NGUYỄN VĂN THIÊM
THPT Yên Thành 2 – Nghệ an

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

THPT Yên Thành 2 – Nghệ An

Phần 1
MỘT SỐ LOẠI HỆ PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP

§ 1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHÉP THẾ.

Cách giải hệ phương trình bằng phép thế là đưa nhiều ràng buộc về ít ràng buộc, đưa hệ nhiều phương trình về hệ ít phương trình hay là đưa hệ phương trình về phương trình. Bởi vậy, đây là cách làm tự nhiên nhất, theo quan điểm đưa cái phức tạp về cái đơn giản.

Dấu hiệu nhận dạng đối với hệ phương trình giải bằng phép thế là ít nhất một trong các phương trình có thể ***rút*** được một ẩn qua các ẩn còn lại; việc ***thế*** vào những những phương trình kia cho ta phương trình hay hệ phương trình có thể giải được.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

(Trích đề thi dự bị số 2, đề thi TS ĐH khối A năm 2005).

Giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ y=2-\dfrac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6}-\sqrt{4-x}=\sqrt{2} \\ y=2-\dfrac{3x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\le x\le 4 \\ \sqrt{x+6}=\sqrt{2}+\sqrt{4-x} \\ y=2-\dfrac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=6-x+2\sqrt{8-2x} \\ y=2-\dfrac{3x}{2} \\ -6\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{8-2x} \\ y=2-\dfrac{3x}{2} \\ -6\le x\le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2=8-2x \\ x\ge 0 \end{cases} \\ y=3-\dfrac{2x}{2} \\ -6\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8=0 \\ y=3-\dfrac{3x}{2} \\ 0\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=2 \end{array}\right. \\ y=2-\dfrac{3x}{2} \\ 0\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Nhận xét. 1. Dấu hiệu nhận ra phương pháp thế trong bài toán loại này là dễ thấy nhất. Tuy nhiên, ngay cả trong ví dụ trên, đó không phải là lựa chọn duy nhất. Chẳng hạn, viết phương trình thứ hai thành $(2x+y+1)+(x+y)=5$ *rồi đặt* $u=\sqrt{2x+y+1};\ v=\sqrt{x+y}$.

2. Khi dạy bài toán này, chúng tôi không quên nhắc nhở học sinh về điều kiện của phương trình, điều kiện của một phép biến đổi tương đương. Ngoài ra, khuyến khích các em tìm thêm cách giải khác.

Ví dụ 2. Biết rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)+x+y=b \\ y-x=b \end{cases}$$

có nghiệm với mọi b. Chứng minh rằng a bằng 0.

(Đề thi ĐH Luật Hà nội năm 1999)

Giải. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$y=x+b$$

Thế vào phương trình thứ nhất, ta được

$$a\left[(x+b)^2+x^2\right]+2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2ax^2+(2ab+2)x+ab^2=0\ ^{(*)}.$$

+) Nếu $a\neq 0$, phương trình $^{(*)}$ có $\Delta'=(ab+1)^2-2a^2b^2=2-(ab-1)^2$.

Lấy $b=\dfrac{4}{a}$ thì $\Delta'=2-9=-7<0$, phương trình $^{(*)}$ vô nghiệm. Điều này trái với giả thiết hệ có nghiệm với mọi giá trị của b.

+) Với $a=0$, hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x+y=b \\ -x+y=b \end{cases}$,

luôn có nghiệm $(0;b)$ với mọi giá trị của b.

Vậy $a=0$.

Nhận xét. *1. Nhờ phép thế, ta đưa điều kiện có nghiệm của hệ phương trình về điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.*

2. Khi dạy bài này, chú ý rèn luyện cho các em học sinh kỹ năng lập luận logic. Chúng ta phủ định mệnh đề chứa lượng từ với mọi bằng cách chỉ ra nó không đúng với một giá trị của b.

Ví dụ 3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^3-y^3=m(x-y) \end{cases}$$

m là tham số.

1. Giải hệ phương trình khi $m=1$.
2. Với giá trị nào của m, hệ đã cho có ba nghiệm phân biệt.

Giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2-m\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+xy+y^2-m=0 \end{cases} (II) \end{array}\right.$$

Hệ (I) cho nghiệm $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$.

1. Với $m=1,\ (II)\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy hệ ban đầu có ba nghiệm $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),(0;1),(1;0)$.

2. Xét $f(x)=x^2-x+1-m$

Hệ ban đầu có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$. Nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta=1-4(1-m)>0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{3}{4}.$$

Vậy $m>\frac{3}{4}$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4 \\ \log_4 x-\log_4 y=1 \end{cases}$$

(Trích đề thi ĐH Tài chính kế toán Hà nội năm 2000)

Giải. Với điều kiện $x>0, y>0$, phương trình thứ hai tương đương với $\log_4\frac{x}{y}=1\Leftrightarrow x=4y$.

Thế vào phương trình thứ nhất ta được

$$(4y)^{\log_8 y}+y^{\log_8 4y}=4\Leftrightarrow 4^{\log_8 y}.y^{\log_8 y}+y^{\log_8 4}.y^{\log_8 y}=4$$

Để ý: $4^{\log_8 y}=2^{\frac{2}{3}\log_2 y}=y^{\frac{2}{3}},\ \ y^{\log_8 4}=y^{\frac{2}{3}}$ nên phương trình trên tương đương với

$$2.y^{\frac{2}{3}}.y^{\log_8 y}=4\Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}+\log_8 y}=2\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}+\log_8 y\right).\log_8 y=\log_8 2$$

$$\Leftrightarrow(\log_8 y)^2+\frac{2}{3}\log_8 y-\frac{1}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_8 y = -1 \\ \log_8 y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{8} \\ y = 2 \end{array}\right..$$

Từ đó, hệ ban đầu có nghiệm $(8;2),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{8}\right)$.

Nhận xét. Ở ví dụ 4, ta rút $x = 4y$ không phải từ phương trình bậc nhất hai ẩn mà từ phương trình logarit. Ở ví dụ sau, để thực hiện phép thế ta không chỉ rút một ẩn mà là một biểu thức chứa ẩn.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \left(x^2 + xy\right)^2 = 2x + 9 \quad (1) \\ xy = 3x + 3 - \dfrac{x^2}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Thế xy ở (2) vào (1) ta được phương trình

$$\left(x^2 + 3x + 3 - \frac{x^2}{2}\right)^2 = 2x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Thay $x = 0$ vào phương trình (2) ta thấy không thoả mãn.

Thay $x = -4$ vào (2) ta được $y = \dfrac{17}{4}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(-4;\dfrac{17}{4}\right)$.

Nhận xét. Ví dụ sau đây, học chỉ rút được ẩn sau khi đã thực hiện bước phân tích một biểu thức thành tích.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

Giải. Điều kiện $x \geq 1,\ y \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x+y)(x-2y-1)=0 & (1)\\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y & (2)\end{cases}$$

Do $x+y>0$ nên (1) tương đương với $x=2y+1$.

Thế vào phương trình (2) ta được $(y+1)\sqrt{2y}=2(y+1)\Leftrightarrow\sqrt{2y}=2$ (do $y+1>0$)

Từ đó suy ra $y=2$, $x=4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(4;2)$.

Ví dụ 7. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}x+ay-a=0\\ x^2+y^2-x=0\end{cases}$$

a) Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ là hai nghiệm phân biệt của hệ phương trình trên, tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức $P=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$.

Giải.

a. Viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng

$$\begin{cases}x+a(y-1)=0 & ^{(1)}\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4} & ^{(2)}\end{cases}$$

Phương trình $^{(1)}$ là phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $A(0;1)$, phương trình $^{(2)}$ là phương trình đường tròn tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$, bán kính $R=\dfrac{1}{2}$.

Hệ phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi khoảng cách từ I đến (Δ) nhỏ hơn bán kính R, tức là $\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-a\right|}{\sqrt{1+a^2}}<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3a^2-4a<0\Leftrightarrow 0<a<\dfrac{4}{3}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi $0<a<\dfrac{4}{3}$.

b. Nghiệm của hệ chính là toạ độ giao điểm của đường thẳng và đường tròn. Giả sử $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$. M,N đều thuộc đường tròn nên $MN\le 2R=1$

Từ đó ta có $P=MN^2\le 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi MN là đường kính của đường tròn, tức là $I\in(\Delta)\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho thành

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\ x^2+y^2-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-1=0\\ 5x^2-5x+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{5} \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5} \\ y = \dfrac{-\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Nhận xét. Đây là loại hệ phương trình có một phương trình bậc nhất hai ẩn, thông thường sử dụng phương pháp thế. Nhưng riêng bài này, phép thế sẽ làm cho bài toán trở nên phức tạp ở ý b), do vậy chúng ta sử dụng phương pháp đồ thị.

Dạy giải bài toán này, chúng ta cho học sinh một bài học sinh động về tính linh hoạt và sáng tạo trong giải toán.

§ 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG KIỂU 1

1. Định nghĩa và cách giải.

Hệ phương trình hai ẩn đối xứng kiểu 1 là hệ phương trình hai ẩn mà khi ta hoán đổi vị trí hai ẩn, hệ không đổi.

Dạng

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Trong đó, $f(x,y)=f(y,x);\ g(x,y)=g(y,x)$.

Cách giải: đặt $x+y=s, xy=p$ với điều kiện $s^2 \ge 4p$.

Tất nhiên, không phải bài toán nào cũng đơn giản như vậy, có những tình huống, s, p không phải là tổng, tích hai ẩn mà là hai biểu thức đối xứng chứa ẩn. Ở đây, *đối xứng* được hiểu là bình đẳng về quan hệ đại số.

2. Một số ví dụ.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$$

(Đề thi ĐHSP Hà nội khối B năm 2000)

Giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)^2-xy=7 \\ \left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-xy=7 \\ \left[(x+y)^2-2xy\right]^2-x^2y^2=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2-xy=7 \\ (7-xy)^2-x^2y^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=7+xy \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=9 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Từ đó, hệ ban đầu có các nghiệm $(1;2),(2;1),(-1;-2),(-2;-1)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{yx} = 78 \end{cases} \qquad (x > 0; y > 0)$$

(Đề thi ĐH Hàng hải TP HCM năm 1999).

Giải. Với $x > 0, y > 0$, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y = 7 + \sqrt{xy} \\ (x + y)\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y) + \left(-\sqrt{xy}\right) = 7 \\ (x + y).\left(-\sqrt{xy}\right) = -78 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $(x + y), -\sqrt{xy}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 - 7t - 78 = 0$.

Suy ra $\begin{cases} -\sqrt{xy} = -6 \\ x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$

Hệ có hai nghiệm $(4;9), (9,4)$.

Ví dụ 3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k\left(\sqrt{x + y} - 1\right) = 1 \\ x + y = xy + 1 \end{cases}$$

1. Giải hệ phương trình khi k=0.
2. Tìm tất cả các giá trị của k để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải.

1. Với $k = 0$, hệ trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 0 \\ x + y = xy + 1 \end{cases}$$

Với điều kiện $x^2 + y^2 \geq 1$, hệ tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = xy + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 2 + 2xy \\ x + y = xy + 1 \end{cases}$$

Đặt $x + y = u,\ xy = v$, hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2 = 2u \\ u = v + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Từ đó, hệ ban đầu có nghiệm $(1;-1),(-1;1),(1;1)$.

2. Tìm k để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x^2+y^2\ge 1 \end{cases}$$

Do vai trò của x, y là như nhau trong cả hai phương trình nên nếu hệ có nghiệm $(x;y)$ thì cũng có nghiệm $(y;x)$. Do đó, để hệ có nghiệm duy nhất thì phải có $x=y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-1}-k\left(\sqrt{2x}-1\right)=1 \\ 2x=x^2+1 \end{cases} \Rightarrow x=1$$

Thay $\mathrm{x}=1$ trở lại cho ta $k=0$.

Nhưng với $k=0$, theo câu 1. phương trình có đến ba nghiệm.

Vậy không tồn tại k để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Nhận xét. 1. Trong lời giải ý 2. ta sử dụng điều kiện cần và đủ để giải và biện luận hệ phương trình có chứa tham số. Tuy nhiên, học sinh hay gặp thiếu sót là không kiểm tra điều kiện đủ.

2. Bài toán này có thể giải dựa vào phân tích $x+y=xy+1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=0$*, đây là đồng nhất thức rất hay gặp.*

Ví dụ 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a \\ x+y-\sqrt{xy}=a \end{cases} \quad (I)$$

Giải. Điều kiện $x\ge 0,\ y\ge 0.$

Đặt $\begin{cases} X=\sqrt{x}\ge 0 \\ Y=\sqrt{y}\ge 0 \end{cases}$

Hệ $^{(I)}$ thành

$$\begin{cases} X+Y=a \\ X^2+Y^2-XY=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=a \\ (X+Y)^2-3XY=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=a \\ XY=\dfrac{1}{3}\left(a^2-a\right) \end{cases}$$

Suy ra X, Y là hai nghiệm của phương trình $t^2-at+\dfrac{1}{3}\left(a^2-a\right)=0$ $^{(1)}$.

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $^{(1)}$ có hai nghiệm không âm. Điều này có nghĩa là

$$\begin{cases}\Delta \geq 0\\ S \geq 0\\ P \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a-a^2 \geq 0\\ a^2-a \geq 0\\ a \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 \leq a \leq 4\\ a=0\end{array}\right.$$

Như vậy, hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $1 \leq a \leq 4$.

Ví dụ 5. Tìm m để hệ phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases}x+y+x^2+y^2=8\\ xy(x+1)(y+1)=m\end{cases}$$

Giải. Viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases}x(x+1)+y(y+1)=8\\ x(x+1).y(y+1)=m\end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases}u=x(x+1)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{4}\\ v=y(y+1)=\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{4}\end{cases} \qquad (*)$$

Hệ phương trình thành

$$\begin{cases}u+v=8\\ uv=m\end{cases}$$

Từ đó, u,v là hai nghiệm của phương trình $f(t)=t^2-8t+m=0$ $^{(1)}$. Đối chiếu với điều kiện $^{(*)}$ ta thấy, hệ phương trình có nghiệm khi phương trình $^{(1)}$ có hai nghiệm lớn hơn hoặc bằng $-\dfrac{1}{4}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases}\Delta'=16-m \geq 0\\ \dfrac{S}{2}-(-\dfrac{1}{4}) \geq 0\\ \left(t_1+\dfrac{1}{4}\right)\left(t_2+\dfrac{1}{4}\right) \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \leq 16\\ t_1t_2+\dfrac{1}{4}(t_1+t_2)+\dfrac{1}{16} \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \leq 16\\ m+\dfrac{33}{16} \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{33}{16} \leq m \leq 16.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-\dfrac{33}{16} \leq m \leq 16$.

Nhận xét. Việc đặt điều kiện (*) đối với ẩn phụ là bắt buộc, nếu không sẽ không thể đưa ra điều kiện có nghiệm của hệ.

Ví dụ 6. Tìm a để hệ phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} a(x+y)+z=a \\ x^2+y^2=z \end{cases}$$

Giải. Rõ ràng hệ đối xứng với x,y. Do đó, nếu có $(x_0;y_0;z_0)$ là nghiệm thì $(y_0;x_0;z_0)$ cũng là nghiệm. Vì vậy, để hệ có nghiệm duy nhất thì cần có $x_0=y_0$. Thế vào hệ đã cho ta có:

$$\begin{cases} 2ax_0+z_0=a \\ z_0=2x_0{}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0=2x_0{}^2 \\ 2x_0{}^2+2ax_0-a=0 \end{cases} \quad (*)$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì x_0 phải là nghiệm duy nhất của phương trình $^{(*)}$, tức là

$$\Delta=a^2+2a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=0 \end{array}\right.$$

Thử lại với các giá trị a tìm được.

+ $a=0$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} z=0 \\ z^2+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Hệ có nghiệm duy nhất, thoả mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a=-2$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} -2(x+y)+z=-2 \\ x^2+y^2=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+2=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất, thoả mãn yêu cầu bài toán

Tóm lại, các giá trị cần tìm của a là $a=0$ hoặc $a=-2$.

Ví dụ 7. Biết rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ xy+yz+zx=4 \end{cases} \quad (I)$$

Có nghiệm (x,y,z). Chứng minh rằng $-\frac{8}{3} \le x,y,z \le \frac{8}{3}$.

Giải. Tìm x để hệ có nghiệm với x,y. Hệ $^{(I)}$ tương đương với

$$\begin{cases} x^2+(y+z)^2-2yz=8 \\ x(y+z)+yz=4 \end{cases}$$

Đặt $S=y+z, P=yz$, hệ trở thành

$$\begin{cases} x^2 + Sx - 2P = 8 & (1) \\ xS + P = 4 & (2) \end{cases}$$

Từ $^{(2)}$ suy ra $P = 4 - xS$, thế vào phương trình $^{(1)}$ ta được

$$S^2 + 2xS + x^2 - 16 = 0 \quad (3)$$

$$\Delta' = x^2 - \left(x^2 - 16\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S_1 = -x + 4 \Rightarrow P_1 = x^2 - 4x + 4 \\ S_2 = -x - 4 \Rightarrow P_2 = x^2 + 4x + 4 \end{array}\right.$$

+) Với $\begin{cases} S_1 = 4 - x \\ P_1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 4 - x \\ yz = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

Khi đó y, z là nghiệm của phương trình $t^2 - \left(4 - x\right)t + x^2 - 4x + 4 = 0$

Phương trình này có nghiệm t khi và chỉ khi

$$\delta = \left(4 - x\right)^2 - 4\left(x^2 - 4x + 4\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{8}{3} \ (4)$$

+) Với $\begin{cases} S_2 = -4 - x \\ P_2 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -4 - x \\ yz = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$

Khi đó y, z là các nghiệm của phương trình $t^2 + \left(4 + x\right)t + x^2 + 4x + 4 = 0$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$$\delta = \left(x + 4\right)^2 - 4\left(x^2 + 4x + 4\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq x \leq 0 \ (5)$$

Từ $^{(4)}$ và $^{(5)}$ suy ra $-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được bất đẳng thức đối với y, z.

Tóm lại, với $\left(x; y; z\right)$ thoả mãn $^{(I)}$ thì $-\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$.

§ 3. HỆ ĐỐI XỨNG KIỂU 2

1. Định nghĩa. Hệ phương trình đối xứng kiểu 2 là loại hệ phương trình mà khi ta hoán đổi vị trí các biến thì phương trình này thành phương trình kia và ngược lại

Dạng:

$$\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases} \quad \text{với } f(x;y)=g(y;x).$$

2. Cách giải. ***Trừ từng vế hai phương trình, đưa về phương trình tích.***

Thông thường, nếu $f(x;y), g(x;y)$ là các đa thức, ta biến đổi như sau:

Hệ tương đương với : $\begin{cases} f(x;y)-g(x;y)=0 \\ f(x;y)+g(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y).h(x;y)=0 \\ f(x;y)+g(x;y)=0 \end{cases}$

Chú ý: Nếu biểu thức trong hệ không có dạng đa thức thì đầu tiên có thể đặt ẩn phụ.

3. Một số ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\begin{cases} 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x} \\ 3y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y} \end{cases}$$

(Đề thi ĐH Quốc gia Hà nội – khối B năm 1999)

Giải. Với điều kiện $x \neq 0, y \neq 0,$ hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2y+x=3y & (1) \\ 2xy^2+y=3x & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình ta được $(x-y)(2xy+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=-2 \end{array}\right.$

+) $x=y$, thế (1) ta được $2x^3-2x=0 \Leftrightarrow x=0, x=-1, x=1.$ Loại nghiệm $x=0$, hệ có nghiệm $(1;1),(-1;-1).$

+) $xy=-2$, thay vào phương trình (1) ta có $-4x+x=3y \Leftrightarrow x=-y$. Thay vào (2) có $-2y^3+y=-3y \Leftrightarrow y^3-2y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Loại nghiệm $y=0$, hệ có nghiệm $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right).$

Tóm lại, hệ đã cho có các nghiệm $(1;1),(-1;-1),\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right).$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3y = \dfrac{x^2+2}{x^2} & (1) \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi tuyển sinh ĐH khối B năm 2003)

Giải. Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$.

Từ (1) và (2) suy ra $x > 0, y > 0$, hệ tương đương với

$$\begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy(x-y) = x^2 - y^2 \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ (x-y)(3xy + x + y) = 0 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ x - y = 0 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y > 0 \\ (x-1)(3x^2 + 2x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_x(6x + 4y) = 2 \\ \log_y(6y + 4x) = 2 \end{cases}$$

Giải. Điều kiện $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$.

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} 6x + 4y = x^2 \\ 6y + 4x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = x^2 & (1) \\ (x-y)(x+y-2) = 0 \end{cases}$$

+) Trường hợp 1: $x = y$, thay vào (1) ta được $x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 10$, $y = 10$.

+) Trường hợp 2 : $x + y - 2$=0, thay vào phương trình (1) được $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Với $x = 4 \Rightarrow y = -2;\quad x = -2 \Rightarrow y = 4$. Cả hai nghiệm này bị loại do điều kiện x, y dương.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(10;10)$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+9}+\sqrt{y-7}=4\\ \sqrt{y+9}+\sqrt{x-7}=4\end{cases}$$

Giải. Điều kiện $x \ge 7,\ y \ge 7$.

Với điều kiện đó, ta thấy $x+9 \ge 16 \Rightarrow \sqrt{x+9}+\sqrt{y-7} \ge 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=7, y=7$.

Tương tự, $\sqrt{y+9}+\sqrt{x-7} \ge 4$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=7$.

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(7;7)$.

Nhận xét: Bài này giải bằng phương pháp đánh giá. Hoàn toàn có thể giải bằng cách trừ từng vế của hai phương trình. Tuy nhiên, cách giải trên là gọn gàng nhất.

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=m+1\\ \sqrt{y}+\sqrt{1-x}=m+1\end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải. Ta thấy, nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ phương trình thì $(1-x_0, 1-y_0)$ cũng là nghiệm. Vì vậy, để hệ có nghiệm duy nhất thì ta phải có:

$$\begin{cases}x_0=1-x_0\\ y_0=1-y_0\end{cases} \Leftrightarrow x_0=y_0=1$$

Thay vào hệ ta được $m=\sqrt{2}-1$.

Với giá trị này của m, hệ đã cho thành

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2}\\ \sqrt{1-y}+\sqrt{x}=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{y}+\sqrt{1-y}=2\sqrt{2}\quad (*)\end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopsky thì

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2}\\ \sqrt{y}+\sqrt{1-y}\le\sqrt{2}\end{cases}$$

Suy ra $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{y}+\sqrt{1-y} \le 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$. Từ đó, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, do đó hệ có nghiệm duy nhất.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m=\sqrt{2}-1$.

_Ví dụ 6._ Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \ (1) \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my \ (2) \end{cases}$$

Có nghiệm duy nhất.

(Trích đề thi Đại học Vinh khối A năm 1999)

Giải. Trừ từng vế hai phương trình (1) cho phương trình (2) ta được

$$(x-y)\left[x^2 + xy + y^2 - 6(x+y) + m\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2 + (y-6)x + \left(y^2 - 6y + m\right)\right] = 0$$

Từ đó, hệ đã cho tương đương với hai hệ

$$\begin{cases} x = y \\ x^3 = 8x^2 - mx \end{cases} (A) \quad \text{và} \begin{cases} x^2 + (y-6)x + \left(y^2 - 6y + m\right) = 0 \\ x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \end{cases} (\text{B})$$

Xét hệ (A), số nghiệm của nó chính là số nghiệm của phương trình $x\left(x^2 - 8x + m\right) = 0$ (3).

Nếu $\Delta' = 16 - m \geq 0$ thì phương trình $x^2 - 8x + m = 0$ có hai nghiệm khác x_1, x_2 với $x_1 + x_2 = 8$ nên ít nhất một nghiệm khác 0, vì vậy (3) có ít nhất hai nghiệm.

Nếu $\Delta' = 16 - m < 0 \Leftrightarrow m > 16$ thì phương trình (3) vô nghiệm, hệ (A) có nghiệm duy nhất.

Nếu $m > 16$, xét phương trình thứ nhất của hệ (B)

$$x^2 + (y-6)x + \left(y^2 - 6y + m\right) = 0 \ \ (4).$$

Ta có $\Delta = (y-6)^2 - 4\left(y^2 - 6y + m\right) = -3y^2 + 12y - 36 - 4m = -3(y-2)^2 - 4(m-12) < 0$ với mọi $m > 16$.

Từ đó, hệ (B) vô nghiệm, hệ có nghiệm duy nhất.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m > 16$.

_Ví dụ 7._ Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = m \\ 2y + \sqrt{x-1} = m \end{cases} \quad (\text{I})$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} X = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ Y = \sqrt{y-1} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} X^2 + 1 = x \\ Y^2 + 1 = y \end{cases}$

Khi đó, hệ (I) thành

$$\begin{cases} 2\left(X^2+1\right)+Y=m & (1) \\ 2\left(Y^2+1\right)+X=m & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của hai phương trình ta được

$$2\left(X^2-Y^2\right)+Y-X=0$$

$$\Leftrightarrow \left(X-Y\right)\left(2X+2Y-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=Y \\ 2X+2Y-1=0 \end{array}\right.$$

+) Với $X=Y$, thay vào phương trình (1) ta được

$$2X^2-X+2=m \quad (3)$$

+) Với $2X+2Y=1 \quad \Leftrightarrow Y=\frac{1}{2}-X\ge 0 \Leftrightarrow \quad 0\le X\le \frac{1}{2}$, thế vào (1) ta được

$$2X^2-X+\frac{5}{2}=m \qquad (4)$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi, phương trình (3) có nghiệm $X\ge 0$ hoặc phương trình (4) có nghiệm X thoả mãn $0\le X\le \frac{1}{2}$.

1) Xét hàm số $f\left(X\right)=2X^2+X+2$ với $X\ge 0$. Ta có f là hàm số đồng biến trên $[-\frac{1}{4};+\infty)$ nên đồng biến trên $[0;+\infty)$. Từ đó với mọi $X\in[0;+\infty)$ ta có $f(X)\ge f(0)=2.$

Như vậy (3) có nghiệm $X\ge 0$ khi và chỉ khi $m\ge 2$.

2) Xét hàm số $g\left(X\right)=2X^2-X+\frac{5}{2}$ trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$$g'\left(X\right)=4X-1.\ g'\left(X\right)=0\Leftrightarrow X=\frac{1}{4}.$$

$$g\left(0\right)=\frac{5}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}, g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{19}{9}.$$

Từ đó suy ra $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g(X)=\frac{5}{2};\ \min\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g\left(X\right)=\frac{19}{8}$

Từ đó, (4) có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{19}{8}\le m\le \frac{5}{2}$

Tóm lại, hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge \frac{19}{8}$.

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP HAI ẨN

1. Khái niệm.

Hệ phương trình đẳng cấp hai ẩn là hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2 = 0 \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Trong đó x, y là ẩn, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ là các hệ số.

2. Cách giải.

+) Xét trường hợp $x = 0$.

+) Xét trường hợp $x \neq 0$, đặt $y = tx$, thế vào hệ được hệ mới với ẩn t, x.

+) Khử x, được phương trình bậc hai theo t.

+) Tìm t, từ đó suy ra x, y.

3. Một số ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x-y) = 2 \end{cases}$$

Giải. Với $x = 0$, hệ đã cho vô nghiệm.

Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^3(1-t^3) = 7 \quad (1) \\ x^3t(1-t) = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Ta thấy $t = 0, t = 1$ không phải là nghiệm của hệ nên ta có thể chia từng vế phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai và được

$$\frac{1-t^3}{t(t-1)} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2(1+t+t^2) = 7t$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 2 \end{array}\right.$$

+) Với $t = \frac{1}{2}$, từ (1) suy ra $x^3 = \dfrac{7}{1-\frac{1}{8}} = 8 \Rightarrow x = 2$. Suy ra $y = 1$.

+) Với $t = 2$, thay vào (1) ta được $x^3 = \dfrac{7}{1-8} = -1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$.

Tóm lại, hệ phương trình có hai nghiệm $(-1;-2), (2;1)$.

Nhận xét. Ta có thể giải hệ bằng cách khử hệ số tự do (d_1, d_2), đưa về phương trình vế trái đẳng cấp.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 & (1) \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải. Khử số hạng tự do ta được phương trình

$$16x^2 + 14xy + 3y^2 = 0 \qquad (3)$$

Đặt $x = ty$, phương trình (3) thành

$$y^2\left(16t^2 + 14t + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ t = -\dfrac{1}{2} \\ t = -\dfrac{3}{8} \end{array}\right.$$

+) Với $y = 0$, phương trình thay vào hệ đã cho

$$\begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Vô nghiệm.

+) Với $t = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}y$. Thay vào phương trình (2) ta được

$$y^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

+) Với $t = -\dfrac{3}{8}$, tức là $x = -\dfrac{3}{8}y$, $(2) \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{64}{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{8}{\sqrt{17}} \\ y = -\dfrac{8}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\dfrac{3}{\sqrt{17}} \\ y = \dfrac{8}{\sqrt{17}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{17}} \\ y = -\dfrac{8}{\sqrt{17}} \end{cases} \end{array}\right.$

Tóm lại, hệ có các nghiệm: $(1;-2),(-1;2),\left(-\frac{3}{\sqrt{17}};\frac{8}{\sqrt{17}}\right),\left(\frac{3}{\sqrt{17}};-\frac{8}{\sqrt{17}}\right)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases}(x-y)^2 y=2\\ x^3-y^3=19\end{cases}$$

(Đề thi Đại học Nông nghiệp I, khối A năm 2001)

Giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-y)^2 y=2 & (1)\\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=19 & (2)\end{cases}$$

Từ phương trình (1) suy ra $x-y\neq 0,\ y>0.$

Chia từng vế của phương trình (2) cho phương trình (1) ta được

$$\frac{x^2+xy+y^2}{xy-y^2}=\frac{19}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1}=\frac{19}{2}\quad (*)$$

Đặt $\frac{x}{y}=t,\quad (*)\Leftrightarrow \frac{t^2+t+1}{t-1}=\frac{19}{2}\Leftrightarrow 2\left(t^2+t+1\right)-19(t-1)=0$

$$\Leftrightarrow 2t^2-17t+21=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{3}{2}\\ t=7\end{array}\right.$$

+) Với $t=\frac{3}{2},\ x=\frac{3}{2}y$, thay vào phương trình (2) ta được

$$\left(\frac{3}{2}y\right)^3-y^3=19\Leftrightarrow \frac{19}{8}y^3=19\Leftrightarrow y=2\ \Rightarrow x=3.$$

+) Với $t=7\Leftrightarrow x=7y$, thay vào phương trình (1) được

$$(7y-y)^2 y=7\Leftrightarrow 36y^3=2\Leftrightarrow y^3=\frac{1}{18}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt[3]{18}}\Rightarrow x=\frac{7}{\sqrt[3]{18}}.$$

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có nghiệm $(3;2),\left(\frac{7}{\sqrt[3]{18}};\frac{1}{\sqrt[3]{18}}\right)$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+2xy-2y^2=0 & (1) \\ x|x|+y|y|=-2 & (2) \end{cases}$$

Giải. Vì $y=0$ không phải là nghiệm của hệ nên ta có thể đặt $x=ty$. Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$\left(t^2+2t-3\right)y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 1=3 \end{array}\right.$$

+) Với $t=1 \Rightarrow x=y \Rightarrow 2y|y|=-2 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow -1.$

+) Với $t=-3 \Rightarrow x=-3y \Rightarrow 8y|y|=2 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}.$

Tóm lại, hệ có các nghiệm $(-1;-1), \left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right).$

Ví dụ 4. Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} xy-y^2=12 & (1) \\ x^2-xy=26+m & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi ĐH Kinh tế TPHCM 2001)

Giải. Trừ từng vế hai phương trình ta được $(x-y)^2=14+m$ (3).

Mặt khác $xy-y^2=12 \Leftrightarrow y(x-y)=12 \Rightarrow y \neq 0, x \neq y.$

Cho nên từ (3) ta suy ra điều kiện cần để hệ có nghiệm là $14+m>0 \Leftrightarrow m>-14$.

Khi đó, $(3) \Leftrightarrow x-y=\pm\sqrt{14+m}$.

Từ (1) suy ra $y=\dfrac{12}{x-y}=\dfrac{12}{\pm\sqrt{14+m}}$

Hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x=\dfrac{12}{\pm\sqrt{14+m}} \pm \sqrt{14+m} \\ y=\dfrac{12}{\pm\sqrt{14+m}} \end{cases}$$

Vậy, với $m>-14$ thì hệ đã cho có nghiệm.

Nhận xét. Với bài này, ta hoàn toàn có thể giải bằng cách đặt $x=ty$ như đã nêu trên. Tuy nhiên, theo đặc điểm bài toán nên ta chọn cách trừ từng vế hai phương trình để lời giải hay và gọn hơn. Bởi vậy, khi đứng trước một bài toán cụ thể, mặc dù đã có đường hướng giải quyết vẫn nên tìm hiểu kỹ đề bài, xét yếu tố đặc biệt của bài toán chúng ta có thể "nhìn" ra cách giải tốt.

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = k & (1) \\ y^2 - 3xy = 4 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi k, hệ đã cho có nhgiệm.

Giải. $(2) \Leftrightarrow y(y-3x) = 4 \Rightarrow y \neq 0.$

Đặt $x = ty$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} (t^2 - 4t + 1)y^2 = k \\ (1-3t)y^2 = 4 \end{cases}$$

Chia từng vế hai phương trình ta được

$$\frac{t^2-4t+1}{1-3t} = \frac{k}{4} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2-4t+1}{1-3t}$. $f'(t) = \dfrac{-3t^2+2t-1}{(1-3t)^2} < 0 \ \forall t \neq \dfrac{1}{3}$

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(t) = \mp\infty, \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^{\pm}} f(t) = \mp\infty$, hàm số $f(t)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định nên đường thẳng $y = \dfrac{k}{4}$ luôn cắt đồ thị $f(t)$ tại hai điểm phân biệt $t_1, t_2 : t_1 < \dfrac{1}{3} < t_2$.

Khi đó, với $t = t_1$, $(2) \Leftrightarrow y^2(1-3t_1) = 4 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{1-3t_1}} \Rightarrow x = \pm\dfrac{2t_1}{\sqrt{1-3t_1}}$

Vậy hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Phần 2
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§ 1. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ.

Kỹ năng biến đổi đại số của học sinh được hình thành sớm và không ngừng được bồi đắp qua các năm học bởi sự quan trọng của nó đối với sự hình thành và phát triển năng lực giải toán. Trong chương trình toán học THPT, kỹ năng biến đổi đồng nhất càng được chú trọng. Kinh nghiệm cho chúng tôi thấy rằng, một học sinh được rèn luyện tốt kỹ năng này thì việc giải nhiều lớp bài toán sẽ thuận lợi hơn.

Nói riêng, với hệ phương trình, cách giải bằng phương pháp biến đổi đại số chiếm một vị trí quan trọng, bao gồm biến đổi tương đương, biến đổi đưa về hệ phương trình hay phương trình hệ quả; biến đổi thành tích, biến đổi căn thức,..

1. Biến đổi một phương trình.

Phương pháp chung: *- Biến đổi một phương trình thành tích hoặc thành phương trình đa thức sao cho có thể biểu diễn một ẩn theo các ẩn còn lại.*

- Thế vào các phương trình còn lại.

Nhận xét: *Dùng cách này khi thấy một phương trình có yếu tố thuận lợi để biến đổi, tính toán hoặc các phương trình trong hệ ít có mối liên hệ với nhau.*

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-6x^2y+9xy^2-4y^3=0 & (1)\\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2 & (2)\end{cases}$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} x\ge y\\ x\ge -y\end{cases} \Leftrightarrow x\ge |y|$

$(1)\Leftrightarrow (x-y)^2(x-4y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y\\ x=4y\end{array}\right.$

+) Với $x=y$, thay vào (2) ta được $x=y=2$.

+) Với $x=4y$, thay vào (2) ta được $x=32-8\sqrt{15}, y=8-2\sqrt{15}$.

Đối chiếu với điều kiện thấy hai nghiệm đều thoả mãn. Vậy hệ có các nghiệm $(2;2)$, $\left(32-8\sqrt{15};8-2\sqrt{15}\right)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2=(5x+4)(4-x) & (1)\\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0 & (2)\end{cases}$$

Giải. $(2)\Leftrightarrow y^2-(4x+8)y-5x^2+16x+16=0$.

Xem phương trình này như phương trình bậc hai, ẩn y, tham số x.

Ta có $\Delta'=(2x+4)^2+\left(5x^2-16x-16\right)=9x^2$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} y=5x+4 \\ y=-x+4 \end{array}\right.$

+) Với $y=5x+4$, thay vào (1) ta được :

$$(5x+4)^2=(5x+4)(4-x)\Leftrightarrow 6x(5x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=4 \\ x=-\dfrac{5}{4}\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

+) Với $y=-x+4$, thay vào (1) ta có

$$(-x+4)^2=(5x+4)(4-x)\Leftrightarrow 6x(4-x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=4 \\ x=4\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(0;4),(4;0),\left(-\dfrac{4}{5};0\right)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x & (1) \\ x\left(y^3-x^3\right)=7 & (2) \end{cases}$$

(HSG tỉnh Hưng Yên 2010).

$$(2)\Leftrightarrow\left(x^4-xy^3\right)+\left(x^3y-x^2y^2\right)-9(x-y)=0$$

Giải. $\Leftrightarrow(x-y)\left[x\left(x^2+xy+y^2\right)+x^2y-9\right]=0$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left[x(x+y)^2-9\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x(x+y)^2=9\ \ (3) \end{array}\right.$$

Từ phương trình (2) ta suy ra $x\neq y$ cho nên $(1)\Leftrightarrow(3)$.

Ta có $x\left(x^3-y^3\right)=7\Leftrightarrow y^3-x^3=\dfrac{7}{x}\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x^3+\dfrac{7}{x}}$

Thay vào (3) ta được $x\left(x+\sqrt[3]{x^3+\dfrac{7}{x}}\right)^2=9$. (4)

Ta chứng minh vế trái của (4) là hàm đồng biến. Thật vậy,

$$f(x)=x\left(x+\sqrt[3]{x^3+\frac{7}{x}}\right)^2=x^3+2x\sqrt[3]{x^6+7x^2}+\sqrt[3]{x\left(x^4+7\right)^2}$$

từ (4) suy ra $x>0,$ trong biểu thức $f(x)$, các luỹ thừa của x đều dương nên $f(x)$ đồng biến. Từ đó, (4) có nhiều nhất là một nghiệm. Lại thấy, $x=1$ là nghiệm nên đó là nghiệm duy nhất của (4), khi đó $y=2$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1;2)$.

Nhận xét. Có thể chứng minh $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ bằng đạo hàm.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{2y-x}+2^{y}=2^{x+1} & (1)\\ \log_5\left(x^2+3y+1\right)-\log_5 y=-2x^2+4y-1 & (2)\end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $y>0$.

Chia cả hai vế phương trình (1) cho $2^x>0$, ta có

$$2^{2(y-x)}+2^{y-x}=2 \Leftrightarrow 2^{2(y-x)}+2^{y-x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{y-x}=1\\ 2^{y-x}=-2\ (<0)\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow 2^{y-x}=0 \Leftrightarrow y=x.$$

Thay vào phương trình (2) ta được

$$\log_5\left(x^2+3x+1\right)-\log_5 x=-2x^2+4x-1$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=1-2\left(x-1\right)^2. \quad (3)$$

Do $x=y>0$ nên theo BĐT Cô sy ta có $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$, do đó $\log_5\left(x+\dfrac{1}{x}+3\right)\ge \log_5 5=1$. (4)

(3) và (4) cho ta: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{x}\\ \left(x-1\right)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$ (thoả mãn điều kiện $y>0$).

Vậy hệ có nghiệm $(1;1)$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{2}+2 & (1)\\ y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} & (2)\end{cases}$$

Giải. Điều kiện xác định: $x>0, y\ne 0.$

$(1)\Leftrightarrow y\sqrt{x}+y^2=2x\sqrt{x}+2xy \Leftrightarrow y^2+y\left(\sqrt{x}-2x\right)-2x\sqrt{x}=0$

Xem phương trình cuối là phương trình bậc hai ẩn y, x là tham số, ta có:

$$\Delta=\left(\sqrt{x}-2x\right)^2+8x\sqrt{x}=x+4x\sqrt{x}+4x^2=\left(\sqrt{x}+2x\right)^2>0$$

$$y_1=\frac{\left(\sqrt{x}-2x\right)-\left(\sqrt{x}+2x\right)}{2}=-\sqrt{x}$$

$$y_2=\frac{\left(\sqrt{x}-2x\right)+\left(\sqrt{x}+2x\right)}{2}=2x$$

Nếu $y=-\sqrt{x}$, thay vào phương trình (2) ta được:

$$-\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3}$$

Phương trình này vô nghiệm vì vế trái âm, vế phải dương.

Nếu $y=2x$, thay vào phương trình (2), ta có:

$$2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\left(2x-\sqrt{3}\right)=2x \quad (3)$$

Xét với $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, không thoả mãn (3).

Với $x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $(3)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}$ (4)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $\quad f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0\ \ \forall x>0$ nên hàm số đồng biến.

Lại xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}$, $g'(x)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\left(2x-\sqrt{3}\right)^2}<0$ nên hàm số ngịch biến.

Từ đó kết luận phương trình (4) có nhiều nhất một nghiệm. Mặt khác ta thấy $x=\sqrt{3}$ nghiệm đúng (4) nên đó là nghiệm duy nhất. Khi đó, $y=2\sqrt{3}$.

Vậy hệ có nghiệm $\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}y-\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}x=(y-x)\left(x^2-xy+y^2\right) & (1)\\ x^2+y^2=4 & (2)\end{cases}$$

Giải. Điều kiện $x>0, y>0$.

Ta có $x^2-xy+y^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2>0$ với mọi $x>0, y>0$.

Xét $x>y\Rightarrow\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}x>\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}y$. Khi đó vế trái (1) âm, vế phải (1) dương, (1) vô nghiệm.

Xét $x<y\Rightarrow\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}x<\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}y$ Khi đó vế trái (1) dương, vế phải (1) âm, (1) vô nghiệm.

Khi $x=y$, thay vào hệ ta có $\begin{cases}0=0\\ 2x^2=2y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\sqrt{2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Nhận xét. *Khi giải một phương trình rút, ra được một ẩn theo các ẩn còn lại làm cho việc giải hệ trở nên đơn giản hơn hẳn, thường là giảm đi một phương trình (và một ẩn). Tuy nhiên không phải lúc nào cũng thuận lợi như vậy. Đôi khi, việc biến đổi một phương trình của hệ không đi đến đích, hoặc giữa chừng, ta phát hiện mối liên hệ với phương trình còn lại, hoặc phương trình lại của hệ đang phức* *tạp, có cơ hội biến đổi để thuận lợi hơn cho việc kết hợp với phương trình thứ nhất, ta tiến hành biến đổi đồng thời các phương trình.*

Ví dụ 7 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+1+y(y+x)=4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2)=y & (2) \end{cases}$$

Giải.

+) Với $y=0$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2+1=0 \\ (x^2+1)(x-1)=0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

+) Với $y\neq 0$, chia hai vế của mỗi phương trình cho y ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+(y+x-2)=2 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(y+x-2)=1 \end{cases}$$

Khi đó, $\dfrac{x^2+1}{2}$, $y+x-2$ là các nghiệm của phương trình $t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1$.

Từ đó

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ y+x-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có các nghiệm là $(1;2),(-2;5)$.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6 & (1) \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 & (2) \end{cases}$$

Giải. Điều kiện

$$\begin{cases} -4<x<1, x\neq 0 \\ y>-2, y\neq 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(1-x)(y+2)+\log_{y+2}(x-1)^2 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+\log_{1-x}(y+2)+2\log_{y+2}|x-1|=6 \\ \log_{1-x}(y+5)+\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(2+y)+\log_{2+y}(1-x)=2 \\ \log_{1-x}(y+5)+\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}^2(2+y)-2\log_{1-x}(2+y)+1=0 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(2+y)=1 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ \log_{1-x}(4-x)-\log_{1-x}(x+4)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ \log_{1-x}\dfrac{4-x}{4+x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(-2;1)$.

2. Phương pháp cộng đại số, phép thế.

Chúng ta thực hiện cách này khi thấy các vế của các phương trình có mối liên hệ rõ ràng về hình thức, khiến cho việc thực hiện phép thế hay cộng đại số làm xuất hiện phương trình mới đơn giản hơn.

Phương pháp chung: - Giữ nguyên một phương trình của hệ.

- Cộng hay trừ từng vế của hai phương trình, hay thế một phương trình vào phương trình còn lại,.. để được phương trình mới.

- Giải hệ bao gồm phương trình được giữ lại và phương trình mới.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+5y=6 & (1) \\ x^2y^2+5x=6 & (2) \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển HSG Đồng nai 2010)

Giải. Trừ từng vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$x^4-x^2y^2+5(y-x)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left[x^2(x+y)-5\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2(x+y)=5 \end{array}\right.$$

+) $x=y$, thay vào phương trình (1) ta được

$$x^4+5x-6=0 \Leftrightarrow (x^2-x+3)(x+2)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Tương ứng, ta có $y=1$ hoặc $y=-2$.

+) $x^2(x+y)=5$, thay vào (1) ta được

$$x^4+5\left(\frac{5}{x^2}-x\right)=6 \Leftrightarrow x^6-5x^3-6x^2+25=0 \quad (3)$$

Từ phương trình (2) cho ta $5x=6-x^2y^2\le 6 \Rightarrow x\le \dfrac{6}{5}$.

Do đó: $5x^3+4x^2\le 5.\left(\frac{6}{5}\right)^3+6.\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{432}{25}<25$. Suy ra phương trình (3) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm: $(-2;-2),(-1;-1)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}4x^2+y^4-4xy^3=1 & (1)\\ 4x^2+2y^2-4xy=2 & (2)\end{cases}$$

(Đề thi HSG Lâm đồng 2010)

Giải.

Trừ từng vế (1) cho (2) ta được

$$y^4-2y^2-4xy^3+4xy+1=0\Leftrightarrow\left(y^2-1\right)^2-4xy\left(y^2-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-1\right)\left(y^2-1-4xy\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y^2-1=0\\ y^2-1+4xy=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-1\\ y^2-1+4xy=0\end{array}\right.$$

+) Nếu $y=1$, thay vào (1) ta được $4x^2+1-4x=1\Leftrightarrow x\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$

+) Nếu $y=-1$, thay vào (1) ta được $4x^2+1+4x=1\Leftrightarrow x\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$

+) Nếu $y^2-1+4xy=0\Leftrightarrow x=\frac{1-y^2}{4y}$, thay vào (1) ta có:

$$4\left(\frac{1-y^2}{4y}\right)+y^4-4\left(\frac{1-y^2}{4y}\right)y^3=1$$

$$\Leftrightarrow\left(1-y^2\right)^2+4y^4-4\left(1-y^2\right)=4$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-1\right)\left(5y^2+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-1\end{array}\right.\\ x=0\end{cases}$$

Tóm lại, hệ có nghiệm $(1;1),(0;1),(-1;-1),(0;-1)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{2x}+\sqrt{2y}=4\\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{2y+5}=6\end{cases}$$

(Đề thi HSG Bà rịa – Vũng tàu 2010)

Giải. Điều kiện $x\ge 0,\ y\ge 0$.

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}\right)+\left(\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}\right)=10$$

Trừ từng vế hai phương trình ta được

$$\left(\sqrt{2x+5}-2x\right)+\left(\sqrt{2y+5}-2y\right)=\frac{5}{\sqrt{2x+5}+2x}+\frac{2}{\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}}=2$$

Đặt $a=\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}>0,\ b=\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}>0$, ta có hệ

$$\begin{cases}a+b=10\\ \dfrac{5}{a}+\dfrac{5}{b}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=10-a\\ \dfrac{5}{a}+\dfrac{5}{10-a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=10-a\\ 50=20a-2a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\ b=5\end{cases}$$

$$a=5\Leftrightarrow\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}=5\Leftrightarrow\sqrt{2x+5}=5-\sqrt{2x}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x}\le 5\\ 2x+5=\left(5-\sqrt{2x}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x}\le 5\\ 2x+5=25-10\sqrt{2x}+2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x}\le 5\\ \sqrt{2x}=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Tương tự, $b=5$ cũng cho ta $y=2$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(2;2)$.

Nhận xét: Hệ phương trình trên còn có thể giải khá ngắn gọn bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3-y^3=35 & (1)\\ 2x^2+3y^2=4x-9 & (2)\end{cases}$$

Giải. (2) $\Leftrightarrow\left(6x^2-12x+8\right)+\left(9y^2+12y+27\right)=35$, thế vào phương trình (1) ta được

$$x^3-y^3=\left(6x^2-12x+8\right)+\left(9y^2+12y+27\right)$$

$$\Leftrightarrow(x-2)^3=(y+3)^3\Leftrightarrow x=y+5.$$

Thay vào (2) ta được

$$2(y+5)^2+3y^2=4(y+5)-9y\Leftrightarrow 5y^2+25y+30=0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(y+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\\ y=-3\end{array}\right.$$

Với $y=-2\Rightarrow x=3;\ y=-3\Rightarrow x=2.$

Vậy hệ có các nghiệm $(-2;3),(-3;2)$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=2\left(x^2+y^2\right)\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=y^2-x^2\end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x\ne 0, y\ne 0.$

Trừ từng vế phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta được

$$\frac{1}{y}=3x^2+y^2 \Leftrightarrow 1=3x^2y+y^3.$$

Cộng từng vế hai phương trình ta có

$$\frac{2}{x}=x^2+3y^2 \Leftrightarrow 2=x^3+3xy^2$$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases}2=x^3-3xy^2\\1=y^3+3x^2y\end{cases}$$

Lại cộng rồi trừ từng vế hai phương trình của hệ vừa thu được , ta có

$$\begin{cases}3=x^3+3xy^2+y^3+3yx^2\\1=x^3+3xy^2-y^3-3x^2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3=(x+y)^3\\1=(x-y)^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=\sqrt[3]{3}\\x-y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2}\\y=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2};\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right)$.

Nhận xét. Rõ ràng là ta thực hiện phép toán cộng, trừ từng vế khi phát hiện thấy nếu làm vậy trong các phương trình, một số hạng tử đồng dạng có thể giản ước được. Tuy nhiên, có những hệ phương trình, ta lại thực hiện việc nhân hay chia từng vế để thực hiện việc rút gọn.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2y\left(x^2-y^2\right)=3x & (1)\\x\left(x^2+y^2\right)=10y & (2)\end{cases}$$

Giải. Xét $x=0 \Rightarrow y=0$; ngược lại, $y=0 \Rightarrow x=0$. Vậy $(0;0)$ là một nghiệm của hệ.

Xét $x.y\neq 0$, cả hai vế của (2) khác không, chia từng vế của (1) cho (2) ta được

$$\frac{2y\left(x^2-y^2\right)}{x\left(x^2+y^2\right)}=\frac{3x}{10y} \Leftrightarrow 20y^2\left(x^2-y^2\right)=3x^2\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x^4-17x^2y^2+20y^4=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4y^2\right)\left(3x^2-5y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=4y^2\\x^2=\dfrac{5}{3}y^2\end{array}\right.$$

+) Với $x^2=4y^2$, hệ đã cho thành

$$\begin{cases}2y.3y^2=3x\\x.5y^2=10y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^3=x\\xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^3=x\\2y^4=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 2\\y=\pm 1\end{cases}$$

+) Với $x^2=\frac{5}{3}y^2$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases}2y.\frac{2}{3}y^2=3x\\ x\frac{8}{3}y^2=10y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2=9x\\ 4xy=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2=9x\\ 16y^2=135\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\pm\sqrt[4]{135}}{2}\\ x=\pm\frac{15}{2\sqrt[4]{135}}\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(0;0),(2;1),(-2;-1),\left(\frac{15}{\sqrt[4]{135}};\frac{\sqrt[5]{135}}{2}\right),\left(-\frac{15}{\sqrt[4]{135}};-\frac{\sqrt[5]{135}}{2}\right)$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x+3y=x^2-12 & (1)\\ -y+4z=y^2-6 & (2)\\ 9z+2x=z^2+32 & (3)\end{cases}$$

Giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}3y+6=x^3-x-6\\ 4z+16=y^3+y+10\\ 2x-4=z^3-9z+28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(y+2)=(x-2)(x^2+2x+3)\\ 4(z+4)=(y+2)(y^2-2y+5)\\ 2(x-2)=(z+4)(z^2-4z+7)\end{cases}$$

Nhân từng vế các phương trình của hệ vừa thu được ta có

$$24(x-2)(y+2)(z+4)=(x-2)(y+2)(z+4)(x^2+2x+3)(y^2-2y+5)(z^2-4z+7)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-2)(y+2)(z+4)=0\\ (x^2+2x+3)(y^2-2y+5)(z^2-4z+7)=24\end{array}\right.$$

+) $(x-2)(y+2)(z+4)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ y=-2\\ z=-4\end{array}\right.$$

Với $x=2$, thay vào (1) ta có $y=-2$, thay vào (2) có $z=-4$. Hệ có nghiệm $(2;-2;-4)$.

Tương tự, xét $y=-2, z=-4$, ta đều được nghiệm này.

+) Với $(x^2+2x+3)(y^2-2y+5)(z^2-4z+7)=24 \quad (4)$

Ta có $(x^2+2x+3)(y^2-2y+5)(z^2-4z+7)=\left[(x+1)^2+2\right]\left[(y-1)^2+4\right]\left[(z-1)^2+3\right]\geq 2.4.3=24$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=-1, y=1, z=2$. Vậy nên (4) có nghiệm duy nhất: $(-1;1;2)$.

Thử lại, ta thấy chỉ có nghiệm thứ nhất thoả mãn. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2;-2;-4)$.

Lưu ý: Nói chung, phép nhân từng vế các phương trình của hệ không phải là phép biến đổi tương đương. Do đó, thử lại nghiệm là công việc bắt buộc.

Cho rõ vấn đề này, ta xét hệ $\begin{cases}x-1=2(x-1)\\ y(x^2+y^2+2)=y\end{cases}$

Rõ ràng hệ chỉ có nghiệm $x=1, y=0$ nhưng nếu nhân từng vế hai phương trình ta được:

$$(x-1)y\left(x^2+y^2+2\right)=2(x-1)y \Leftrightarrow (x-1)y\left(x^2+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ x^2+y^2=0 \end{array}\right.$$

$x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ là nghiệm ngoại lai, xuất hiện trong phép nhân từng vế hai phương trình.

§ 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp đặt ẩn phụ được dùng và tỏ ra rất có hiệu lực trong nhiều nội dung của chương trình Đại số và Giải tích THPT. Việc phát hiện ẩn phụ, đặt ẩn phụ, xác định đúng điều kiện ẩn phụ đôi khi quyết định việc giải được hay không giải được, giải tốt hay không giải tốt bài toán.

Dạy giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ một mặt giúp các em tiến tới biết cách giải một lớp khá rộng rãi hệ phương trình mà những cách giải trên đây tỏ ra bất lực hoặc không hiệu quả. Quan trọng hơn, qua đó rèn luyện cho các em kỹ năng phát hiện ẩn phụ, đặt ẩn phụ - một yếu tố quan trọng cấu thành năng lực giải toán của học sinh.

Với những hệ phương trình không quá tầm thường có thể giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ, chúng ta thấy có thể chia thành hai loại. *Thứ nhất* là dễ phát hiện ẩn phụ, hệ phương trình mới thu được thường vẫn khó giải. *Thứ hai* là khó phát hiện ẩn phụ, loại này hoặc là hệ phương trình khó giải hoặc "cái khó" đặt ở tìm đặt ẩn phụ nên hệ mới thu được thường là hệ phương trình cơ bản hoặc có lời giải dễ hơn. Tuy sự phân chia này tuy chỉ có tính ước lệ song vẫn có tác dụng tốt đối với học sinh trong việc lĩnh hội tri thức phương pháp cũng như nâng cao khả năng phân tích, phát hiện, lựa chọn cách giải hệ phương trình sau này.

1. Bài toán dễ phát hiện ẩn phụ.

Đó là bài toán mà các đại lượng bên trong dễ "mã hoá" triệt để qua một hay một số ẩn số. Thông thường đó là tình huống đặt ẩn phụ để "bó" biểu thức rườm rà về một ẩn, đưa phân thức về đa thức, đưa căn thức về đa thức hay biểu thức chứa logarit, lượng giác về đa thức,..

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tp Hải phòng – bảng A 2010).

Giải. Điều kiện: $y \neq 0, x+\dfrac{1}{y} \geq 0, x+y \geq 3.$

Đặt $a=\sqrt{x+\frac{1}{y}},\ b=\sqrt{x+y-3},\ a\ge 0,b\ge 0$.

Hệ đã cho thành

$$\begin{cases}a+b=3\\a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2,b=1\\a=1,b=2\end{array}\right.$$

+) Với $a=2,\ b=1,$ ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x+\frac{1}{y}}=2\\\sqrt{x+y-3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{y}=4\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{4-x}=4\\y=4-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-8x+15=0,x\ne 4\\y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,y=1\\x=5,y=-1\end{array}\right.$$

+) Với $a=1,b=2$, ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x+\frac{1}{y}}=1\\\sqrt{x+y-3}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{y}=1\\x+y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{7-x}=1\\y=7-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-8x+6=0,x\ne 7\\y=7-x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4-\sqrt{10},\ y=3+\sqrt{10}\\x=4+\sqrt{10},y=3-\sqrt{10}\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy các nghiệm đều thoả mãn

Vậy hệ có các nghiệm $(3;1),(5;-1),\left(4-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right),\left(4+\sqrt{10};3-\sqrt{10}\right)$.

Nhận xét. Với các hệ phương trình chứa căn thức, nên xem xét khả năng đặt căn thức làm ẩn phụ.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}\\\sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3+\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9\end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x+y\ge 0,x-y\ge 0.$

Đặt $u=\sqrt{\frac{x+y}{2}},v=\sqrt{\frac{x-y}{2}},u\ge 0,v\ge 0.$ Ta suy ra $x=u^2+v^2,y=u^2-v^2.$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}\dfrac{2\left(u^2+v^2\right)\left(u^2-v^2\right)+\left(u^2-v^2\right)\sqrt{4u^2v^2}}{14}=u+v\\u^3+v^3=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)\left(u^3-v^3-7\right)=0\\ u^3+v^3=9\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u+v=0\\ u^3+v^3=9\end{cases}\\ \begin{cases}u^3-v^3=7\\ u^3+v^3=9\end{cases}\end{array}\right.$$

+) $\begin{cases}u+v=0\\ u^3+v^3=9\end{cases}$ Hệ này vô nghiệm.

+) $\begin{cases}u^3-v^3=7\\ u^3+v^3=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2u^3=16\\ 2v^3=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=2\\ \sqrt{\dfrac{x-y}{2}}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=8\\ x-y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=3\end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện thấy thoả mãn. Vậy hệ có nghiệm $(5;3)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{16}{3}\\ 2(x^2+y^2)+\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}=\dfrac{100}{9}\end{cases}$$

(Đề thi HSG lớp 11, Tỉnh Quảng Bình 2011)

Giải Điều kiện : $x \neq \pm y$

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}x+y+x-y+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{16}{3}\\ (x+y)^2+(x-y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}=\dfrac{100}{9}\end{cases}$$

Đặt $a=x+y+\dfrac{1}{x+y};b=x-y+\dfrac{1}{x-y}$ $\quad (|a|,|b|\geq 2)$

Ta có: $\begin{cases}a+b=\dfrac{16}{3}\\ a^2-2+b^2-2=\dfrac{100}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=\dfrac{10}{3}\end{cases} \vee \begin{cases}a=\dfrac{10}{3}\\ b=2\end{cases}$

Từ đó suy ra hệ phương trình có bốn nghiệm

$$(2;-1),\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),(2;1),\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3\sqrt{5-\log_3 y} = 5-\log_5 x \\ 3\sqrt{\log_5 x - 1} = \log_3 y - 1 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Hoà bình 2011-2012)

Giải. Điều kiện: $x \geq 5,\ 0 < y < 243$.

Đặt $a = \sqrt{\log_5 x - 1},\ b = \sqrt{5-\log_3 y};\ a \geq 0, b \geq 0.$

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 3b = 4 - a^2 & (1) \\ 3a = 4 - b^2 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình ta được

$$3(a-b) = b^2 - a^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = a \\ b = 3-a \end{array}\right.$$

+) Với $b = a$, thay vào phương trình (1) ta được $a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = 1$ (do điều kiện $a \geq 0$). Với $a = b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 81 \end{cases}$

+) Với $b = 3 - a$, thay vào (1) được $a^2 - 3a + 5 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(25;81)$.

Nhận xét. Trong bài toán này, chúng ta chọn căn thức chứa biểu thức logarit làm ẩn phụ. Trong ví dụ sau chúng ta chọn biểu thức hàm số mũ làm ẩn phụ.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{\log_3 xy} - 2 = 2^{\log_3 xy} \\ \log_4\left(4x^2 + 4y^2\right) = \dfrac{1}{2} + \log_4 x + \log_4 (x+3y) \end{cases}$$

Giải. Điều kiện $x > 0, y > 0.$

Đặt $t = 2^{\log_3 xy}$, $t > 0$, phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2 \text{ (do đk } t > 0\text{)}$$

$$t = 2 \Leftrightarrow 2^{\log_3 xy} = 2 \Leftrightarrow \log_3 xy = 1 \Leftrightarrow xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$\log_4\left(4x^2 + \frac{36}{x^2}\right) = \frac{1}{2} + \log_4 x + \log_4\left(x + \frac{9}{x}\right) \Leftrightarrow 4x^2 + \frac{36}{x^2} = 2x\left(x + \frac{9}{x}\right).$$

$$\Leftrightarrow x^4-9x^2+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=3 \\ x^2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \Rightarrow y=\sqrt{3} \\ x=\sqrt{6} \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{6};\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Nhận xét. Trong các ví dụ trên, chúng ta đặt hai ẩn phụ khiến cho hệ mới không còn ẩn cũ. Có những hệ phương trình, chỉ đặt một ẩn phụ, còn ẩn kia giữ nguyên. Hệ mới chứa cả ẩn mới lẫn cũ.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1}-y\left(1+2\sqrt{2x-1}\right)=-8 \\ y^2+y\sqrt{2x-1}+2x=13 \end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{2x-1},\ t\geq 0$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} t-y\left(1+2t\right)=-8 \\ y^2+yt+t^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-y-2yt=-8 & (1) \\ \left(t-y\right)^2+3yt=12 & (2) \end{cases}$$

(1) và (2) cho ta $2\left(t-y\right)^2+3\left(t-y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-y=0 \\ t-y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

+) Với $t=y$ ta có $t=y=2$, khi đó $\sqrt{2x-1}=2 \Leftrightarrow 2x-1=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

+) $y=t+\dfrac{3}{2},\ 4t^2+6t-13=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4}\ \ \left(t\geq 0\right)$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4} \\ \sqrt{2x-1}=\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4} \\ \sqrt{2x-1}=\dfrac{43-3\sqrt{61}}{16} \end{cases}$$

Vậy hệ có các nghiệm $\left(\dfrac{5}{3};2\right),\left(\dfrac{43-3\sqrt{61}}{16};\dfrac{3+\sqrt{61}}{4}\right)$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ 2x^4+8y^4-2x-y=0 \end{cases}$$

Giải. Đặt $t=2y$, hệ đã cho thành

$$\begin{cases} x^3+t^3-xt=1 \\ 4x^4+t^4-4x-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3-1=x\left(t^2-x^2\right) & (1) \\ 4x\left(x^3-t\right)+t\left(t^3-1\right)=0 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được phương trình

$$4x\left(x^3-1\right)+xt\left(t^2-x^2\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4\left(x^3-1\right)+t^3-tx^2=0 \ (3) \end{array}\right.$$

Nhận thấy $x=0$ không thoả mãn hệ nên chỉ xé phương trình (3).

$(3) \Leftrightarrow 4x^3+t^3-tx^2=4 \quad (4)$

Mặt khác, $(1) \Leftrightarrow 4x^3+4t^3-4xt^2=4 \quad (5)$.

(4) và (5) suy ra $3t^3-4xt^2+tx^2=0 \quad (6)$

Ta thấy $t=0$ không thoả mãn hệ.

Với $t \neq 0$, chia hai vế (6) cho t^3 ta được $\left(\frac{x}{t}\right)^2-4\frac{x}{t}+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{t}=1 \Leftrightarrow x=t \\ \frac{x}{t}=3 \Leftrightarrow x=3t \end{array}\right.$$

+) Với $x=t$, thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} x^3=1 \\ 5x^4-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Khi đó, $t=x=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$.

+) Với $x=3t$, thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} 27t^3+t^3-3t^3=1 \\ 324t^4+t^4-12t-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25t^3=1 \\ 325t^3=13 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt[3]{25}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$

Khi đó, $x=\frac{3\sqrt[3]{5}}{5}$, $y=\frac{\sqrt[3]{5}}{10}$

Vậy, hệ có các nghiệm $\left(1;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3\sqrt[3]{5}}{5};\frac{\sqrt[3]{5}}{10}\right)$.

2. Bài toán đặt ẩn phụ sau một vài bước biến đổi.

Khi thấy các biểu thức trong hệ phương trình có mối liên hệ đặc biệt về hình thức, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ. Tuy nhiên, mối liên hệ đó không phải lúc nào cũng rõ ràng, do đó cần có những bước biến đổi đẳng thức làm ẩn phụ xuất hiện. Cũng có những hệ phương trình khó giải, chúng ta buộc có những biến đổi làm thay đổi hình thức bài hình thức để tìm lời giải, có thể khi đó mới phát hiện ẩn phụ.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+1+y^2+xy=y \\ x+y-2=\dfrac{y}{1+x^2} \end{cases}$$

Giải. Ta thấy $y=0$ không thoả mãn hệ phương trình. Với $y \neq 0$, chia cả hai vế phương trình thứ nhất cho y, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4 \\ x+y-2=\dfrac{y}{1+x^2} \end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{x^2+1}{y},\ b=x+y$ hệ trở thành

$$\begin{cases} a+b=4 \\ b-2=\dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a+\dfrac{1}{a}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ (a-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=3-x \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(1;2), (-2;5)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=5 \\ (xy-1)^2=x^2-y^2+2 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Nghệ an 2012-2013)

Giải. Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$.

Ta có hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=5 \\ (x^2+1).(y^2-1)=2xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right).\left(y-\dfrac{1}{y}\right)=2 \end{cases} \quad (*), \quad \text{đặt} \begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y-\dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Hệ phương trình $(*)$ trở thành $\begin{cases} u^2+v^2=5 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=9 \\ uv=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} u+v=-3 \\ uv=2 \end{cases}$ (II)

Ta có: $(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$

$(\text{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-2 \\ v=-1 \end{cases}$

Vì $u=x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow |u| \geq 2$ nên chỉ có $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u=-2 \\ v=-1 \end{cases}$ thỏa mãn.

$\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y-\dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

$\begin{cases} u=-2 \\ v=-1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=-2 \\ y-\dfrac{1}{y}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm:

$$\left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(-1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x^4-\left(x^3-x\right)y^2-\left(y+12\right)x^2=-6 \\ 5x^4-\left(x^2-1\right)^2y^2-11x^2=-5 \end{cases}$$

Giải. Xét $x=0$ không thoả mãn hệ phương trình.

Với $x \neq 0$, chia hai vế của từng phương trình cho x^2 ta được

$$\begin{cases} 6x^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y-12=\dfrac{6}{x^2} \\ 5x^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2y^2-11=-\dfrac{5}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y-12=0 \\ 5\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2y^2-11=0 \end{cases}$$

Đặt $t=\dfrac{1}{x}-x \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$.

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 6\left(t^2+2\right)-ty^2-y-12=0 \\ 5\left(t^2+2\right)-t^2y^2-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t^2-t^2y^2-y=0 \\ 5t^2-t^2y^2-1=0 \end{cases}$$

Xét $t=0$ thấy không thoả mãn hệ

Với $t\neq 0$, chia hai vế của hệ cho t^2, ta được

$$\begin{cases} 6-\dfrac{y^2}{t}-\dfrac{y}{t^2}=0 \\ 5-y^2-\dfrac{1}{t^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{t^2}+\dfrac{y}{t^2}=0 \\ y^2+\dfrac{1}{t^2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{t}\left(y+\dfrac{1}{t}\right)=6 \\ \left(y+\dfrac{1}{t}\right)^2-2\dfrac{y}{t}=5 \end{cases}$$

Đặt $a=y+\dfrac{1}{t},\ b=\dfrac{y}{t}.$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} ab=6 \\ a^2-2b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\dfrac{a^2-5}{2}=6 \\ b=\dfrac{a^2-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3-5a-12=0 \\ b=\dfrac{a^2-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)\left(a^2+3a+4\right)=0 \\ b=\dfrac{a^2-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} y+\dfrac{1}{t}=3 \\ \dfrac{y}{t}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+\dfrac{1}{t}=3 \\ y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-3t+1=0 \\ y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ y=2t \end{cases}$$

+) Với $t=1$, ta có $y=2$ và $x-\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

+) Với $t=\dfrac{1}{2}$, ta có $y=1$ và $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Vậy hệ đã cho có các nghiệm là : $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};2\right),\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};2\right),\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};1\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};1\right)$.

Nhận xét. Trong ví dụ 3, ẩn phụ tương đối khó phát hiện. Tuy nhiên, ta dựa vào nét đặc biệt hiếm hoi là các bố trí hệ số $6x^4,-6;\ 5x^4,-5$ và các biểu thức chứa x: $x^3-x, x^2; \left(x^2-1\right)^2, x^2$ để nhận ra bước chia hai vế cho x^2 để đưa hệ đơn giản hơn với ẩn y và t.

Cách biến đổi tương đương rồi đặt ẩn phụ cũng hay gặp với hệ phương trình chứa biểu thức mũ và lôgarit. Khi phát hiện các biểu thức dưới lôgarit có những mối liên hệ "khả nghi", ta thực hiện đại số hoá rồi đặt ẩn phụ.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 5\log_{32}\left(\sqrt{x-y}+2\right) \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x+y \ge 0,\ x-y \ge 0$.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2+\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$$

Đặt $a=\sqrt{x+y},\ b=\sqrt{x-y},\ a\ge 0,\ b\ge 0$ ta suy ra $x=\dfrac{a^2+b^2}{2}, y=\dfrac{x^2-b^2}{2}$.

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} a=2+b \\ \sqrt{\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a^2-b^2}{2}\right)^2+1} - ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2+b \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^4+2b^4+4} - 2ab = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ \sqrt{2\left[(2ab+4)^2-2a^2b^2\right]+4} - 2ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab+4 \\ \sqrt{2\left[\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2\right]+4} - 2ab = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab+4 \\ \sqrt{2\left[(2ab+4)^2-2a^2b^2\right]+4} - 2ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab+4 \\ \sqrt{4a^2b^2-32ab+36} - 2ab = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab+4 \\ \sqrt{a^2b^2-8ab+9} = ab+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab+4 \\ a^2b^2-8ab+9 = a^2b^2+6ab+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab+4 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=4 \\ ab=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \qquad (do\, a\ge 0,\ b>0)$$

Khi đó

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}=0 \\ \sqrt{x-y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(2;-2)$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9^x - 4^y = 17 \\ \log_{17}\left(3^x + 2^y\right) - \log_5\left(3^x - 2^y\right) = 1 \end{cases}$$

Giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \left(3^x + 2^y\right)\left(3^x - 2^y\right) = 17 & (1) \\ \log_{17}\left(3^x + 2^y\right) - \log_5\left(3^x - 2^y\right) = 1 & (2) \end{cases}$$

Logarit hóa 2 vế của (1): $\log_{17}\left(3^x + 2^y\right) + \log_{17}\left(3^x - 2^y\right) = 1$

Biến đổi (2) về cùng cơ số 17:

$$\log_{17}\left(3^x + 2^y\right) - \log_5\left(3^x - 2^y\right) = 1 \Leftrightarrow \log_{17}\left(3^x + 2^y\right) - \frac{\log_{17}\left(3^x - 2^y\right)}{\log_{17} 5} = 1$$

Đặt $u = \log_{17}\left(3^x + 2^y\right)$; $v = \log_{17}\left(3^x - 2^y\right)$. Khi đó, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u + \dfrac{v}{\log_{17} 5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - v \\ \left(1 - \dfrac{1}{\log_{17} 5}\right) v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{17}\left(3^x - 2^y\right) = 0 \\ \log_{17}\left(3^x + 2^y\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ 3^x + 2^y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ 2^y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(2;3)$.

Nhận xét. Điểm đáng chú ý trong hệ này là cấu trúc biểu thức dưới lôgarit : $3^x - 2^y, 3^x + 2^y$. *Hai biểu thức này lại có mặt một cách thuận lợi trong phương trình còn lại. Việc biến đổi đưa hai lôgarit về cùng cơ số là tất yếu và không khó khăn gì và ẩn phụ chúng ta chọn cũng giống như nhận xét đã nói trên: đặt biểu thức chứa lôgarit làm ẩn phụ.*

Dưới đây, chúng ta xét vài ví dụ đặt ẩn phụ để giải phương trình bằng lượng giác hóa. Một phương pháp thú vị, tạo đột phá và được dùng khá nhiều trong toán học.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - 4^x}}{\log_y 3} + 2^x \sqrt{1 - \log^2{}_3 y} = 1 \\ \left(1 - \log_3 y\right)\left(1 + 2^x\right) = 2 \end{cases}$$

Giải. Điều kiện

$$\begin{cases} 0 < y \neq 1 \\ 2^x \leq 1 \\ |\log_3 x| \leq 1 \end{cases}$$

Đặt $2^x = \cos\alpha, \log_3 y = cos\beta, \alpha, \beta \in [0;\pi]$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{1-cos^2\alpha}.cos\beta + \sqrt{1-cos^2\beta}.cos\alpha = 1 \\ (1-cos\beta)(1+cos\alpha) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha.cos\beta + \sin\beta.cos\alpha = 1 \\ (1-cos\beta)(1+cos\alpha) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = 1 \\ (1-cos\beta)(1+cos\alpha) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ cos\alpha - cos\beta - cos\alpha.cos\beta - 1 = 0 \ (*) \end{cases}$$

Đặt $t = cos\alpha - cos\beta, t \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}] \Rightarrow cos\alpha.cos\beta = \dfrac{1-t^2}{2}$. Khi đó phương trình (*) thành

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1 \ (do\ t = -3 \notin [-\sqrt{2};\sqrt{2}]).$$

$$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Khi đó $\begin{cases} 2^x = 1 \\ \log_3 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ Không thoả mãn điều kiện ban đầu, vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Nhận xét. Ban đầu, dễ nghĩ ẩn phụ là $2^x = u, \log_3 y = v$, *phương trình thứ nhất chứa* $\sqrt{1-u^2}, \sqrt{1-v^2}$. *Rõ ràng hai căn thức trên chứa* ***dấu hiệu lượng giác hoá*** *và cách đặt ẩn phụ trong lời giải trên xuất hiện. Ngoài ra, dấu hiệu đặt sin, cosin còn thấy ngay trong điều kiện xác định của hệ.*

Chúng ta nghĩ đến khả năng lượng giác hoá khi các biểu thức của hệ có dạng (hoặccó thể đưa về dạng) một vế của hằng đẳng thức lượng giác như $1-u^2, 1+u^2, \dfrac{u+v}{1-uv}, ..$

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1 \ (1) \\ y = 2z^2 - 1 \ (2) \\ z = 2x^2 - 1 \ (3) \end{cases}$$

Giải. Không mất tính tổng quát nếu giả sử x là số lớn nhất trong ba số x, y, z.

Khi đó $(3) \Rightarrow 2x^2 - 1 = z \le x \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \le x \le 1$

$$\text{Đặt } x = \cos t, \left(t \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]\right).(3) \Leftrightarrow z = 2\cos^2 t - 1 = 2\cos t,$$

$$(2) \Leftrightarrow y = 2\cos^2(2t) - 1 = \cos 4t, (1) \Leftrightarrow 2\cos^2(4t) - 1 = \cos 8t$$

Từ đó ta có $\cos t = \cos 8t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2k\pi}{7} \\ t = \dfrac{2k\pi}{9} \end{array}\right.$

Do điều kiện $t \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ nên ta có $t \in \{0, \dfrac{2\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}\}$

Vậy, hệ có các nghiệm

$(1;1;1), \left(\cos\dfrac{2\pi}{9}; \cos\dfrac{4\pi}{9}; \cos\dfrac{8\pi}{3}\right), \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right), \left(\cos\dfrac{2\pi}{7}; \cos\dfrac{4\pi}{7}; \cos\dfrac{8\pi}{7}\right)$ và các hoán vị của chúng.

Nhận xét. Bài này dấu hiệu lượng giác ta nhận ra là nhờ cấu trúc $2x^2 - 1$ *tương ứng với công thức* $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

§3 PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

I. Cơ sở lý thuyết.

Chúng ta dựa vào những kết luận sau đây.

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn luôn đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến trên khoảng K thì ta có:

a. $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v,\ \forall u, v \in K$.

b. Phương trình $f(x) = m$ có nhiều nhất một nghiệm trên K.

2. Nếu $f(x)$ là hàm số đồng biến và $g(x)$ là hàm số nghịch biến trên tập D thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên D.

3. Nếu $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm đến cấp n và $f^{(k)}(x) = 0$ có m nghiệm thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất $m+1$ nghiệm. Ở đây, $k \le n$.

II. Một số phương pháp giải thường dùng.

1. Biến đổi một phương trình về dạng $f(u) = f(v)$.

Có thể khẳng định, với các loại hệ phương trình giải bằng phương pháp xét chiều biến thiên hàm số thì tần suất xuất hiện của loại hệ này trong đề các đề thi học sinh giỏi, đề thi đại học là cao nhất.

Phương pháp: *- Biến đổi một phương trình về dạng $f(u) = f(v)$*

- Chứng minh $f(t)$ là hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên miền xác định của của nó, từ đó đi đến kết luận $u = v$.

- Thế $u = v$ vào phương trình còn lại.

Tuy nhiên, cũng cần lưu ý cho học sinh là hàm số $f(t)$ không phải bào giờ cũng là lựa chọn duy nhất, do đó phải chọn hàm số thế nào để việc xét chiều biến thiên đơn giản và những bước giải sau phép thế có thể thực hiện được.

Ngoài ra, việc chọn hàm số $f(t)$ nói trên không phải lúc nào cũng thuận lợi mà có thể trước đó phải thực hiện những bước biến đổi.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Nghệ an 2010-2011)

Giải. Điều kiện

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y^3 + y = (x+1)^3 + (x+1) \ (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, t\in R,$ ta có . Do đó $f(t)$ luôn luôn đồng biến . Phương trình (*) tương đương với $f(y)=f(x+1)\Leftrightarrow y=x+1$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x+1}=\sqrt{1-x}-1\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$ (**).

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>0 \Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-2}{2}$

$$(**)\Leftrightarrow\frac{t^2-2}{2}=t-1\Leftrightarrow t^2-2t=0\Leftrightarrow t=2$$

Khi đó, $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=2 \Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Với $x=1$ ta có $y=2$, $x=-1$, ta có $y=0$.

Vậy hệ có các nghiệm $(1;2),(-1;0)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 & (1)\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 & (2)\end{cases}$$

Giải. Điều kiện $6x-2xy+1\ge 0$ $(*)$

$$(1)\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+y^2} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$, $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>\dfrac{|t|-t}{\sqrt{1+t^2}}\ge 0$

Hàm số $f(t)$ luôn luôn đồng biến.

Khi đó $(3)\Leftrightarrow f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$, thế vào phương trình (2) ta được

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right.$$

+) $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x \Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+6x+1=9x^2\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=-1$

+) $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+6x+1=4x^2\\x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$

Đối chiếu (*) ta có các nghiệm của hệ là $(1;-1),\left(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Nhận xét. Hai ví dụ trên là hai hệ phương trình đại số mẫu mực với phương pháp giải đang xét, từ việc chọn hàm số $f(t)$ đến biến đổi sau khi thực hiện phép thế đưa về phương trình một ẩn. Ví dụ sau đây, hàm số việc xây dựng hàm số $f(t)$ phức tạp hơn.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x-1}+4(2x+1)=\sqrt{y-1}+3y & (1) \\ (x+y)(2x-y)+4=-6x-3y & (2) \end{cases}$$

Giải . Điều kiện : $x \geq \dfrac{1}{3}, y \geq 1 \ (*)$

$$(2) \Leftrightarrow (x+y)(2x-y)+4=-4(x+y)-(2x-y) \Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ 2x-y+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=2x+4 \ \ (do\, x+y+1 \geq \frac{7}{3}>0)$$

Thay vào phương trình (1) ta được

$$\sqrt{3x-1}+2x-8=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}+2(3x-1)=\sqrt{2x+3}+2(2x+3) \ \ (3)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^2+t, \ t \geq 0. \ f'(t)=4t+1>0$ Hàm số luôn luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.
Phương trình (3) viết thành

$$f\left(\sqrt{3x+1}\right)=f\left(\sqrt{2x+3}\right) \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=12$$

Vậy hệ có nghiệm $(4;12)$.

*Nhận xét. Thoạt tiên, nhiều người nhiều người nghĩ đến việc xây dựng hàm số $f(t)$ từ phương trình thứ nhất bởi **hình thức** của nó. Thực tế chưa thể lầm được như vậy. Chúng ta thực hiện biến đổi thành tích phương trình thứ hai, thế vào phương trình thứ nhất, cuối cùng hàm số $f(t)$ được xây dựng để giải phương trình một ẩn số.*

Tiếp theo, ta xét cách sử dụng phương pháp này để giải hệ phương trình chứa mũ và logarit.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{2x-y}-2^{x+y}=(x+y)\sqrt{x+y}-(2x-y)\sqrt{2x-y} & (1) \\ \sqrt[3]{y}-2(x-1)^3+1=0 & (2) \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Thanh Hoá 2011-2012)

Giải. Điều kiện: $x+y \geq 0, \ 2x-y \geq 0 \ (*)$

$$(1) \Leftrightarrow 2^{2x-y}+(2x-y)\sqrt{2x-y}=2^{x+y}+(x+y)\sqrt{x+y} \ \ (3)$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t\sqrt{t}, \ t \geq 0. \ f'(t)=2^t\ln 2+\dfrac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}>0 \ \forall t \geq 0$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(2x-y)=f(x+y) \Leftrightarrow x=2y$

Thế vào phương trình (2) ta được

$$\sqrt[3]{y}+1=2(2y-1)^3 \ \ (4)$$

Đặt $\sqrt[3]{y} = 2t - 1$, (4) trở thành hệ

$$\begin{cases} t = (2y-1)^3 \\ y = (2t-1)^3 \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$(t-y)\left[2(2y-1)^2 + 2(2y-1)(2t-1) + 2(2t-1)^2 + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow t = y \text{ vì } 2(2y-1)^2 + 2(2y-1)(2t-1) + 2(2t-1)^2 + 1 > 0 \ \forall t, y.$$

Thế trở lại hệ ta được

$$y = (2y-1)^3 \Leftrightarrow 8y^3 - 12y^2 + 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(8y^2 - 4y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

Với $y = 1 \Rightarrow x = 2$, thoả mãn (*). Vậy hệ có nghiệm $(2;1)$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{y^2 - x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} & (1) \\ 3\log_2(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 & (2) \end{cases}$$

Giải. Điều kiện

$$\begin{cases} x + 2y + 6 > 0 \\ x + y + 2 > 0 \end{cases} (*)$$

$$(1) \Leftrightarrow e^{x^2}(x^2+1) = e^{y^2}(y^2+1) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t(t+1),\ t \ge 0.$ $f'(t) = e^t(t+1) + e^t = e^t(t+2) > 0 \ \forall t \ge 0$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Phương trình (3) tương đương với

$$f(x^2) = f(y^2) \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2(x+2y+6)^3 = \log_2\left[2(x+y+2)^2\right] \Leftrightarrow (x+2y+6)^3 = 2(x+y+2)^2 \quad (4)$$

+) $x = y$ thay vào (4) được $(3x+6)^3 = 2(2x+2)^2$

Theo điều kiện ban đầu ta có $2x + 2 > 0 \Rightarrow 2x + 4 > 2x + 2 > 0.$

Ta có $(3x+6)^3 - 2(2x+4)^2 = (x+2)^2(27x+46) > 0 \Rightarrow (3x+6)^3 > 2(2x+2)^2 > 0$

Phương trình vô nghiệm.

+) $x = -y$ thay vào phương trình (4) ta được

$$(-x+6)^3 = 2.2^2 \Leftrightarrow (6-x)^3 = 8 \Leftrightarrow 6 - x = 2 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = -4, \text{ thoả mãn (*)}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(4;-4)$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+x+\log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)=8y^3+2y+1 & (1)\\ y^2-xy+\dfrac{1}{4}=0 & (2)\\ x>0, y>0 \end{cases}$$

(Đề HSG tỉnh An giang 2008-2009)

Giải.

$(1)\Leftrightarrow x^3+x+\log_2 x=8y^3+2y+\log_2 y$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+\log_2 t,\ t>0.$

$$f'(t)=3t^2+1+\frac{1}{t\ln 2}>0\ \ \forall t>0$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x)=f(2y)\Leftrightarrow x=2y$

Thế vào phương trình (2) ta được

$$y^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ \ (do\ y>0)$$

$$\Rightarrow x=1$$

Vậy hệ có nghiệm $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Nhận xét. Qua các ví dụ đã nêu, chúng ta thấy khả năng nhận biết hàm số đơn điệu đặc trưng $f(t)$ hết sức quan trọng. Ngoài ra, phải có kỹ năng biến đổi đồng nhất để biến đổi phương trình đi đến xây dựng hàm số đặc trương cũng như để giải phương trình một ẩn sau khi thực hiện phép thế.

Chúng ta kết thúc mục này bằng một hệ chứa tham số.

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} x^3-12x-y^3+6y^2-16=0 & (1)\\ 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4y-y^2}+m=0 & (2)\end{cases}$$

Giải. Điều kiện

$$\begin{cases} -2\le x\le 2\\ 0\le y\le 4\end{cases}\ (*)$$

$(1)\Leftrightarrow x^3-12x=(y-2)^3-12(y-2)$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t,\ \ t\in[-1;2]$. Ta có $f'(t)=3t^2-12=3(t^2-4)<0\ \forall t\in(-2;2)$.

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[-2;2]$. Từ (*) ta thấy $y-2\in[-2;2]$.

Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x)=f(y-2)\Leftrightarrow x=y-2$.

Thay vào phương trình (2) ta được

$$3\sqrt{4-x^2}-4x^2=m \quad (4)$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (4) có nghiệm trong $[-2;2]$.

Xét hàm số $g(x)=3\sqrt{4-x^2}-4x^2$, $x\in[-2;2]$. $g'(x)=\dfrac{-3x}{\sqrt{4-x^2}}-8x=-x\left(\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}}+8\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=0.$

$g(0)=6,\ \ g(-2)=g(2)=-16 \Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x)=-16,\ \ \max\limits_{[-2;2]} g(x)=6$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-16\le m\le 6$.

2. Dự đoán tập nghiệm, chứng minh không còn nghiệm khác nữa.

Phương pháp: - *Đưa hệ về phương trình một ẩn dạng* $f(x)=0$.

- *Chỉ ra phương trình* $f'(x)=0$ *có k nghiệm, chứng tỏ* $f(x)=0$ *có nhiều nhất* $k+1$ *nghiệm.*
- *Liệt kê* $k+1$ *nghiệm của* $f(x)=0$ *và khẳng định đó là tập nghiệm phương trình. Từ đó suy ra tập nghiệm của hệ .*

Đúng ra, đây là một phương pháp giải phương trình một ẩn số, chúng tôi trình bày ở đây vì nó được sử dụng khá nhiều trong việc giải hệ phương trình.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y-x+1+\sqrt{2}=\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x} & (1)\\ 2x^3-y^3+x^2y^2=2xy-3x^2+3y & (2)\end{cases}$$

(Đề thi chọn HSG tỉnh Quảng Ngãi)

Giải. Điều kiện $-1\le x\le 2$. (*)

$(2)\Leftrightarrow 2x(x^2-y)+y^2(x^2-y)+3(x^2-y)=0 \Leftrightarrow (2x+y^2+3)(x^2-y)=0$

$\Leftrightarrow x^2-y=0\Leftrightarrow y=x^2$ (do điều kiện (*) suy ra $2x+y^2+3>0$)

Thay vào (1) có $x^2-x-\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}+1+\sqrt{2}=0 \quad (3)$

$$f(x)=x^2-x-\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}+1+\sqrt{2},\ x\in[-1;2]$$

$$f'(x)=2x-1-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}.$$

$$f''(x)=2+\frac{1}{4(x+1)\sqrt{1+x}}+\frac{1}{4(2-x)\sqrt{2-x}}>0\ \forall x\in(-1;2).$$

Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $(-1;2)$ và phương trình $f'(x)=0$ có không quá một nghiệm. Mặt khác $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ nên $f'(x)=0$ có một nghiệm. Từ đó phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Mặt khác, ta có $f(0)=f(1)=0$ nên phương trình (3) có hai nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

$x=1 \Rightarrow y=1;\ x=0 \Rightarrow y=0$

Vậy hệ có nghiệm $(0;0),(1;1)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+2=3\sqrt{x+y} \\ \log_{x+y}\left[4(x-y)\right]=x-y \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Thanh Hoá 2009-2010)

Giải. Điều kiện

$$\begin{cases} x+y>0 \\ x+y\neq 1 \\ x-y>0 \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x+y}\right)^2-3\sqrt{x+y}+2=0 \\ \log_{x+y}\left[4(x-y)\right]=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=2 \end{array}\right. \\ \log_{x+y}\left[4(x-y)\right]=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 & (1) \\ 4(x-y)=4^{x-y} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 4(x-y)=4^{x-y} \Leftrightarrow 4(x-y)-4^{x-y}=0 \quad (3)$$

Đặt $x-y=t>0$, phương trình (3) thành $4t-4^t=0 \ (4)$

Xét hàm số $f(t)=4t-4^t,\ t>0$,

$$f'(t)=4-4^t\ln 4. \quad f'(t)=0 \Leftrightarrow 4-4^t\ln 4=0 \Leftrightarrow t=\log_4\frac{4}{\ln 4}>0$$

Vậy phương trình $f'(t)=0$ có nghiệm duy nhất suy ra phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm, tức (4) không quá hai nghiệm.

Lại thấy $f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ nên (4) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ 1=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

+) $t=1$ kết hợp (1) ta có $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

+) $t=0$ ta có $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{4} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm là $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} e^x+\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}=2013 \\ e^y+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2013 \end{cases}$$

luôn có hai nghiệm phân biệt $x,\ y$ thoả mãn $x>1,\ y>1$

Giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} e^x=2013-\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} & (1) \\ e^x-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=e^y-\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} & (2) \end{cases}$$

Xét hàm số

$$f(t)=e^t-\frac{t}{\sqrt{t^2-1}},\ t>1.$$

$$f'(t)=e^t+\frac{1}{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}}>0\quad \forall t>1$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

$(2)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Phương trình (1) thành $e^x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2013$ (3)

Xét hàm số $g(x)=e^x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-2013,\ x\in(1;+\infty)$.

$$g'(x)=e^x-\frac{1}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}};\ g''(x)=e^x+\frac{3x}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^5}}>0\ \forall x>1.$$

Ta có $\lim_{x\to 1^+} g'(x) = -\infty, \lim_{x\to +\infty} g'(x) = +\infty$, ngoài ra $g'(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$ nên có đúng một nghiệm x_0 trên khoảng này. Từ đó ta kết luận phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên $(1;+\infty)$.

Rõ ràng $g(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$,

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty,\ g(2) = e^2 - 2011 < 0,\ \lim_{x\to +\infty} g'(x) = +\infty$$

Nên phương trình (3) có nghiệm thuộc $(1;2)$ và có nghiệm thuộc $(2;+\infty)$. Nghĩa là (3) có ít nhất hai nghiệm trên $(1;+\infty)$.

Từ đó ta kết luận phương trình có (3) có đúng hai nghiệm và do đó hệ có đúng hai nghiệm.