳ $a, b \in S$ thì $a + b \in S$
Gọi T là tập hợp tất cả các số nguyên dương không thuộc S.Chứng minh rằng số phần tử củaT là hữu hạn và không nhỏ hơn $\sqrt{s(T)}$,trong đó $s(T)$ là tổng các phần tử của tập T (nếu $T = \phi$ thì $s(T) = 0$)

2.2 Chọn đội tuyển Đại học Vinh

Bài 1:
Chứng minh rằng với mọi x thì:

$$1 + cosx + \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{3}cos3x + \frac{1}{4}cos4x > 0$$

Bài 2:
Tìm các giá trị không âm của m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x-m} + 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x}$$

Bài 3:
Đặt $A = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7\}$. Tìm mọi số nguyên dương n sao cho tồn tại hai tập B, C rời nhau thỏa mản đồng thời:
1.$A = B \cup C$
2.$\prod x = \prod y (x \in B, y \in C)$

Bài 4:
Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) và đường thẳng d không có điểm chung với (O). Gọi H là hình chiếu của O lên d, gọi M là một điểm trên d (M không trùng với H). Từ M kẻ các tuyếp tuyến MA, MB với (O). Gọi C, D là hình chiếu của H lên MA, MB. Các đường thẳng CD, AB cắt OH tại I và K. Cm I là trung điểm của HK.

2.3 Chọn học sinh giỏi không chuyên

Bài 1: (3 điểm)
Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; \frac{\pi}{4}]$

$$sin^4x + cos^4x + cos^2 4x = m$$

Bài 2: (3 điểm)
Cho hệ: (a là tham số)

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x+7} + \sqrt{y+7} \leq a \end{cases}$$

Tìm a để hệ có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện : $x \geq 9$

Bài 3:(3 điểm)
Cho hàm số :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{1+xsin^2x}-1, khix \neq 0 \\ 0, khix = 0 \end{cases}$$

Tính đạo hàm của hàm số tại $x = 0$ và chứng minh rằng hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

Bài 4: (3 điểm)
Cho 3 số dương a, b, c thay đổi . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}$$

Bài 5:(3 điểm)
Cho n là số tự nhiên , $n \geq 2$. Chứng minh đẳng thức sau :

$$n^2C_n^0 + (n-1)^2C_n^1 + (n-2)^2C_n^2 + ... + 2^2C_n^n - 2 + 1^2C_n^n - 1 = n(n+1)2^{n-2}$$

Bài 6: (2 điểm)
Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SC . Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Bài 7:(2 điểm)
Cho tứ diện ABCD có AB=CD, AC=BD, AD=BC và mặt phẳng (CAB) vuông góc với mặt phẳng (DAB). Chứng minh rằng : $cot\widehat{BCD}.cot\widehat{BDC} = \frac{1}{2}$

3 Thừa Thiên Huế

3.1 Chọn học sinh giỏi không chuyên

Bài 1: (3 điểm)
Cho phương trình $\cos x - \sin x + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} + m = 0$ (1)
a) Với $m = \frac{2}{3}$, tìm các nghiệm của phương trình (1) trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có 2 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Bài 2: (3 điểm)
Cho điểm A cố định trên đường tròn và điểm C di động trên đường tròn đó. Dựng hình thoi ABCD (hướng quay của tia AB đến AC và AD theo chiều dương lượng giác) sao cho góc $\widehat{ABC} = 2arc\cot\sqrt{2}$.
a) Xác định phép đồng dạng biến điểm C thành điểm B.
b) Tìm quỹ tích của các điểm B và D. Xác định các quỹ tích đó.

Bài 3: (3 điểm)
a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_8 xy = 3\log_8 x.\log_8 y \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}\log_y x \end{cases}$$

e) Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{2}\log_2 x.\log_{\frac{3}{4}} x + 3 > \frac{3}{2}\log_2 x + \log_{\frac{3}{4}} x$$

Bài 4: (2 điểm)
Cho dãy số $u_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2^2} + \dfrac{11}{2^3} + \cdots + \dfrac{4n-1}{2^n}$ với mọi số nguyên dương n.
a) Chứng tỏ rằng các tử số của các số hạng liên tiếp của u_n lập thành một cấp số cộng.
b) Hãy biến đổi mỗi số hạng của thành một hiệu liên quan đến 2 số hạng kế tiếp của nó, từ đó rút gọn u_n và tính $\lim u_n$

Bài 5: (3 điểm)
a) Tính tổng các số chẵn có 4 chữ số được viết từ các chữ số 1, 2, 3, 4.
b) Tìm hệ số của số hạng không chứa trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt[3]{x^2}\right)^n$ biết rằng tổng các hệ số của các số hạng trong khai triển này là $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 4096$

Bài 6: (3 điểm)
Cho cốc nước phần trên là hình nón đỉnh S, đáy có tâm O bán kính R, chiều cao SO = h. Trong cốc nước đã chứa một lượng nước có chiều cao a so với đính S. Người ta bỏ vào cốc nước một viên bi hình cầu thì nước dâng lên vừa phủ kín quả cầu. Hãy tính bán kính của viên bi theo R và h.

Bài 7: (3 điểm)
Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy a, góc giữa mỗi mặt bên và mặt đáy bằng φ.
a) Tính bán kính mặt cầu tiếp xúc với mặt đáy và các cạnh bên của hình chóp.
b) Mặt phẳng (P) tạo bởi đường thẳng AB và đường phân giác của góc giữa mặt bên SAB và mặt đáy (góc này có đỉnh ở trên AB) cắt hình chóp theo một thiết diện và chia hình chóp đều thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

3.2 Chọn đội tuyển quốc gia

Bài 1: (4 điểm)
Tìm các cặp số thực (x;y) sao cho:

$$\begin{cases} 2^x + 4^y = 32 \\ xy = 8 \end{cases}$$

Bài 2: (6 điểm)
Cho khối lăng trụ đứng (L) có cạnh bên bằng $7a$. Đáy của (L) là lục giác lồi ABCDEF có tất cả các góc đều bằng nhau và $AB = a, CD = 2a, EF = 3a, DE = 4a, FA = 5a, BC = 6a$.
a) Tính theo a thể tích của khối lăng trụ (L)
b) Chứng tỏ rằng có thể chia khối lăng trụ (L) thành 4 khối đa diện trong đó có một khối lăng trụ đều đáy tam giác và ba khối hộp.

Bài 3: (6 điểm)
Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 - 2\sqrt{2}x$ được dựng trên mặt phẳng tọa độ Oxy.
a) Chứng tỏ rằng nếu một hình bình hành có tất cả các đỉnh đều nằm trên (C) thì tâm của hình bình hành đó là gốc tọa độ O.
b) Hỏi có bao nhiêu hình vuông có tất cả các đỉnh nằm trên (C)

Bài 4: (4 điểm)
a) Cho tập hợp S có n phần tử. Chứng minh rằng có đúng 3^n cặp có thứ tự $(X_1; X_2)$ với X_1 và X_2 là các tập con của S thỏa mãn điều kiện $X_1 \cup X_2 = S$
b) Hỏi có bao nhiêu cách thành lập tập hợp $\{A; B\}$, trong đó A và B là hai tập hợp khác nhau sao cho $A \cup B = \{1, 2, 3, .., 2008\}$

4 Hà Tĩnh

4.1 Chọn học sinh giỏi không chuyên

Bài 1 :
a/Tìm các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m+1)x + 1$ đạt cực đại, cực tiểu tại $(x_1; x_2)$ sao cho $|x_1 - x_2| \leq 2\sqrt{5}$
b/Tìm m để phương trình có nghiệm :$(m-1)x = (m-2)(\sqrt{x} - 1)$

Bài 2 :
Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^4 - 16}{8x} = \dfrac{y^4 - 1}{y} \\ x^2 - 2xy + y^2 = 8 \end{cases}$$

Bài 3 :
Nhận dạng tam giác:

$$\sqrt[4]{sinA} + \sqrt[4]{sinB} + \sqrt[4]{sinC} = \sqrt[4]{cos\frac{A}{2}} + \sqrt[4]{cos\frac{B}{2}} + \sqrt[4]{cos\frac{C}{2}}$$

Bài 4:
Hình chóp tứ giác đêu S.ABCD có góc giữa mặt bên và đáy là α.Vẽ đường cao SH của hình chóp,Gọi E là điêm thuộc SH và có khoảng cách tới 2 mặt(ABCD) và (SCD) bằng nhau.mp(P) đi qua E,C,D cắt SA,SB lần lượt tại M,N.
a/Thiết diện là hình gì?
b/Gọi thể tích các khối đa diện S.NMCD và ABCDNM lần lượt là V_1, V_2.Tìm α để $3V_2 = 5V_1$

Bài 5 :
Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 1$.TÌM GTNN của:

$$P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

4.2 Chọn đội tuyển quốc gia

4.2.1 Vòng 1

Bài 1 : Giả sử đồ thị hàm số

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + d$$

cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$. Chứng minh: $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$.

Bài 2 :

Giải phương trình:

$$4\cot^6 x + 3(1 - \frac{\cos 2x}{\sin^2 x})^4 = 7$$

Bài 3:

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các tia đối của các tia BA, DA, CB, CD cùng tiếp xúc với đường tròn $(I; r)$. Đặt $d = OI$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(d+R)^2} + \frac{1}{(d-R)^2}$$

Bài 4:

Tìm tất cả các hàm $f : R \to R, g : R \to R$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

1)$\forall x, y \in R$ thì $2f(x) - g(x) = f(y) - y$

2) $\forall x \in R$ thì $f(x).g(x) \geq x + 1$

Bài 5 :

Dãy số (x_n) với $n = 1, 2, 3, ...$ được xác định bởi:

$$x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 - x_n + 2 \forall n \in N*$$

Tìm giới hạn của dãy $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$

4.2.2 Vòng 2

Bài 1:

1) Giải phương trình: $x^2 - 10[x] + 9 = 0$

2) Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} < \sqrt{5} + \sqrt{-x + 8}$$

Bài 2:
Cho dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ biết $x_1 = \dfrac{-1}{2}, x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - 1}{2}$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$
Tìm giới hạn của dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ khi $n \to \infty$

Bài 3:
Cho hàm $f : N \to N$ thoả mãn tính chất

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3 \forall n \in N$$

Tính $f(2008)$

Bài 4:
Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Đường thẳng d cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N
1) Chứng minh rằng đường thẳng d đi qua I khi và chỉ khi

$$\frac{AB + BC + CA}{AB.AC} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

2) K là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, K thuộc cung BC không chứa điểm A (K khác B, C). Các tia phân giác của các góc $B\hat{K}A, C\hat{K}A$ cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng DE luôn luôn đi qua I khi K thay đổi.

Bài 5:
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 13 \sin x + 9\sqrt{\cos^2 x - 4\cos x + 3}$ với $x \in [0; \pi]$

Bài 6:
Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh đa thức sau bất khả quy trên $Z[x]$:

$$x^{p-1} + 2x^{p-2} + 3x^{p-3} + ... + (p-1)x + p$$

5 Cần Thơ

5.1 Vòng 1

Bài 1: (2.5 điểm)
Giải phương trình sau trên R:

$$x^4 - 6x^2 - 12x - 8 = 0$$

Bài 2: (2.5 điểm)
Giải hệ phương trình sau trên R:

$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 3: (3 điểm)
Trong mặt phẳng cho tam giác ABC , có AB = a , AC = b , $B\hat{A}C = 135^o$, điểm M nằm trên cạnh BC của tam giác sao cho $B\hat{A}M = 45^o$. Tính độ dài AM theo a,b .

Bài 4: (3 điểm)
Trong không gian cho hình chóp S.ABC , trọng tâm tam giác ABC là G , trung điểm SG là I. Mặt phẳng (α) qua I cắt các tia SA , SB , SC lần lượt tại M , N , P (không trùng với S) . Xác định vị trí mặt phẳng (α) để thể tích khối chóp S.MNP là nhỏ nhất .

Bài 5: (3 điểm)
Trong không gian cho hình chóp S.ABC , T là điểm thay đổi trong mặt phẳng ABC.
Đường thẳng qua T . song song với đường thẳng SA cắt mặt phẳng (SBC) tại A' .
Đường thẳng qua T . song song với đường thẳng SB cắt mặt phẳng (SBC) tại B' .
Đường thẳng qua T . song song với đường thẳng SC cắt mặt phẳng (SBC) tại C' .
Mặt phẳng (A'B'C') cắt đường thẳng ST tại điểm I .
Chứng minh tỷ số $\dfrac{SI}{ST}$ không thay đổi khi điểm T thay đổi trong mặt đáy ABC trong mặt đáy ABC của hình chóp S.ABC.

Bài 6: (3 điểm)
Cho đa thức với hệ số thực $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, biết rằng phương trình $P(x) = 0$ không có nghiệm thực .
Chứng minh $F(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + P'''(x) + P^{(4)}(x) > 0$ với mọi số thực x .

Bài 7: (3 điểm)
Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ khác 0 , đôi một phân biệt . Chứng minh phương trình $\sqrt{1+a_1x}+\sqrt{1+a_2x}+...+\sqrt{1+a_nx}=n$ có không có quá hai nghiệm thực phân biệt .

5.2 Vòng 2

Bài 1: (3 điểm)
Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình :

$$x^2+5x-10=\sqrt{60-24x-5x^2}$$

Bài 2: (3 điểm)
Cho các số thực dương a , b , c . Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\geq\frac{1}{2}$$

Bài 3: (3 điểm)
Trong mặt phẳng cho tam giác đều AEF và hình chữ nhật ABCD . Các đỉnh E , F của tam giác đều lần lượt nằm trên các cạnh BC , CD của hình chữ nhật ABCD . Chứng minh rằng tổng diện tích của hai tam giác ABE và ADF bằng diện tích tam giác CEF.

Bài 4: (4 điểm)
Cho hàm số $f(x)=(x^3-3x^2+2)\sqrt{x^2-2x+3}$. Chứng minh rằng với mọi số thực m , hệ phương trình sau luôn có nghiệm thực :

$$\begin{cases} f^{(2008)}(x)+f^{(2008)}(y)=0 \\ x^2-my=4-m \end{cases}$$

Bài 5: (3 điểm)
Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi công thức truy hồi:

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-a_n^2+1} \end{cases}$$

Chứng minh $a_1+a_2+...+a_n\leq 1$ với mọi số nguyên dương n .

Bài 6: (4 điểm)
Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn :

$$2008x^3 - 3xy^2 + 2008y^3 = 2009$$

6 Bà Rịa Vũng Tàu

6.1 Chọn đội tuyển trường chuyên Lê Quý Đôn

Bài 1:
Giải hệ phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 = yz + \frac{8}{x} = 2zx - \frac{2}{y} = 3xy + \frac{18}{z}$$

Bài 2:
Cho dãy số xác định bởi $x_1 = 1; x_{n+1} = \dfrac{1}{2(x_n^2 + 1)} - 2008$. Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

Câu 3:
Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là điểm giữa của cung BC không chứa điểm A và K là trung điểm của BC. Hai tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở M; AM cắt BC tại N.
Chứng minh rằng:
1) AI là phân giác góc $\widehat{MAK}$
2) $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Bài 4:
Tìm tất cả các hàm số liên tục trên R và thỏa mãn:

$$f(x) - 2f(2x) + f(4x) = x^2 + x \text{ với mọi x}$$

Bài 5:
Cho a, b, c là các số không âm phân biệt. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right) \geq \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}$$

Bài 6:
Trên bàn cờ vua kích thước 8x8 được chia thành 64 ô vuông đơn vị, người ta bỏ đi một ô vuông đơn vị nào đó ở vị trí hàng thứ m và cột thứ n . Gọi

S(m;n) là số hình chữ nhật được tạo bởi một hay nhiều ô vuông đơn vị của bàn cờ sao cho không có ô nào trùng với vị trí của ô bị xóa bỏ ban đầu. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của S(m;n).

7 Thanh Hóa

7.1 Vòng 1

Bài 1: (5 điểm)
a) Giải bất phương trình:

$$3^{x^2-4} + (x^2-4).3^{x-2} \geq 1$$

b) Xác định tất cả các hàm số $f(x) : R \to R$ thoả mãn:

$$f(x) = \max_{y \in R} \{2xy - f(y)\}, \forall x \in R$$

Bài 2: (4 điểm)
Cho A là một tập hợp gồm 8 phần tử. Tìm số lớn nhất các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho giao của 2 tập bất kì trong các tập con này không phải là một tập hợp gồm 2 phần tử.

Bài 3: (5 điểm)
Cho hàm số: $f(x) = x^n + 29x^{n-1} + 2009$ với $n \in N, n \geq 2$. Chứng minh rằng $f(x)$ không thể phân tích thành tích của 2 đa thức hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài 4: (6 điểm)
Cho tam giác ABC, D là một điểm bất kì trên tia đối của tia CB. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD cắt nhau tại Pvà Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi.

7.2 Vòng 2

Bài 1:
Giải phương trình:

$$log_3 2x + 1 + log_5 4x + 1 + log_7 6x + 1 = 3x$$

Bài 2:
Chứng minh với mọi số dương $a_1, a_2, ...a_n$ thoản mãn $a_1.a_2...a_n = 1$. Ta có bất đẳng thức:

$$\sqrt{a_1^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1} \leq \sqrt{2}(a_1+...+a_n)$$

Bài 3:
Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) sao cho:

$$\frac{x^{29}-1}{x-1} = y^{12}-1$$

Bài 4:
Đường tròn (w) tiếp xúc với hai cạnh bằng nhau AB,ÂC của tam giác cân ABC và cắt cạnh BC tại K,L . Đoạn K,L cắt (w) tại điểm thứ hai M . P,Q tương ứng đối xứng với K qua B,C. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp PMQ tiếp xúc với (w)

7.3 Lam Sơn 11

Bài 1:
Giải phương trình: $x+\sqrt{4-x^2} = 2+x\sqrt{4-x^2}$

Bài 2:
Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y(x^2-y^2) = 3x \\ x(x^2+y^2) = 10y \end{cases}$$

Bài 3:
Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC và H là trực tâm. Chứng minh rằng:

$$MA^2+MH^2 = AH^2+\frac{1}{2}BC^2$$

Bài 4:
Cho phương trình: $sinx+\sqrt{2-sinx^2}+sinx\sqrt{2-sinx^2} = m$
1) Giải phương trình với $m = 3$.
2) Tìm m để phương trình có nghiệm.
Bài 5:

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \dfrac{5}{2}\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$; $n = 1, 2, 3, ...$
So sánh : u_{2008} và u_{2009}

Bài 6:
Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số mà tổng các chữ số bằng 9.

Bài 7:
Chứng minh rằng mọi ước nguyên dương lẻ của số $3^{2009} + 1$ đều có dạng $3k + 1$

8 Hải Dương

8.1 Vòng 1

Bài 1: (2 điểm)
a)Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số $y = (\dfrac{1}{3}x + m)^3 - x + 2$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 2.
b)Cho hàm số $y = 2cos^2x + 2sinxcosx + mx$
Tìm điều kiện của tham số m để hàm số có cực trị .

Bài 2: (2,5 điểm)
a)Cho đa thức:

$$P(x) = C_{2009}^1 + 2C_{2009}^2(2x) + 3C_{2009}^3(2x)^2 + ... + 2009C_{2009}^{2009}(2x)^{2008}.$$

Tính tổng các hệ số bậc lẻ của đa thức đã cho .
b)Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5^x = 2y + 1 + 2log_5(4y + 1) \\ 5^y = 2z + 1 + 2log_5(4z + 1) \\ 5^z = 2x + 1 + 2log_5(4x + 1) \end{cases}$$

Bài 3: (2 điểm)
a)Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, CD = b$; góc $(AB, CD) = \alpha$,khoảng cách giữa AB và CD bằng d.
Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$ theo a, b, d và α
b)Trong các tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và thể tích

bằng 36,hãy xác định tứ diện sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Bài 4: (2,5 điểm)
a)Chứng minh $\forall x \in R$ thì

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

b)Tìm $a > 0$ sao cho:

$$a^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

với mọi giá trị của x.
c)Cho x, y, z là các số dương và thỏa mãn:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x \geq 5; x + y \geq 8 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $xyz \leq 15$

Bài 5: (1 điểm)
Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng 1. Lấy các điểm M, N, P, Q, R, S lần lượt thuộc các cạnh $AD, AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, DD_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đường gấp khúc khép kín $MNPQRSM$

8.2 Vòng 2

Câu 1: (4 điểm)
Tìm tất cả các hàm số $f : R- > R$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x - f(y)) = f(x + y^{2008}) + f(f(y) + y^{2008}) + 1 \forall x, y \in R$$

Câu 2: (4 điểm)
Cho dãy số x_n thỏa mãn :

$$x_1 \in R; x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(cosx_n + sinx_n)(\forall n \in N*)$$

Tìm giới hạn của dãy (nếu có) tùy theo x_1

Câu 3: (3 điểm)

Cho tứ giác lồi $ABCD$ .Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của một điểm O trong tứ giác xuống các cạnh AD, AB, BC, CD ; mặt khác M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn tâm I bán kính R.
Kẻ Ax, By, Cz, Dt lần lượt vuông góc với các đường thẳng MN, NP, PQ, QM. Chứng minh rằng Ax, By, Cz, Dt đồng qui tại một điểm.

Câu 4: (3 điểm)
Cho p là số nguyên tố không nhỏ hơn 5 .Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên tố q_1, q_2 sao cho $1 < q_1 < q_2 < p$ đồng thời $q_1^{p-1} - 1; q_2^{p-1} - 1$ không chia hết cho p^2

Câu 5: (3 điểm)
Tìm $\alpha > 0$ sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in N*$:

$$1.2^{\alpha} + 2.3^{\alpha} + ... + n(n+1)^{\alpha} \geq 2.1^{\alpha} + 3.2^{\alpha} + ... + (n+1)n^{\alpha}$$

Câu 6: (3 điểm)
Cho a, b và c là các số thực dương sao cho $a + b + c = 3$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{a + 2b^3} + \frac{b^2}{b + 2c^3} + \frac{c^2}{c + 2a^3}$$

9 Đồng Tháp

9.1 Chọn đội tuyển quốc gia

Bài 1: (3.0 điểm)
Giải phương trình:

$$(1 + tan1^0)(1 + tan2^0)...(1 + tan45^0) = 2^x$$

Bài 2: (3.0 điểm)
Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Gọi AH, BI, CK là các đường cao của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{HIK}}{S_{ABC}} = 1 - cos^2A - cos^2B - cos^2C.$$

Bài 3: (2.0 điểm)
Cho a, b là hai số nguyên. Chứng minh rằng:

$$A = ab(a^2+b^2)(a^2-b^2) \vdots 30.$$

Bài 4: (3.0 điểm)
Cho hàm số $f: N^* \to N^*$ thoả hai điều kiện:
$f(a.b) = f(a).f(b)$ với $a, b \in N*$ và $(a, b) = 1$
$f(p+q) = f(p) + f(q)$ với p, q nguyên tố.
Chứng minh $f(2008) = 2008$.

Bài 5: (3.0 điểm)
Chứng minh nếu n chẵn thì 2^n chia hết:

$$C_{2n}^0 + 3C_{2n}^2 + ... + 3^k C_{2n}^{2k} + ... + 3^n C_{2n}^{2n}.$$

Bài 6: (3.0 điểm)
Cho ba số thực a, b, c. Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (ab+bc+ca-1)^2.$$

Bài 7: (3.0 điểm)
Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng AB, AC lần lượt tại B và C. M là điểm tuỳ ý nằm trên đường tròn (C). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các khoảng cách từ M đến các đường thẳng AB, AC, BC. Chứng minh: $d_1.d_2 = d_3^2$.

10 Tp. Hồ Chí Minh

10.1 Tp. Hồ Chí Minh

Bài 1:
Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x^3-y^3) - x(x+1)(x-2) = 1 \\ 2(y^3-z^3) - y(y+1)(y-2) = 1 \\ 2(z^3-x^3) - z(z+1)(z-2) = 1 \end{cases}$$

Bài 2:
Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa : $a+b+c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh:

$$a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}$$

Bài 3:
Cho tam giác ABC vuông tại A. Dlà điểm di động trên cạnh AC. Đường tròn (O) đường kính BD cắt BC tại điểm thứ hai là P. Đường cao vẽ từ A cùa tam giác ABD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Gọi F là giao điểm của CE và DP. I là giao điểm của AF và DE. Đường thẳng qua I song song DP cắt đường trung trực AI tại M. Chứng minh M di động trên 1 đường cố định khi D di động trên AC.

Bài 4:
Cho tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu tâm O. MẶt phẳng (Q) vuông góc OA, cắt AB,AC,AD tại M,N,P. Chứng minh B,C,D,M,N,P cùng thuộc 1 mặt cầu.

Bài 5:
Tìm tất cả các hàm $f : R \to R$ thoả:
$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ với mọi x,y thuộc R.

Bài 6:
Cho số thực x,y,z thỏa :

$$\begin{cases} x \geq y \geq z \geq 1 \\ 2y + 3z \geq 6 \\ 11x + 27z \geq 54 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất:

$$P(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{2008}{y^2} + \frac{2009}{z^2}$$

Bài 7:
Cho đa thức $P_k(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{k-1}x^{k-1}$, k nguyên dương.
Chứng minh:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k P_k(x) = 2^{n-1} P_n(\frac{x-1}{2})$$

10.2 PTNK ĐHQG

10.2.1 Vòng 1

Bài 1:
a) Chứng minh rằng tồn tại số n chẵn, $n > 2008$ sao cho $2009.n - 49$ là số

chính phương.
b) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên m sao cho $2009.m - 147$ là số chính phương.

Bài 2:
Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{3, 4, 5, 6\}$?

Bài 3:
Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định và B, C thay đổi trên đường thẳng d cố định sao cho nếu gọi A' là hính chiếu của A lên d thì $\overline{A'B}.\overline{A'C}$ âm và không đổi. Gọi M là hình chiếu của A' lên AB.
a) Chứng minh rằng tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC thuộc một đường thẳng cố định.
b) Gọi N là hình chiếu của A' lên AC, K là giao điểm của các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'MN tại M và N. Chứng minh rằng K thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 4:
Cho $f(x) = x^2 + ax + b$. Biết phương trình $f(f(x)) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3,\ x_4$ và $x_1 + x_2 = -1$. Chứng minh rằng:

$$b \leq -\frac{1}{4}$$

10.2.2 Vòng 2

Bài 1:
Cho $P(x) = (x+1)^p(x-3)^q = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$. Biết $a_1 = a_2$. Chứng minh rằng $3n$ là số chính phương.

Bài 2:
a) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

b) Chứng minh rằng tồn tại $a, b, c > 0$ để:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} < 2$$

Bài 3:
Cho góc xOy và P là điểm trong của nó. Đường tròn (C) thay đổi nhưng luôn đi qua O, P cắt Ox, Oy tại M, N. Tìm quĩ tích trọng tâm G và trực tâm H của ΔOMN.

Bài 4:
Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của n.
a) Chứng minh rằng các số 999 và 2999 không thể phân tích được thành dạng $a + b$ sao cho $S(a) = S(b)$.
b) Chứng minh mọi số nguyên m thoả $999 < m < 2999$ đều có thể phân tích được thành dạng $a + b$ sao cho $S(a) = S(b)$.

11 Hà Nội

11.1 Tp. Hà Nội

Bài 1:
Cho hàm số:

$$y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3(m^2+1)x + m^3 + 1$$

1. Tìm m để hàm số sau có cực đại cực tiểu.
2. Chứng minh rằng với mọi m phương trình $y = 0$ luôn có 1 nghiệm duy nhất.

Bài 2:
1. Giải phương trình:

$$\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3}] = 5x$$

2. Cho $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$
Tìm max $A = x^2 + y^2$

Bài 3:
1. Cho hình hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là a,b,c và độ dài đường chéo là $\sqrt{3}$.
Chứng minh rằng $\sum \frac{a}{b^2+c^2} \geq \frac{3}{2}$.
2. Cho dãy sốu_nđược xác định như sau:

$$u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$$

và dãy s_n được xác định:

$$s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

Tính $lims_n$

Bài 4:
1. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD với đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mp đáy và SA=a, AB=b, AD=c. Qua trọng tâm G của tam giác SBD kẻ 1 đường thẳng d cắt đoạn SB tại M và SD tại N. Vẽ mp (AMN) cắt SC tại K tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $V_{S.AMNK}$.
2. Trên mp (ABCD) kẻ tia phân giác trong At trên At lấy E sao cho $B\hat{E}D = 45^o$ .Chứng minh rằng:

$$AE = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + \sqrt{2}(b + c)}{2}$$

.

11.2 Đại học sư phạm Hà Nội

11.2.1 Vòng 1

Bài 1:
Tìm x, y, z tự nhiên thoả mãn $x^{2009} + y^{2009} = 7^z$

Bài 2:
Tim m lớn nhất để

$$\frac{1}{ka + b} + \frac{1}{kb + a} \geq \frac{m}{a + b}$$

với mọi $a, b > 0$ và không thuộc $[0.\pi]$.

Bài 3:
Tìm đa thức $p(x)$ thoả mãn:
1. $p(2) = 12$
2. $p(x^2) = x^2(x^2 + 1)p(x)$

11.2.2 Vòng 2

Bài 1:
Cho số nguyên dương a và dãy x_n thoả mãn:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = 2x_n^2 + 3 \end{cases}$$

1. Xác định tất cả các giá trị có thể của a để tồn tại 1 số x_i chia hêt cho 2009
2. Chứng minh rằng với mỗi ước nguyên tố p của $2009^{2008} + 23$ tồn tại vô số số a thoả mãn x_n không có số hạng nào chia hết cho p

Bài 2:
Tìm $p(x)$ thoả mãn $p(x^2) = p(x)p(x+2)$

Bài 3:
Tập các số nguyên dương N^* chia thành 2 tập A, B thoả mãn:
1. $1 \in A$.
2. Không có 2 phần tử nào của A và 2 phần tử nào của B có tổng bằng $2^k + 2$
Hãy chỉ ra 1 cách chia. Chứng minh rằng cách chia tồn tại là duy nhất.

Bài 4:
Cho tam giác ABC nội tiếp $(O), M$ trong tam giác A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. AM, BM, CM cắt (O) ở A_2, B_2, C_2. Tìm M sao cho $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là ảnh của nhau trong 1 phép vị tự.

11.3 Đại học KHTN Hà Nội

11.3.1 Vòng 1

Bài 1:
Cho x, y, z không âm thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm min, max:

$$P = \frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+xz} + \frac{z}{1+yx}$$

Bài 2:
Tìm x, y, z nguyên dương thỏa mãn:

$$x^{z+1} - y^{z+1} = 2^{100}$$

Bài 3:
Tập các số $\{1, 2, .., 3000\}$ có chứa một tập con A gồm 2000 phần tử thỏa mãn: nếu $x \in A$ thì $2x$ không thuộc A hay không?

Bài 4:
Cho tam giác ABC nhọn, trên AB,AC lấy M,N. Các đường tròn đường kính BN,CM cắt nhau ở P,Q, Biết P nằm trên (ABC).
a) Chứng minh: Q thuộc đường tròn Ơle của tam giác ABC.
b) Chứng minh: MN đi qua tâm (ABC).

11.3.2 Vòng 2 - Ngày 1

Bài 1:
Cho x,y,z>0, tìm GTNN của:

$$P = \frac{x^7 z}{x^5 y^2 z + 2y^6} + \frac{y^7 z^6}{y^5 z^4 + 2x} + \frac{1}{z^2 x^2 + 2x^6 y z^7}$$

Bài 2:
Tìm hàm liên tục f: $R \to R$ thỏa mãn: $6(f(fx)) = 2f(x) + x$

Bài 3:
Cho tam giác ABC và đường tròn đi qua B,C cắt các cạnh AB,AC tại P,Q. Gọi A_1, B_1, C_1là trung điểm PQ, PB, QC. Chứng minh: các đường thẳng đi qua A,B,C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 cắt nhau tại 1 điểm.

Bài 4:
Cho đa thức $P(x)$ bậc $n > 0$, hệ số nguyên và p nguyên tố. Giả sử phương trình $P(x) \equiv 0(modp)$ có đúng m nghiệm phân biệt $x_1, x_2, ..x_m \in [1, p], m \in N^*$ và $P'(x_i) \neq kp$, $(i \in [1, m])$. Xác định số nghiệm phương trình:

$$P(x) \equiv 0(modp^{2008}) \text{ trên } [1, p^{2008}]$$

11.3.3 Vòng 2 - Ngày 2

Bài 1:
Cho $x1, x2, .., x_n$ không âm $(n > 2)$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$ Tìm giá trị lớn nhất:

$$P = (1 - x_1)(1 - x_2)..(1 - x_n)$$

Bài 2:
Cho m, p là số nguyên dương sao cho $m^2 + 4p$ không phải chính phương và $m > p$. Gọi c là nghiệm dương của phương trình: $x^2 - mx - p = 0$.
Xét dãy x_n:

$$\begin{cases} x_0 = a \in N \\ x_{n+1} = c.x_n \end{cases}$$

Tìm dư của phép chia x_n cho n

. **Bài 3:**
Cho (O) và A,B cố định sao cho AB ko là đường kính. C thuộc ung AB lớn, D là trung điểm AB. M là trung điểm AC, N là đường cao hạ từ M xuống BC. Vẽ d qua N vuông góc DN. Chứng minh: d tiếp xúc 1 đường cong cố định.

Bài 4:
Cho cac số thực $a_1, a_2...a_n$ thỏa mãn $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ và cho hàm số f(x) lồi trên $[a_1, a_n]$. Chứng minh:

$$\sum_{k=1}^{n} f(ak)a(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} f(a(k+1))ak$$

12 Quảng Bình

12.1 Vòng 1

Bài 1: (2,5 điểm)
Giải phương trình:

$$2\sqrt[2009]{(1+x)^2} + 3\sqrt[2009]{1-x^2} + \sqrt[2009]{(1-x)^2} = 0$$

Bài 2: (2,5 điểm)
Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(\frac{\pi}{2}cosx)}{sin(tanx)}$$

Bài 3: (2,0 điểm)
Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
a) $u_n > 0; \forall n \in N*$
b) $u_1 = 1;$
c) $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+u_n^2}-1}{u_n}; \forall n \in N*$
Chứng minh rằng:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n \geq 1+ \frac{\pi}{4}[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]$$

Bài 4: (3,0 điểm)
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AD//BC), SA = 2a và vuông góc với đáy, AB = BC = CD = a. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.
a) Chứng minh rằng A, M, N, P đồng phẳng và tứ giác AMNP nội tiếp được trong một đường tròn.
b) Tính diện tích tứ giác AMNP theo a.

12.2 Vòng 2

Bài 1: (2,5 điểm)
Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22} - \sqrt{y} = y^2 + 2y + 1 \\ \sqrt{y^2+2y+22} - \sqrt{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

Bài 2: (2,5 điểm)
Cho 4 số nguyên dương a, b, c, d trong đó tổng của 3 số bất kỳ chia cho số còn lại đều có thương là số nguyên khác 1. Chứng minh rằngtrong 4 số a, b, c, d luôn tồn tại 2 số bằng nhau.

Bài 3: (2,5 điểm)
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0;1)$ và $f(0) = f(1) = \dfrac{2009}{2007}$
Chứng minh rằngtồn tại số $c \in (0;1)$ sao cho $2007f(c) - 2008f'(c) = 2009$.
Trong đó: $f'(c)$ là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại c

Bài 4: (2,5 điểm)

Cho 4 điểm A, B, C, D có các điểm A, B cố định và C, D thay đổi sao cho A, B, C, D nằm trên đường tròn; AC và BD là hai đường thẳng cố định vuông góc với nhau tại một điểm không trùng với các điểm A, B, C, D. Chứng minh rằngtrung điểm của đoạn thẳng CD luôn nằm trên một đường cố định.

13 Kon Tum

13.1 Chọn đội tuyển quốc gia

Bài 1:
Tìm cặp số (x, y) với x, y thuộc trong khoảng từ $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} tanx - tany = y - x \\ 2x^3 = 1 + \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{2}} \end{cases}$$

Bài 2:
Tìm số k bé nhất để bất phương trình luôn đúng:

$$2\sqrt[2]{x^2 - x^4} + (1-k)(|x| + \sqrt[2]{1-x^2} + 2 - k) \leq 0$$

Bài 3:
Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ sao cho $P(25) = 1945$ và $P(11) = 2008$.

Bài 4:
Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O).Đường thẳng qua C cắt các tia đối của BA, DA lần lượt tại M và N. Chứng minh:

$$\frac{4S_{BCD}}{S_{AMN}} \leq (\frac{BD}{AC})^2$$

Bài 5:
Cho dãy $u(n)$ xác định bởi công thức:
$u_1 = 8$
$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^2 - 7u_n + 25)$
Đặt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{u_i - 2}$
Tính $limv(n)$ khi $n \to +\infty$

Bài 6:
Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm.
Tìm GTNN của $P = a^2 + b^2$

Bài 7:
Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

14 Vĩnh Phúc

14.1 Học sinh giỏi lớp 11

Bài 1:
Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$$

Bài 2:
Cho dãy số $(a_n) : a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$.
Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

Bài 3:
Cho x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$.
Tìm giá trị lớn nhất của: $P = (x-1)(y-1)(z-1)$.

Bài 4:
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Đường cao BH=R$\sqrt{2}$, D và E là hình chiếu vuông góc của H lên AB và BC. Chứng minh D, E, O thẳng hàng.

Bài 5:
Tìm số p nguyên tố để tồn tại các số nguyên dương x, y, n thỏa mãn:

$$p^n = x^3 + y^3$$

Bài 6:
Xét tất cả các số N gồm 2008 chữ số thỏa mãn chia hết cho 99 và các chữ số

của N thuộc tập $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Tính trung bình cộng của tất cả các số như vậy.

Bài 7:
Cho hai đường tròn (O;R) và (O';R') cắt nhau tại A và B. Từ điểm C trên tia đối của tia AB kẻ các tiếp tuyến CD, CE với (O) (D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O')). AD và AE cắt (O') lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng đường thẳng DE đi qua trung điểm MN.

15 Bình Định

15.1 Học sinh giỏi lớp 12

Câu 1: (5 điểm)
Tìm tất cả các cặp số nguyên dương m, n sao cho:

$$\frac{n}{m} = \frac{(m^2 - n^2)^{\frac{n}{m}} - 1}{(m^2 - n^2)^{\frac{n}{m}} + 1}$$

Câu 2: (5 điểm)
Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$(1 + cos^2\frac{A}{2})(1 + cos^2\frac{B}{2})(1 + cos^2\frac{C}{2}) < (1 + \frac{\sqrt{3}}{4})^{3\sqrt{3}}$$

Câu 3: (5 điểm)
Xét dãy số nguyên dương , (n=0, 1, 2. . . .) thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n^2 > a_{n-1}a_{n+1} \end{cases}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots.$. a) Chứng minh rằng $a_n > n\ \forall n$.
b) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^2}(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \ldots\ldots.. + \frac{n}{a_n})$.

Câu 4: (5 điểm)
Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M , N. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BM}+\frac{1}{CN}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}.$$

15.2 Học sinh giỏi lớp 11

Câu 1:
Dãy số $u_1, u_2, ..., u_k$ được xác định: $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ với n = 1, 2, 3,...,k.
Đặt $S = u_1 + u_2 + .. + u_k$
Chứng minh rằng: $18 < \frac{1}{S} \leq 24$

Câu 2:
Tìm tất cả các nghiệm thuộc đoạn [0;1] của phương trình:

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$$

Câu 3:
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\sqrt{cos2x-4cosx+5}+\sqrt{cos2x+12cosx+27}$$

Câu 4:
Chứng minh rằng không thể tồn tại trên mặt phẳng tọa độ một tứ giác ABCD mà $AC = 2\sqrt{3}.BD; (\vec{AC}, \vec{BD}) = 60^0$ và tọa độ các đỉnh đều là số nguyên.

16 Thái Bình

16.1 Đề thi học sinh giỏi 12

Câu 1: (3 điểm)
1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = |x|^3 - 3|x| - 2$ (ξ)
2. Gọi d là đường thẳng đi qua M(2;0) và có hệ số góc k. Tìm k để đường thẳng d cắt (ξ) tại 4 điểm phân biệt.

Câu 2: (4 điểm)
1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{2008}{1+x_n} \end{cases}$ Chứng minh rằng

(x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.
2. Tìm m để phương trình: $x + y + \sqrt{2x(y-1) + m} = 2$ có nghiệm.

Câu 3: (2 điểm)
Cho $\frac{1}{4} < a, b, c, d < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \log_a(b - \frac{1}{4}) + \log_b(c - \frac{1}{4}) + \log_c(d - \frac{1}{4}) + \log_d(a - \frac{1}{4})$$

Câu 4: (3 điểm)
1. Giải phương trình: $x^2 - x - 2008\sqrt{1 + 16064x} = 2008$
2. Tìm nghiệm của phương trình $|\cos x| - |\sin x| - \cos 2x\sqrt{1 + sin2x} = 0$ thỏa mãn: $2008 < x < 2009$

Câu 5: (2 điểm)
Cho tam giác ABC biết $A(1; -2)$, hai đường phân giác trong của góc B và C lần lượt có phương trình là: $(d_1) : 3x + y - 3 = 0$ và $(d_2) : x - y - 1 = 0$. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Câu 6: (4 điểm)
Cho một tam diện vuông Oxyz và một điểm A cố định bên trong tam diện. Gọi khoảng cách từ A đến ba mặt phẳng Oyz, Ozx, Oxy lần lượt là a, b, c. Một mặt phẳng (α) qua A cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P.
1. Chứng minh rằng: $\frac{a}{OM} + \frac{b}{ON} + \frac{c}{OP} = 1$
2. Xác định vị trí của mặt phẳng (α) để thể tích của tứ diện OMNP đạt giá trị nhỏ nhất. Khi thể tích tứ diện OMNP nhỏ nhất, hãy chỉ rõ vị trí điểm A.
3. Chứng minh rằng: $(MN + NP + PM)^2 \leq 6(OM^2 + ON^2 + OP^2)$
Câu 7: (2 điểm)
Cho $\begin{cases} 0 < a \leq b \leq c \leq d \\ bc \leq ad \end{cases}$.
Chứng minh rằng: $a^b.b^c.c^d.d^a \geq a^d.d^c.c^b.b^a$

17 Khánh Hòa

17.1 Học sinh giỏi bảng B

Bài 1: (4,0 điểm)
Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^4(1-2x^2)=y^4 \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=x^3(x^3-x+2y^2) \end{cases}$$

Bài 2: (5,0 điểm)
a) Giải phương trình:

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của a để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{a^3}(x-1)^2+\frac{\sqrt{a}}{(x-1)^2}\le\sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

Bài 3: (5,0 điểm)
Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$u_1=u_2=1,u_3=2,...,u_{n+3}=\frac{u_{n+1}.u_{n+2}+7}{u_n}\,(\forall n\in Z_+)$$

Chứng minh rằng $u_n\in Z\ \forall n\in Z^+$

Bài 4: (3,0 điểm)
Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp một khối đa diện hai mươi mặt đều có độ dài cạnh bằng $a\,(a>0)$.

Bài 5: (3,0 điểm)
Cho một đa giác đều $A_1A_2A_3...A_n,(n\ge 3)$ biết 4 đỉnh liên tiếp A_1,A_2,A_3,A_4 của đa giác thỏa mãn đẳng thức $\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$. Tìm số cạnh của đa giác đều đã cho.

18 Nam Định

18.1 Ngày 1

Bài 1: (4 điểm)
Chứng minh rằng trong 4 số thực dương không nhỏ hơn 1 luôn tồn tại 2 số a;b thỏa mãn:

$$\frac{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}+1}{ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 2: (5 điểm)
Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy} \in Z$. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ để $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 3: (2 điểm)
Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau với mọi cặp số thực $(x; y)$:
i) $f(x) \geq e^{2009x}$
ii) $f(x+y) \geq f(x).f(y)$

Bài 4: (5 điểm)
Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích là S. Đặt $AB = a, BC = b, CD = d, DA = d$. Chứng minh rằng:

$$13a^2 + 6b^2 - c^2 + 2d^2 \geq 4S\sqrt{2}$$

Bài 5: (4 điểm)
Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2008} + (-1)^n \end{cases}$$

với mọi $n = 1, 2, 3\ldots$ Chứng minh rằng dãy số (x_n^2) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

18.2 Ngày 2

Bài 1: (2 điểm)
Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 2: (5 điểm)

$$\begin{cases} z^2 + 2xyz = 1 \\ 3x^2y^2 + 3y^2x = 1 + x^3y^4 \\ z + zy^4 + 4y^3 = 4y + 6y^2z \end{cases}$$

Bài 3: (4 điểm)
Cho các số thực a, b, c, d, e. Chứng minh rằng:
Nếu phương trình $ax^2 + (b + c)x + d + e = 0$ có nghiệm thực thuộc khoảng $[1, +\infty)$ thì phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ có nghiệm thực.

Bài 4: (5 điểm)
Tìm tất cả các hàm $f : R^+ \to R$ tăng và thỏa mãn điều kiện
$f(x + 1) = f(x) + 2^{-x}$ với mọi số thực dương x.

Bài 5: (4 điểm)
Cho tam giác cân ABC có AB=AC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BD=2DC. Giả sử P là điểm trên đoạn AD sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{BPD}$.
Chứng minh rằng: $\widehat{BAC} = 2\widehat{DPC}$.

Tài liệu được tổng hợp từ các forum Toán học ở Việt Nam
diendantoanhoc.net
mathscope.org
maths.vn
chihao.info
diendan3t.net

To be continued ...