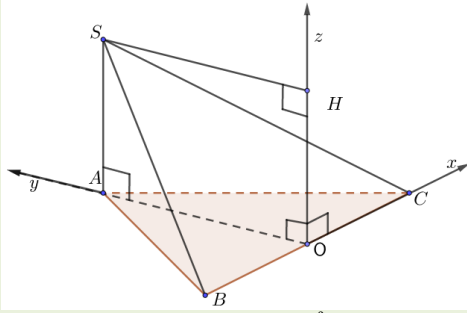


BÀI TOÁN 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC OXYZ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Gắn tọa độ đối với hình chóp

1.1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

Đáy là tam giác đều



☞ Gọi O là trung điểm BC .

Chọn hệ trục như hình vẽ,

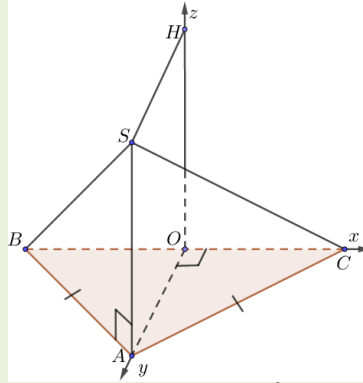
$$AB = a = 1.$$

☞ Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right),$$

$$C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; H\right).$$

Đáy là tam giác cân tại A



☞ Gọi O là trung điểm BC .

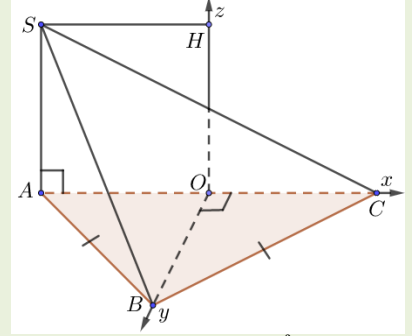
Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

☞ Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A(0;OA;0), B(-OB;0;0),$$

$$C(OC;0;0), S\left(0;OA;H\right).$$

Đáy là tam giác cân tại B



☞ Gọi O là trung điểm AC .

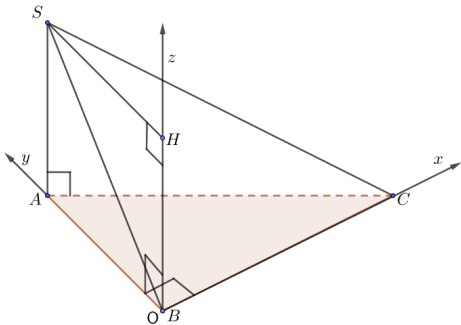
Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

☞ Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,

$$A(-OA;0;0), B(0;OB;0),$$

$$C(OC;0;0), S\left(-OA;0;H\right).$$

Đáy là tam giác vuông tại B



☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

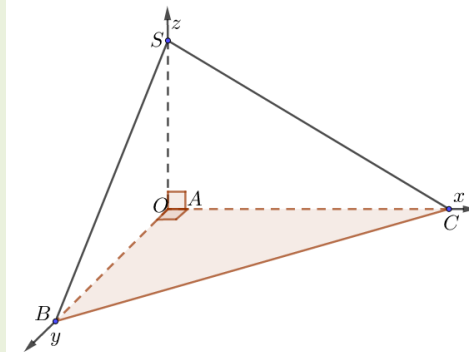
☞ Tọa độ các điểm:

$$B \equiv O(0;0;0),$$

$$A(0;AB;0), C(BC;0;0),$$

$$S\left(0;AB;H\right).$$

Đáy là tam giác vuông tại A



☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

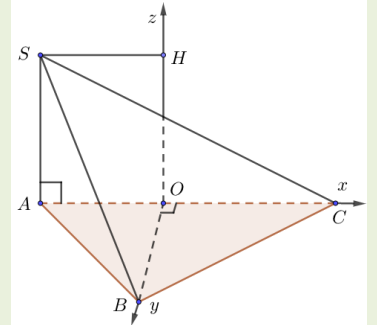
☞ Tọa độ các điểm:

$$A \equiv O(0;0;0)$$

$$B(0;OB;0), C(AC;0;0),$$

$$S(0;0;SA)$$

Đáy là tam giác thường



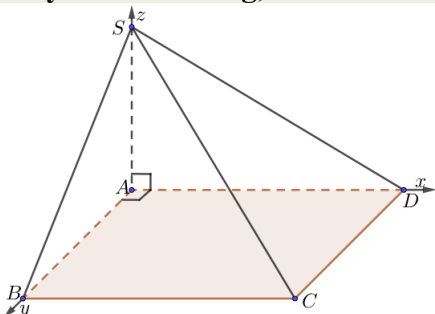
☞ Dựng đường cao BO của $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

☞ Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,

$$A(-OA;0;0), B(0;OB;0),$$

$$C(OC;0;0), S\left(-OA;0;H\right).$$

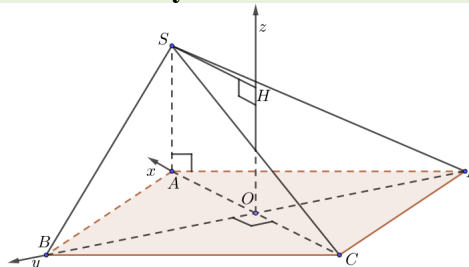
Đáy là hình vuông, hình chữ nhật



☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

Đáy là hình thoi

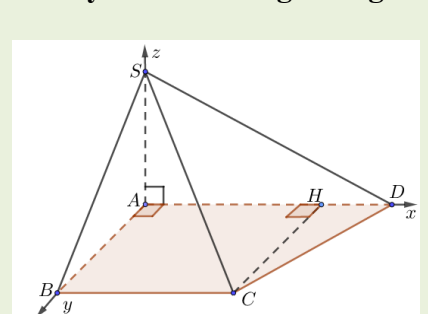


☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

☞ Tọa độ $O(0;0;0)$,

Đáy là hình thang vuông



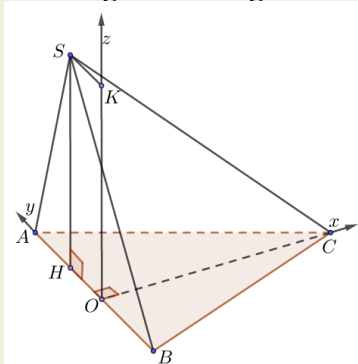
☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$	$A(OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$ $D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;\frac{OH}{SA}\right)$	Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.
---	---	--

1.2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

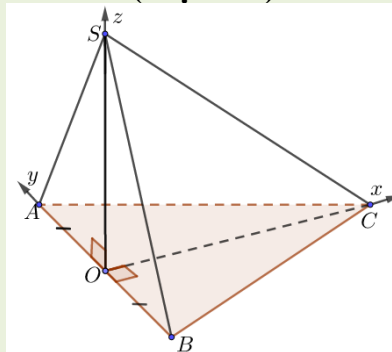
Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



Vẽ đường cao CO trong $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,
 $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OH;\frac{OK}{SH}\right)$

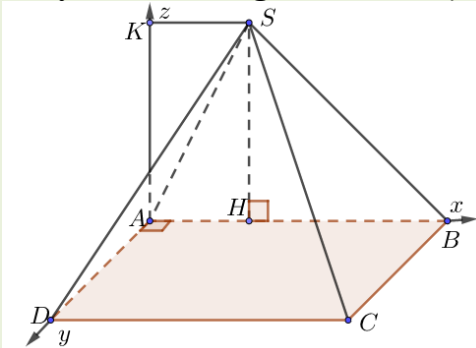
Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, $a = 1$.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,
 $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật



Dựng hệ trục như hình, chọn $a = 1$.

Ta có: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(AB;0;0)$,
 $C(AB;AD;0)$, $D(0;AD;0)$, $S\left(AH;0;\frac{AK}{SH}\right)$

1.3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và $a = 1$. Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0;\frac{AB\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(-\frac{BC}{2};0;0\right),$$

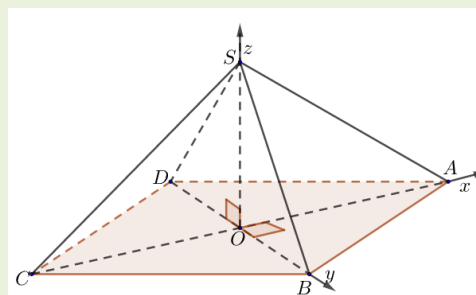
Hình chóp tứ giác đều

Chọn hệ trục như hình với $a = 1$. Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$,

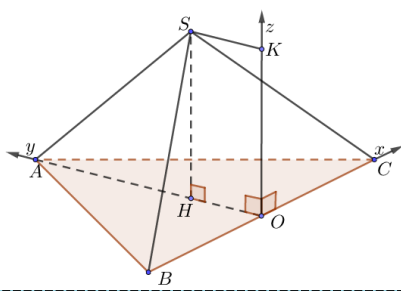
$$A\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right),$$

$$B\left(0;\frac{AB\sqrt{2}}{2};0\right),$$

$$C\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right),$$



$$D\left(0;-\frac{AB\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;SO)$$



$$C\left(\frac{BC}{2}; 0; 0\right),$$

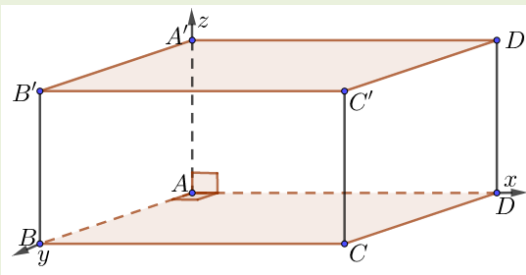
$$S\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{6}; SH\right)$$

2. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

2.1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật

Dựng hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm:



$$A \equiv O(0; 0; 0),$$

$$B(0; AB; 0),$$

$$C(AD; AB; 0),$$

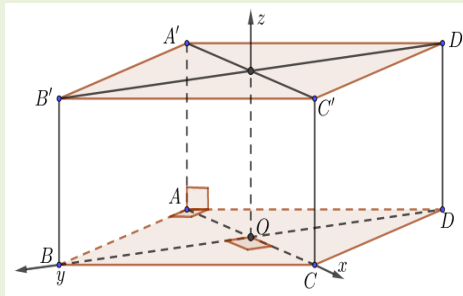
$$D(AD; 0; 0),$$

$$A'(0; 0; AA'),$$

$$B'(0; AB; AA'), C'(AD; AB; AA'), D'(AD; 0; AA').$$

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình với



$$O(0; 0; 0),$$

$$A(-OA; 0; 0),$$

$$B(0; OB; 0),$$

$$C(OC; 0; 0),$$

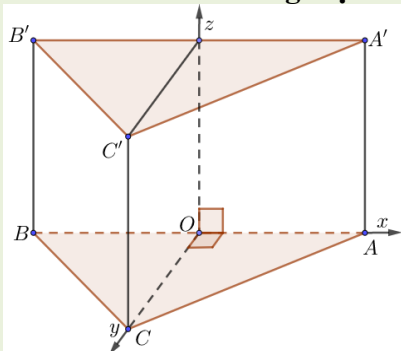
$$D(0; -OD; 0),$$

$$A'(-OA; 0; AA'), B'(0; OB; AA'), C'(OC; 0; CC'),$$

$$D'(0; -OD; DD').$$

Lăng trụ tam giác đều

Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:



$$O(0; 0; 0), A\left(\frac{AB}{2}; 0; 0\right),$$

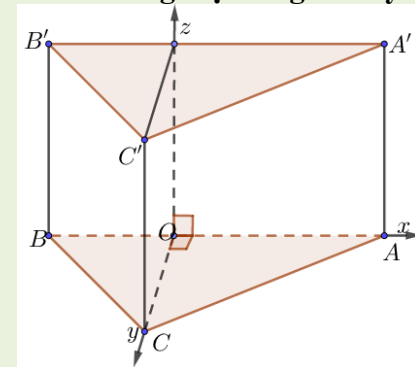
$$B\left(-\frac{AB}{2}; 0; 0\right), C(0; OC; 0),$$

$$A'(OA; 0; AA'),$$

$$B'\left(-\frac{AB}{2}; 0; BB'\right), C'(0; OC; CC').$$

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm là:



$$O(0; 0; 0), A(OA; 0; 0),$$

$$B(-OB; 0; 0),$$

$$C(0; OC; 0),$$

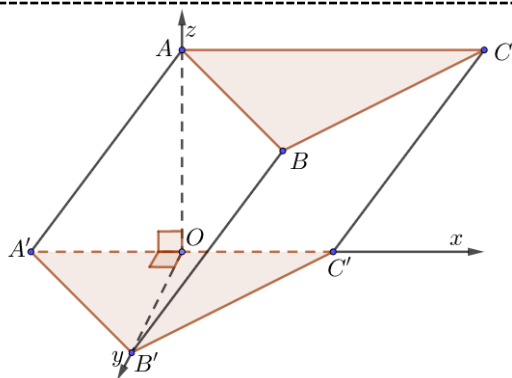
$$A'(OA; 0; AA'),$$

$$B'(-OB; 0; BB'), C'(0; OC; CC').$$

2.2. Lăng trụ nghiêng:

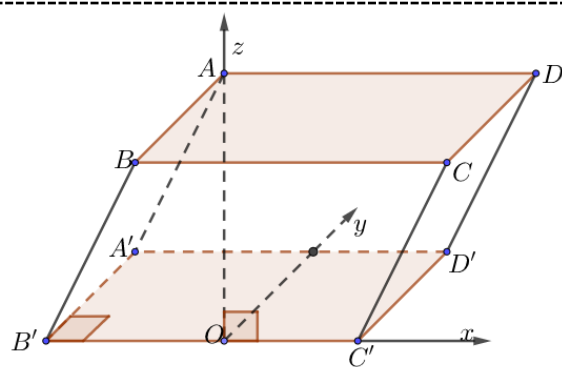
Lăng trụ nghiêng có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy

Lăng trụ nghiêng có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



Đặt hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A .

Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'}$.

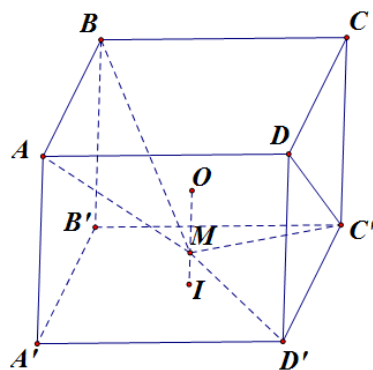


Đặt hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A .

Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'} = \vec{DD'}$.

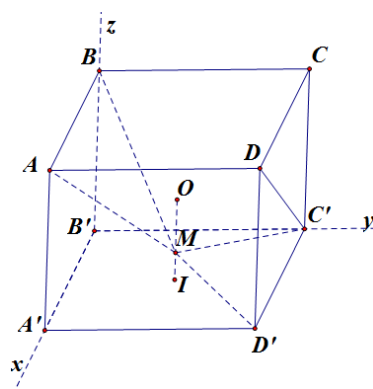
Dạng 1. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm GÓC

Câu 1. (Mã 103 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 0,65



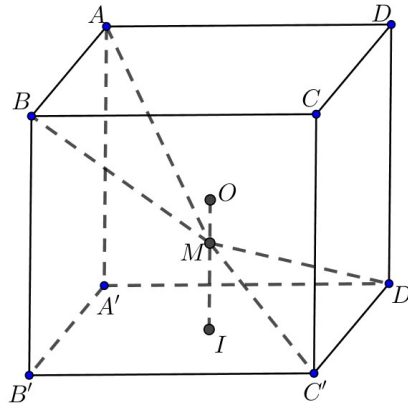
Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, cạnh hình lập phương là 1, ta được tọa độ các điểm như sau :

$$M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right), C'(0;1;0), D'(1;1;0) \text{ và } A(1;0;1), B(0;0;1).$$

Khi đó $n_{(MC'D')} = (0; 1; 3); n_{(MAB)} = (0; 5; 3)$ nên $\cos((MAB), (MC'D')) = \frac{|5 \cdot 1 + 3 \cdot 3|}{\sqrt{5^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}$

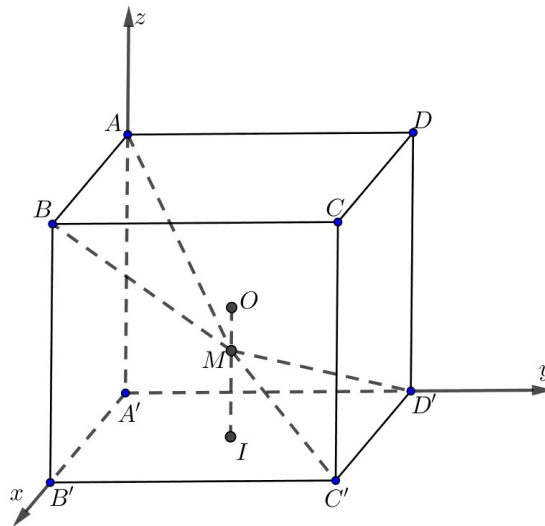
Suy ra $\sin((MAB), (MC'D')) = \sqrt{1 - \left(\frac{7\sqrt{85}}{85}\right)^2} = \frac{6\sqrt{85}}{85} \approx 0,65$.

Câu 2. (Mã 102 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 0,94



Không mất tính tổng quát ta đặt cạnh của khối lập phương là 1.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A'(0;0;0)$, $B'(1;0;0)$, $D'(0;1;0)$ và $A(0;0;1)$ (như hình vẽ).

Khi đó ta có: $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

Suy ra: $\vec{AB} = (1; 0; 0), \vec{MA} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{MA}] = \left(0; -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}_1 = (0; -4; 3)$ là VTPT của mặt phẳng (MAB) .

$\vec{D'C'} = (1; 0; 0), \vec{MD'} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow [\vec{D'C'}, \vec{MD'}] = \left(0; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}_2 = (0; 2; -3)$ là VTPT của mặt phẳng $(MC'D')$.

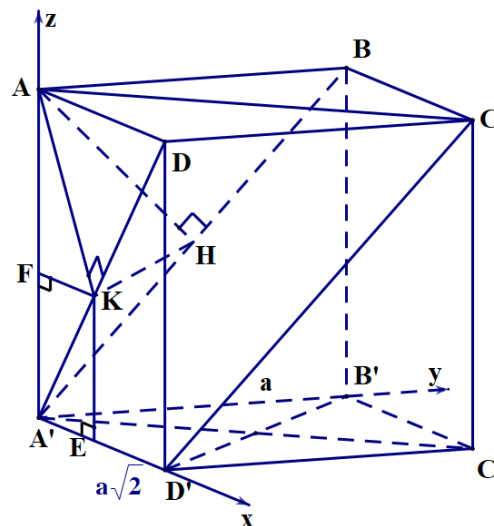
cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ bằng:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{0^2 + (-4)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{17\sqrt{13}}{65} \approx 0,94$$

Câu 3. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

Lời giải

Trả lời: 45



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $A'C'$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên $(ABCD) \Rightarrow (A'C, (ABCD)) = (A'C, A'C') = \angle A'C' = 30^\circ$.

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}; \tan \angle A'C' = \frac{CC'}{A'C'} \Rightarrow CC' = a.$$

Ta có

Kết hợp với giả thiết ta được $ABB'A'$ là hình vuông và có H là tâm.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên $A'D'$ & $A'A$.

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}; A'K = \sqrt{A'A^2 - AK^2} = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

Ta có

$$\frac{1}{KF^2} = \frac{1}{KA^2} + \frac{1}{A'K^2} \Rightarrow KF = \frac{a\sqrt{2}}{3}; KE = \sqrt{A'K^2 - KF^2} \Rightarrow KE = \frac{a}{3}.$$

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn $O \equiv A'$ còn D', B', A theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Khi đó ta có tọa độ các điểm lần lượt là:

$$A(0;0;a), B'(0;a;0), H(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}), K(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;\frac{a}{3}), E(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;0), F(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{3}).$$

Mặt phẳng $(ABB'A')$ là mặt phẳng (yOz) nên có VTPT là $n_1 = (1;0;0)$;

Ta có
$$\left[\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AH} \right] = \frac{a^2}{6} n_2, \quad n_2(2;\sqrt{2};\sqrt{2}).$$

Mặt phẳng (AKH) có VTPT là $n_2 = (2;\sqrt{2};\sqrt{2})$;

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

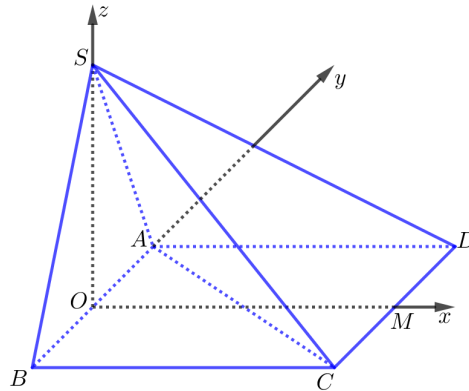
$$\cos \alpha = \left| \cos(n_1, n_2) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Ta có

Câu 4. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 0,7



Chú ý: Ta có thể giải bài toán với cạnh hình vuông $a = 1$.

Gọi O, M lần lượt là trung điểm của AB, CD . Vì SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Xét hệ trục $Oxyz$ có $O(0;0;0), M(1;0;0), A\left(0;\frac{1}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Khi đó

$$C\left(1;\frac{1}{2};0\right), D\left(1;\frac{1}{2};0\right).$$

Suy ra $\vec{SA} = \left(0; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{AC} = (1; -1; 0), \vec{SC} = \left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{CD} = (0; 1; 0)$

Mặt phẳng (SAC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\vec{SA}, \vec{AC}] = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right)$

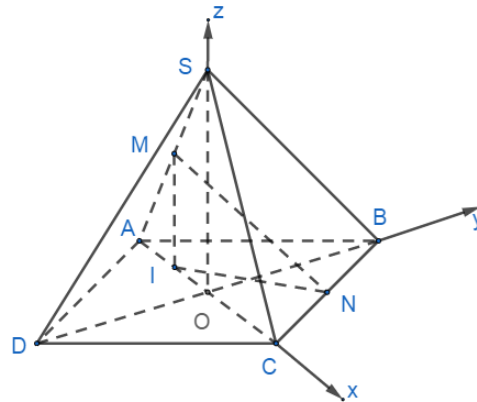
Mặt phẳng (SAD) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\vec{SC}, \vec{CD}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1\right)$

Vậy $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{7}$

Câu 5. (Chuyên Sơn La 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,58



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO .

Khi đó $CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Xét $\triangle CNI$ có: $CN = \frac{a}{2}$, $\angle NCI = 45^\circ$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Xét ΔMIN vuông tại I nên $MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{5a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Mà $MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

Ta có: $O(0;0;0), B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), D\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right),$
 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{14}}{4}\right), M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Khi đó $\vec{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right), \vec{SB} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right), \vec{SD} = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

Vector pháp tuyến mặt phẳng (SBD) : $\vec{n} = \vec{SB} \wedge \vec{SD} = (-\sqrt{7}; 0; 0)$.

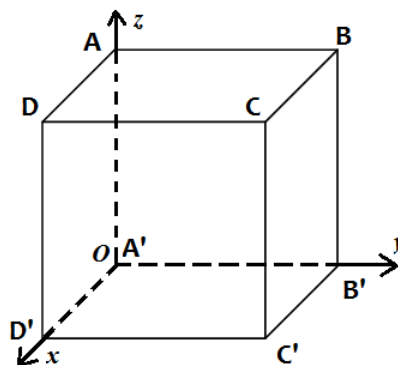
$$\sin(MN, (SBD)) = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{n}|}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| -\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right|}{\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

Suy ra

Câu 6. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

Lời giải

Trả lời: 60



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ $O \equiv A', Ox \equiv A'D', Oy \equiv A'B', Oz \equiv A'A$.

Khi đó: $A'(0;0;0), D'(a;0;0), B'(0;a;0), C'(a;a;0),$

$A(0;0;a), D(a;0;a), B(0;a;a), C(a;a;a).$

$$\Rightarrow \vec{A'B'} = (0; a; 0), \vec{A'D} = (a; 0; a), \vec{A'A} = (0; 0; a), \vec{A'C'} = (a; a; 0).$$

$$\left[\vec{A'B'}, \vec{A'D} \right] = (a^2; 0; -a^2).$$

Chọn $\vec{n_1} = (1; 0; -1)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'CD)$.

$$\left[\vec{A'A}, \vec{A'C} \right] = (-a^2; a^2; 0).$$

Chọn $\vec{n_2} = (-1; 1; 0)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

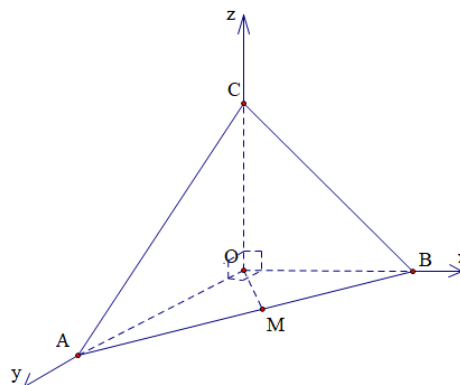
Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ là:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n_1}, \vec{n_2}) \right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Câu 7. (Sở Bắc Ninh -2019) Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc tạo bởi hai vector $\vec{BC}$ và $\vec{OM}$ bằng

Lời giải

Trả lời: 120



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$.

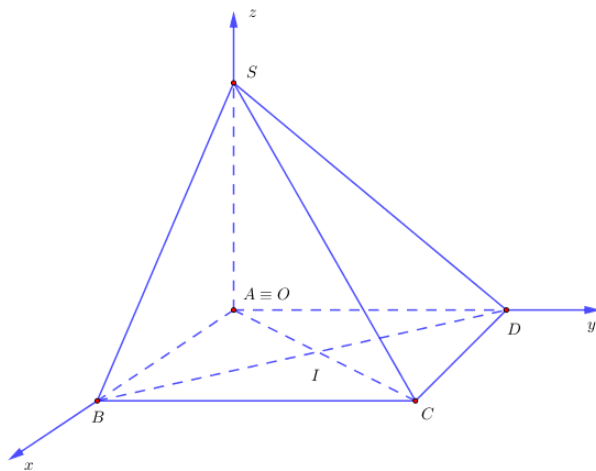
Khi đó ta có: $\vec{BC} = (-a; 0; a)$, $\vec{OM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

$$\Rightarrow \cos(\vec{BC}, \vec{OM}) = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{OM}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{OM}|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{BC}, \vec{OM}) = 120^\circ.$$

Câu 8. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

Lời giải

Trả lời: 60



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow \angle((SBD); (ABCD)) = \angle(SI; AI) = \angle SIA$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \tan \angle SIA = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó $\overrightarrow{SA} = (0;0;-a)$, $\overrightarrow{SC} = (a;a;-a)$, $\overrightarrow{SB} = (a;0;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vector pháp tuyến $n_1 = (-1;1;0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vector pháp tuyến $n_2 = (1;0;1)$.

$$\text{Suy ra } \cos(\angle(SAC); (SBC)) = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(SAC); (SBC) = 60^\circ$$

Câu 9. (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

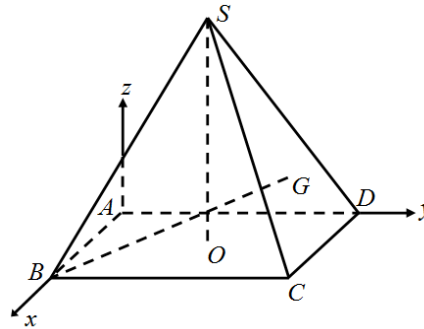
Lời giải

Trả lời: 63

Gọi $O = AC \cap BD$.

Tam giác SAO vuông :
Gắn tọa độ như hình vẽ

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$



$$A(0;0;0) \quad B(a;0;0) \quad C(a;a;0) \quad D(0;a;0) \quad O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right) \quad S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$$

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(\frac{a}{2};\frac{5a}{6};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$.

Ta có :

$$\vec{AS} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{a}{2}(1;1;\sqrt{6}) \quad \vec{BG} = \left(\frac{-a}{2};\frac{5a}{6};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{a}{6}(-3;5;\sqrt{6})$$

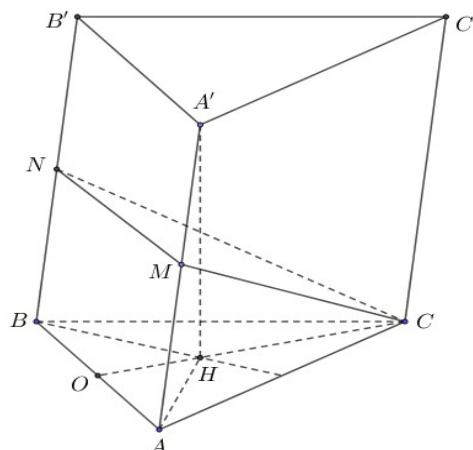
Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

$$\cos(BG;SA) = \frac{|\vec{BG} \cdot \vec{AS}|}{|\vec{BG}| \cdot |\vec{AS}|} = \frac{|-3+5+6|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Câu 10. (Chuyên Hà Tĩnh - 2018) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .
(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,57



Gọi O là trung điểm của AB . Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$,

$$A\left(\frac{1}{2};0;0\right), B\left(-\frac{1}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), H\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right), A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\vec{n}_1 = (0;0;1)$.

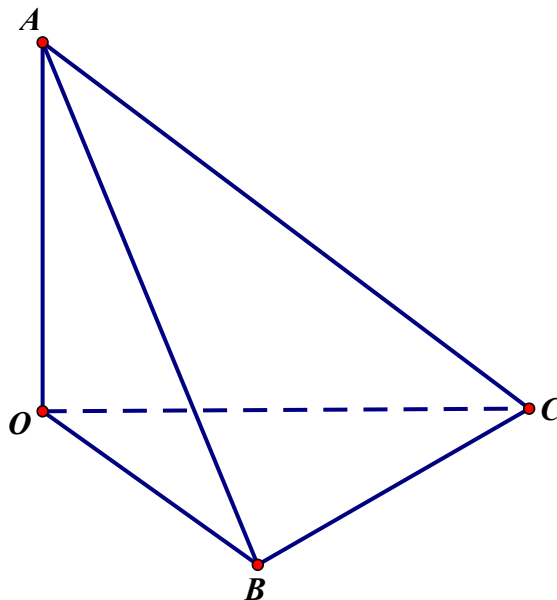
$$M \text{ là trung điểm } AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right), N \text{ là trung điểm } BB' \Rightarrow N\left(-\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = (-1;0;0), \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\Rightarrow (CMN) \text{ có vtpt } \vec{n}_2 = \left(0;\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0;2\sqrt{2};5)$$

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0,57$$

Câu 11. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018) Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$ là?

Lời giải

Trả lời: 125

Gọi H là trực tâm tam giác ABC , vì tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta

có $OH \perp (ABC)$ và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Ta có $\alpha = (\overline{OA}; (ABC)) = \angle OAH$, $\beta = (\overline{OB}; (ABC)) = \angle OBH$, $\gamma = (\overline{OC}; (ABC)) = \angle OCH$.

Nên $\sin \alpha = \frac{OH}{OA}$, $\sin \beta = \frac{OH}{OB}$, $\sin \gamma = \frac{OH}{OC}$.

Đặt $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $h = OH$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ và

$$\begin{aligned} M &= (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma) = \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \beta}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) \\ &= \left(2 + \frac{a^2}{h^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{b^2}{h^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{c^2}{h^2}\right) = 8 + 4(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} + 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \cdot \frac{1}{h^4} + a^2 b^2 c^2 \cdot \frac{1}{h^6}. \end{aligned}$$

Ta có: $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} = (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3\sqrt{a^2 b^2 c^2} \cdot 3\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} = 9$

$$\begin{aligned} (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \cdot \frac{1}{h^4} &= (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2 \\ &\geq 3\sqrt{a^2 b^2 \cdot b^2 c^2 \cdot c^2 a^2} \cdot \left(3\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}}\right)^2 = 3\sqrt{a^4 b^4 c^4} \cdot 9\sqrt{\frac{1}{a^4 b^4 c^4}} = 27 \end{aligned}$$

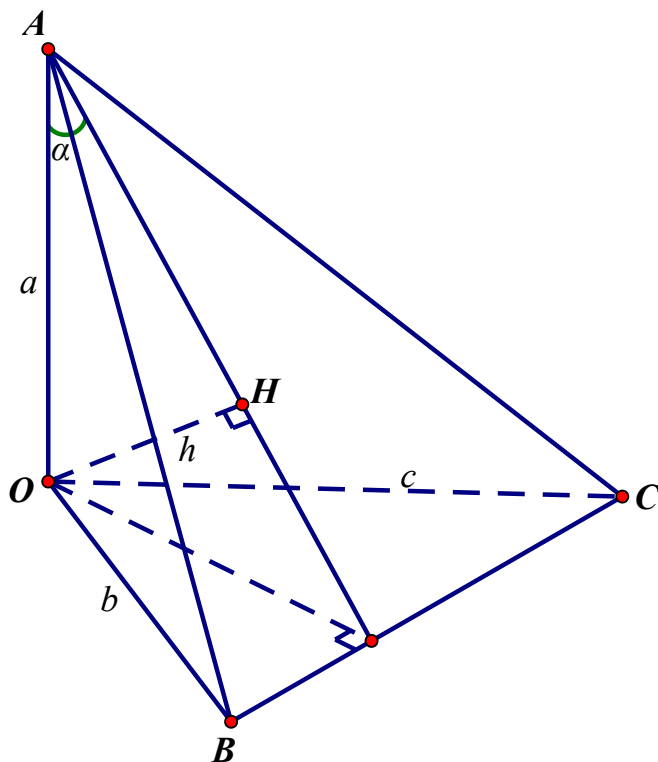
$$a^2 b^2 c^2 \cdot \frac{1}{h^6} = a^2 b^2 c^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^3 \geq a^2 b^2 c^2 \cdot \left(3\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}}\right)^3 = 27$$

Do đó:

$$\begin{aligned} M &= 8 + 4(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} + 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \cdot \frac{1}{h^4} + a^2 b^2 c^2 \cdot \frac{1}{h^6} \\ &\geq 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 27 + 27 = 125. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay $OA = OB = OC$.

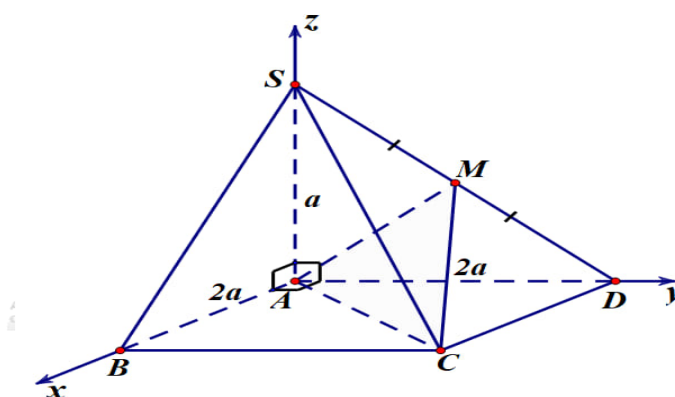
Vậy $\min M = 125$.



Câu 12. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,45



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O$, như hình vẽ:

Khi đó ta có:

$$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), S(0;0;a), M\left(0;a;\frac{a}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{SB} = (2a; 0; -a), \overrightarrow{SC} = (2a; 2a; -a), \overrightarrow{MA} = \left(0; -a; -\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{MC} = \left(2a; a; -\frac{a}{2}\right)$$

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (2a^2; 0; 4a^2) \text{ và } \vec{n}_2 = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}] = (a^2; -a^2; 2a^2)$$

Gọi α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

$$\cos \alpha = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2a^2 \cdot a^2 + 4a^2 \cdot 2a^2|}{\sqrt{(2a^2)^2 + (4a^2)^2} \cdot \sqrt{(a^2)^2 + (-a^2)^2 + (2a^2)^2}}$$

ta có

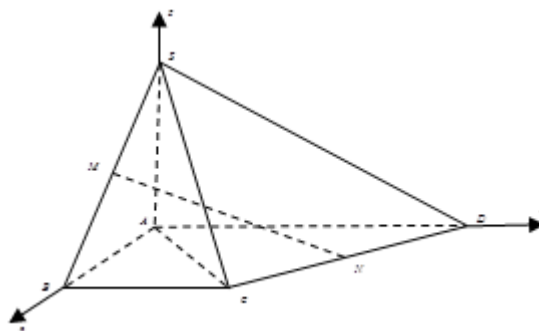
$$= \frac{10a^4}{\sqrt{20 \cdot 6 \cdot (a^4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

Mà $\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \left(\frac{\sqrt{30}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{5}{25}$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,45$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) . (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,67



Đặt không gian $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0)$, $AB \equiv Ox$, $AD \equiv Oy$, $AS \equiv Oz$.

Ta có: $S(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$.

$$M\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$$

$$\vec{AS} = (0; 0; a), \vec{AC} = (a; a; 0)$$

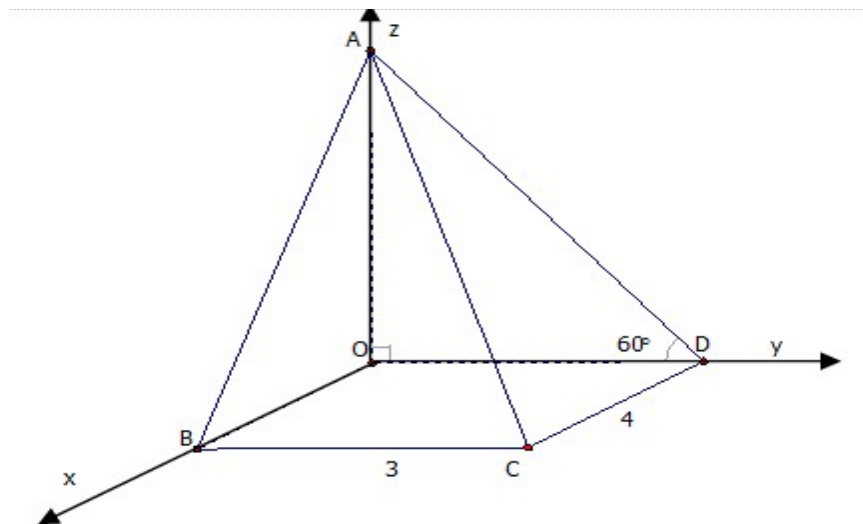
$\Rightarrow [\vec{AS}, \vec{AC}] = (-a^2; a^2; 0)$ là vtp của mặt phẳng (SAC) .

$$\sin(MN; (SAC)) = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{n}_{(SAC)}|}{|\vec{MN}| |\vec{n}_{(SAC)}|} = \frac{\frac{3a^3}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{a^4 + a^4}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \approx 0,67$$

Câu 14. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\angle ABC = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$. Góc giữa đường thẳng AD và BC bằng 60° . Côsin góc giữa hai phẳng (ABC) và (ACD) bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 0,3



Dựng $AO \perp (BCD)$ khi đó O là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $BCDO$.

Góc giữa đường thẳng AD và BC là góc giữa đường thẳng AD và OD và bằng $\angle ADO = 60^\circ$

Xét tam giác ADO vuông tại O : $\tan 60^\circ = \frac{OA}{OD} \Rightarrow OA = 3\sqrt{3}$.

Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào hình chóp như hình vẽ.

Ta có:

$$O(0; 0; 0); B(4; 0; 0); D(0; 3; 0); C(4; 3; 0); A(0; 0; 3\sqrt{3})$$

$$\vec{AB} = (4; 0; -3\sqrt{3}); \vec{BC} = (0; 3; 0); \vec{AD} = (0; 3; -3\sqrt{3}); \vec{CD} = (-4; 0; 0)$$

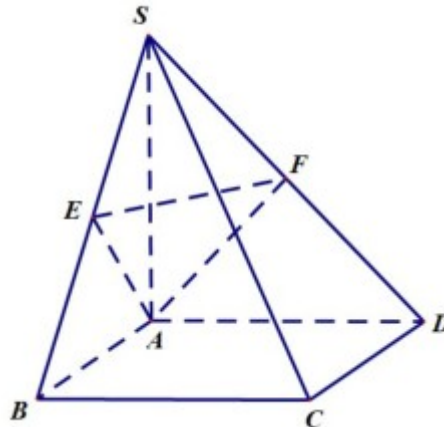
Mặt phẳng (ABC) nhận vectơ $\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{BC} = (9\sqrt{3}; 0; 12)$ làm vectơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (ADC) nhận véc tơ $\vec{n}_2 = \vec{AD} \times \vec{CD} = (0; 12\sqrt{3}; 12)$ làm véc tơ pháp tuyến.

$$\cos((ABC); (ADC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{43} \cdot 2} = \frac{2\sqrt{43}}{43},$$

Nên

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB , SD . Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 0,58

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $S \in Oz$.

$$\Rightarrow B(a; 0; 0), D(0; a; 0), S(0; 0; a). \text{ Khi đó } E\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right), F\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \vec{AE} = \left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right), \vec{AF} = \left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

Vector pháp tuyến của mp (AEF) là $\vec{n}_1 = [\vec{AE}, \vec{AF}] = \left(\frac{-a}{4}; \frac{-a}{4}; \frac{a}{4}\right) \Rightarrow \vec{n}_1 = (1; 1; -1).$

Vector pháp tuyến của mp $(ABCD)$ là $\vec{n}_2 = \vec{AS} = (0; 0; a) \Rightarrow \vec{n}_2 = (0; 0; 1).$

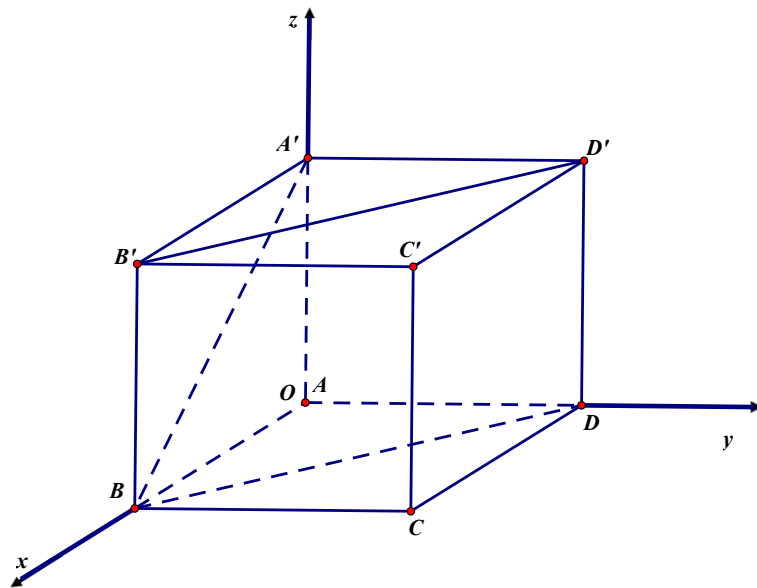
Vậy côsin góc giữa 2 mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.

$$\cos((AEF), (ABCD)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

Câu 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

Lời giải

Trả lời: 0,5



+Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$.

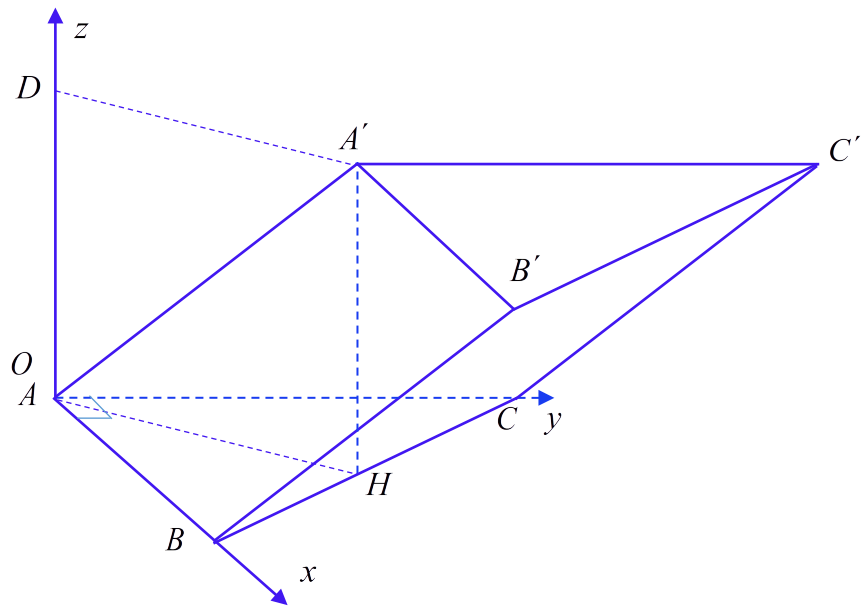
+Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\vec{OC} = (a;a;0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một vec tơ pháp tuyến là $n = (1;1;0)$.

+Đường thẳng $A'B$ có vector chỉ phương là $\vec{A'B} = (a;0;-a)$ ta chọn $u = (1;0;-1)$.

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

+Ta có

Câu 17. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC , $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos \varphi$. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,5

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$ như hình vẽ, chọn $a = 1$ đơn vị, khi đó ta có tọa độ điểm $B(1; 0; 0)$,

$C(0; \sqrt{3}; 0)$ suy ra trung điểm của BC là $H\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, vì H là hình chiếu của A' nên suy ra

tọa độ của $A'\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{5}\right)$. Ta tìm tọa độ B' , gọi tọa độ $B'(x; y; z)$ khi đó ta có $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB}$ nên

tọa độ $B'\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{5}\right)$. Ta cũng có $\overrightarrow{B'C} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{5}\right)$ và $\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{5}\right)$. Từ đó ta

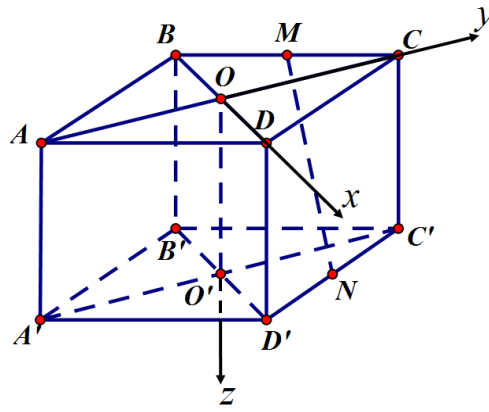
$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{B'C}|}{|\overrightarrow{A'B}| \cdot |\overrightarrow{B'C}|} = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = \frac{7\sqrt{3}}{24} \approx 0,5$$

có

Câu 18. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos \alpha$ bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,58



* Chọn $AB = 2 \Rightarrow BD = 2; AC = 2\sqrt{3}$, đặt

$AA' = h$, chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có: $D(1;0;0)$, $B(-1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$,
 $D'(1;0;h)$, $C'(0;\sqrt{3};h)$, $B'(-1;0;h)$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; h\right), \overrightarrow{MN} = (1; 0; h), \overrightarrow{B'D} = (2; 0; -h)$$

* Do $MN \perp B'D \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{B'D} = 0 \Leftrightarrow 2 - h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1; 0; \sqrt{2})$. Ta có:

$$\overrightarrow{MN} // \vec{u} = \overrightarrow{MN} = (1; 0; \sqrt{2}), (ABCD) \perp n = \vec{j} = (0; 0; 1)$$

* Do α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$ nên ta có:

$$\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$$

Câu 19. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định- Lần 1- 2022 - 2023) Trong không gian với hệ tọa độ

$Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{2}$ và $\Delta': \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Mặt phẳng

$(P): 2x + my + nz + p = 0$ ($m; n; p \in \mathbb{R}$) chứa đường thẳng Δ tạo với đường thẳng Δ' một góc lớn nhất. Khi đó tích của $m; n; p$ bằng:

Lời giải

Trả lời: - 20

Dễ thấy rằng Δ và Δ' cùng đi qua điểm $A(3;3;2) \Rightarrow A(3;3;2) \in (P)$.

Trên Δ' lấy H sao cho H không trùng với A .

Gọi H' , H'' lần lượt là hình chiếu của H trên Δ và (P) .

Khi đó $d(H, (P)) \leq d(H, \Delta) \Leftrightarrow HH'' \leq HH' \Leftrightarrow \frac{HH''}{HA} \leq \frac{HH'}{HA} \Leftrightarrow \sin(\Delta', (P)) \leq \sin(\Delta', \Delta)$
 $\Rightarrow (\Delta', (P)) \leq (\Delta', \Delta)$. Đẳng thức xảy ra khi $H' \equiv H''$ hay Δ là hình chiếu của Δ' trên (P) .

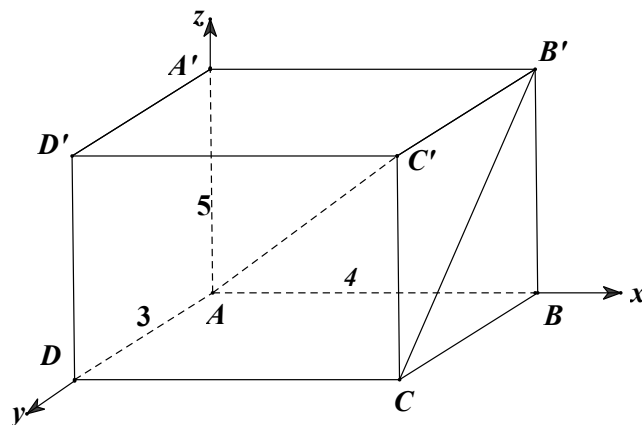
Khi đó $\vec{n}_{(P)} = \left[\vec{u}_{\Delta}, \left[\vec{u}_{\Delta}, \vec{u}_{\Delta'} \right] \right] = (-8; 20; -16) = -4(2; -5; 4) \Rightarrow (P): 2x - 5y + 4z + 1 = 0$

Dạng 2. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm KHOẢNG CÁCH

Câu 1. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4, AD=3, AA'=5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 1,58



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Có $A(0;0;0), C'(4;3;5), C(4;3;0), B'(4;0;5)$,

$\Rightarrow \vec{AC'} = (4;3;5), \vec{B'C} = (0;3;-5), [\vec{AC'}, \vec{B'C}] = (-30;20;12), \vec{CC'} = (0;0;5)$,

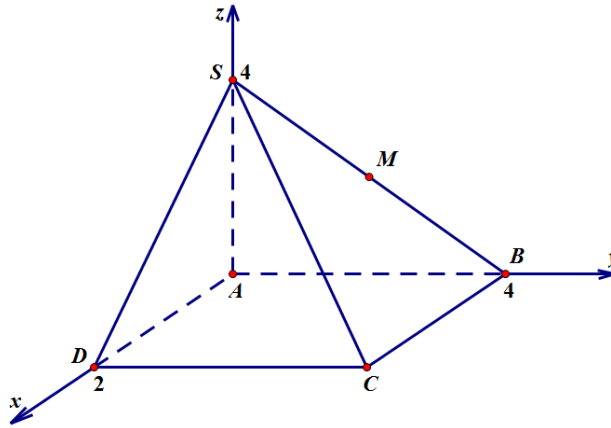
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng cần tìm là:

$$d(AC', B'C) = \frac{|\left[\vec{AC'}, \vec{B'C} \right] \cdot \vec{CC'}|}{\left| \left[\vec{AC'}, \vec{B'C} \right] \right|} = \frac{60}{\sqrt{1444}} = \frac{30}{19} \approx 1,58$$

Câu 2. (Việt Đức Hà Nội 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM) . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 1,4



Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2; 4; 0)$$

M là trung điểm của $SB \Rightarrow M(0; 2; 2)$

Viết phương trình mặt phẳng (CDM) :

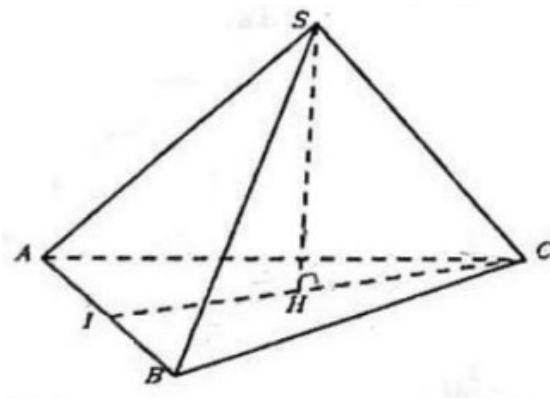
$$\overrightarrow{CD} = (0; -4; 0), \overrightarrow{CM} = (-2; -2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CM} = (-8; 0; -8)$$

(CDM) có một véc tơ pháp tuyến $n = (1; 0; 1)$

Suy ra (CDM) có phương trình: $x + z - 2 = 0$

Vậy
$$d(B; (CDM)) = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \approx 1,4$$

Câu 3. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AB , hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° (hình vẽ bên). Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng bao nhiêu khi $a = 1$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 0,47

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $I(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Ta có $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $AH = \frac{a\sqrt{7}}{4}$

H là trung điểm CI suy ra $H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$.

$45^\circ = (\overrightarrow{SA}, (\overrightarrow{ABC})) = (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AH}) = \angle SAH \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{7}}{4} \Rightarrow S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{SA} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}; -\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)$, $\overrightarrow{CG} = \left(-\frac{a}{6}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a\sqrt{7}}{12}\right)$, $\overrightarrow{CA} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

$[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CG}] = \left(\frac{a\sqrt{21}}{12}; 0; \frac{a\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \left|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CG}]\right| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Khoảng cách giữa SA và CG : $\frac{\left|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CG}] \cdot \overrightarrow{CA}\right|}{\left|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CG}]\right|} = \frac{a\sqrt{14}}{8}$.

Câu 4. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ khi $a=3$

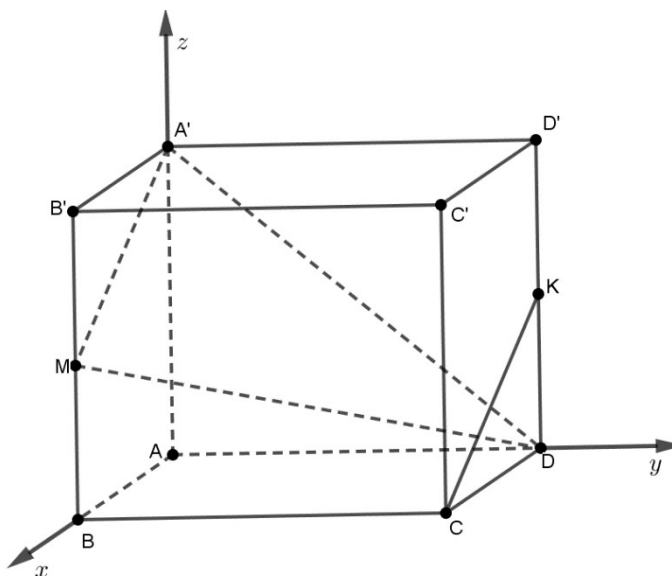
Lời giải

Trả lời: 1

Gọi M là trung điểm BB' . Ta có: $CK \parallel A'M \Rightarrow CK \parallel (A'MD)$.

Khi đó: $d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD)) = d(C, (A'MD))$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C(a;a;0)$, $M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

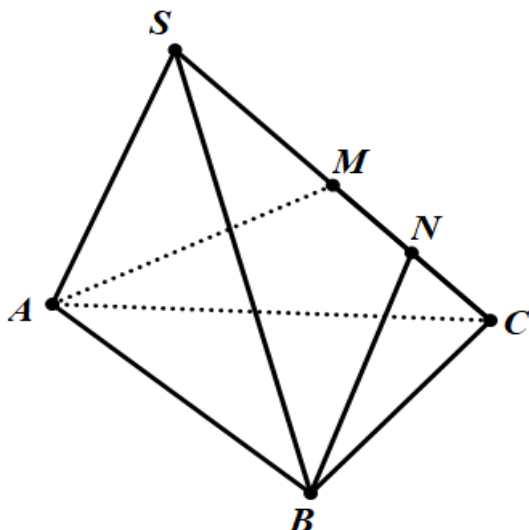
$$\overrightarrow{A'M} = \left(a; 0; -\frac{a}{2}\right), \quad \overrightarrow{A'D} = (0; a; -a), \quad [\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'D}] = \left(\frac{a^2}{2}; a^2; a^2\right).$$

Vậy mặt phẳng $(A'MD)$ nhận $n = (1; 2; 2)$ làm vector pháp tuyến.

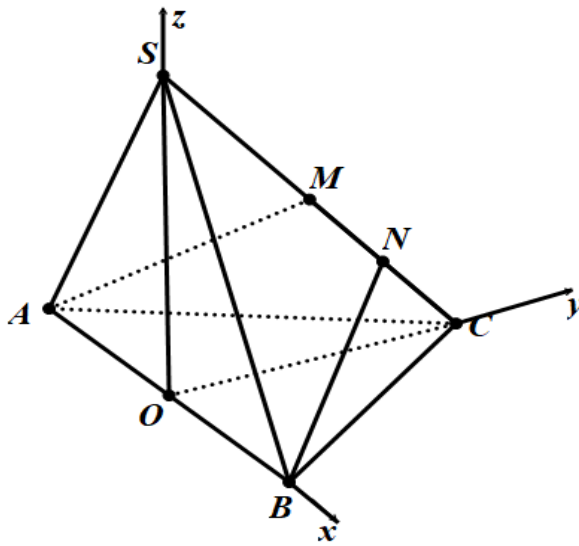
Phương trình mp $(A'MD): x + 2y + 2z - 2a = 0$.

Do đó:
$$d(C, (A'DM)) = \frac{|a + 2a - 2a|}{3} = \frac{a}{3}.$$

Câu 5. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác cân với $\angle ASB = 120^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , BN khi $a = 1$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Trả lời: 0,39



Gọi O là trung điểm AB , ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SO \perp AB$.

Ta có:

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) (gt) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SO \perp (ABC) \\ SO \perp AB (cmt) \end{cases}$$

Xét ΔSOB vuông tại O có $\angle OSB = 60^\circ \Rightarrow SO = \frac{OB}{\tan 60^\circ} = a$

Ta có: OC là đường cao của tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên: $OC = 3a$

Gắn hình chóp $S.ABC$ lên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có:

$$O(0;0;0), B(a\sqrt{3};0;0), A(-a\sqrt{3};0;0); C(0;3a;0); S(0;0;a) \Rightarrow \overline{AB} = (2a\sqrt{3};0;0)$$

M là trung điểm SC nên M có tọa độ: $\left(0; \frac{3a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

N là trung điểm MC nên N có tọa độ: $\left(0; \frac{9a}{4}; \frac{a}{4}\right)$.

AM có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM} \left(a\sqrt{3}; \frac{3a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ hoặc $a(2\sqrt{3}; 3; 1)$

BN có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{BN} \left(-a\sqrt{3}; \frac{9a}{4}; \frac{a}{4}\right)$ hoặc $b(-4\sqrt{3}; 9; 1)$

$$d(AM; BN) = \frac{\left| \left[\begin{matrix} a & b \\ \vec{AB} \end{matrix} \right] \right|}{\left| \begin{matrix} a & b \end{matrix} \right|} = \frac{2\sqrt{237}}{79} a - \frac{a^2}{79} \rightarrow d(AM; BN) \approx 0,39$$

Ta có:

Câu 6. (Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 1\text{cm}$, $AC = \sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB , SAC lần lượt vuông tại B và C . Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,87

Gọi I là trung điểm SA . Do tam giác SAB , SAC lần lượt vuông tại B và C nên $IA = IS = IB = IC$. Vậy I là tâm cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

Vì cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3 \Rightarrow R = IA = IS = IB = IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $SA = \sqrt{5}; SB = 2, SC = \sqrt{2}$.

Gán hệ trục tọa độ gốc A . ta có $A(0,0,0); B(1,0,0); C(0,\sqrt{3},0)$

Giả sử $S(a,b,c), c > 0$. Ta có hệ phương trình

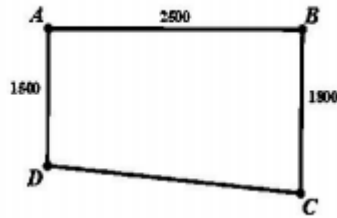
$$\begin{cases} SA = \sqrt{5} \\ SB = 2 \\ SC = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 5 \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ a^2 + (b-\sqrt{3})^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 5 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2a = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{3}b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow S(1, \sqrt{3}, 1)$$

Mặt phẳng (SAB) qua $A(0,0,0)$ có vecto pháp tuyến $n(0,1,-\sqrt{3})$

Phương trình mặt phẳng (SAB) là: $y - \sqrt{3}z = 0$

Vậy $d(C, (SAB)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.

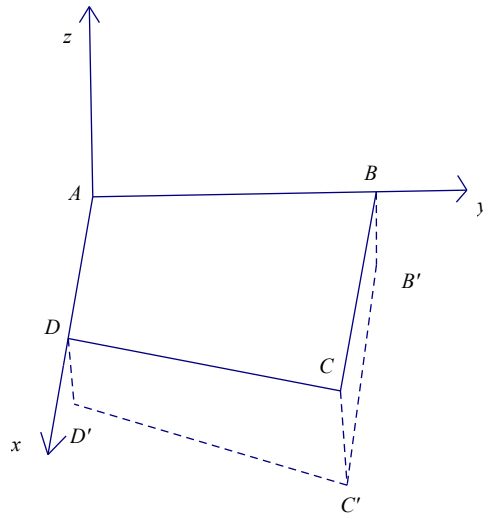
Câu 7. (Chuyên Lam Sơn 2019) Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25\text{ m}$, $AD = 15\text{ m}$, $BC = 18\text{ m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B , C , D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm , $a\text{ cm}$, 6 cm tương ứng. Giá trị của a bằng?

Lời giải

Trả lời: 17,2



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B , C , D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm , $a\text{ cm}$, 6 cm tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$.

Theo bài ra có bốn điểm A ; B' ; C' ; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D'): x + y + 250z = 0$.

Do $C'(1800; 2500; -a) \in (AB'D')$ nên có: $1800 + 2500 - 250a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$.

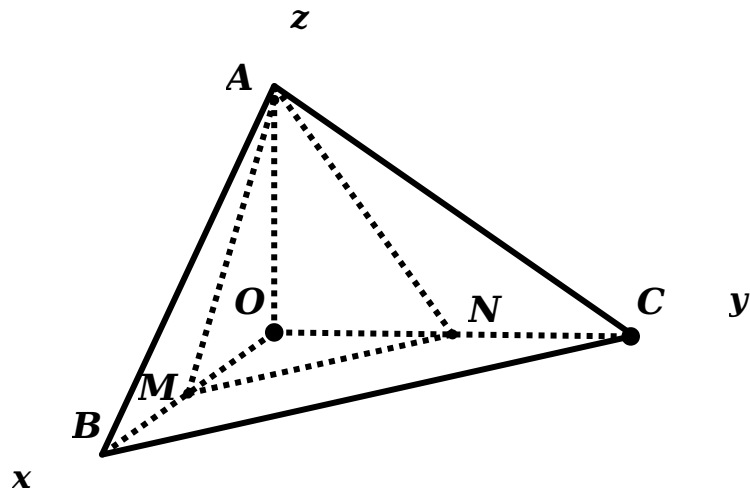
Vậy $a = 17,2\text{ cm}$.

Câu 8. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,59

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz, B \in Ox, C \in Oy$ sao cho $AO=5, OB=2, OC=4$
 $\Rightarrow A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0)$

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$

Phương trình mặt phẳng (AMN) là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$ hay $10x + 5y + 2z - 10 = 0$

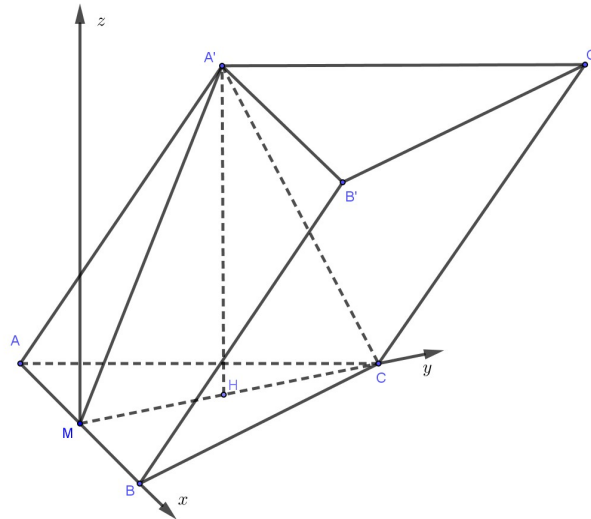
Vậy khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

$$d(G, (AMN)) = \frac{\left| \frac{20}{3} + \frac{20}{3} + \frac{10}{3} - 10 \right|}{\sqrt{100 + 25 + 4}} = \frac{20}{3\sqrt{129}} \approx 0,59$$

Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , gọi M là trung điểm của AB , $\Delta A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC' khi $a=1$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,79



Gọi H là trung điểm $MC \Rightarrow A'H \perp MC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Ta có $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H \Rightarrow A'H = \frac{S_{\Delta ABC}}{V} = a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$O \equiv M(0;0;0)$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox$, $B\left(\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oy$ và $Mz // A'H$.

$\Rightarrow A'\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$

Ta có. $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C'\left(\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{3}}{4};a\right)$

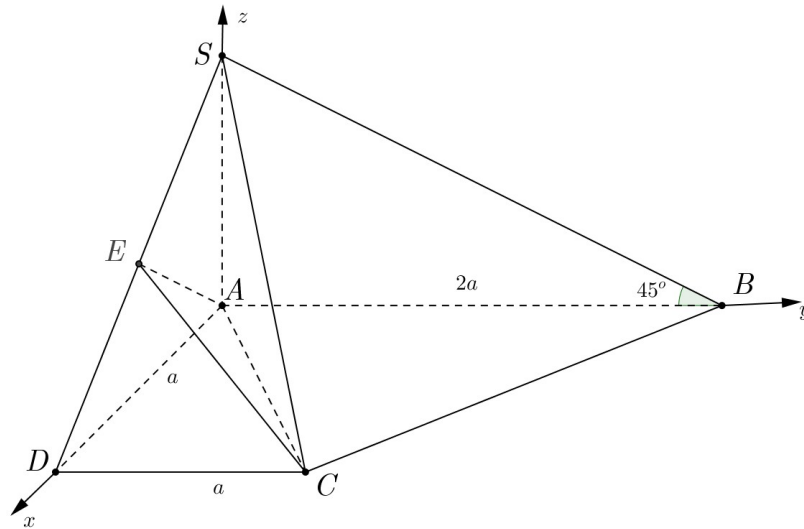
$\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$, $\overrightarrow{CC'} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

Vậy $d(AB, CC') = \frac{\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{CC'} & \overrightarrow{AC} \end{vmatrix} \right|}{\left| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'} \right|} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Câu 10. (Sở Nam Định 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACE) khi $a = 3$

Lời giải

Trả lời: 4



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AB \Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\angle SBA = 45^\circ$.

Tam giác SAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$,
 $E\left(\frac{a}{2};0;a\right)$.

$$\vec{AC} = (a;a;0), \quad \vec{AE} = \left(\frac{a}{2};0;a\right) \Rightarrow \vec{AC} \wedge \vec{AE} = \left(a^2; -a^2; -\frac{a^2}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (ACE) có vectơ pháp tuyến $n = (2; -2; -1) \Rightarrow (ACE): 2x - 2y - z = 0$.

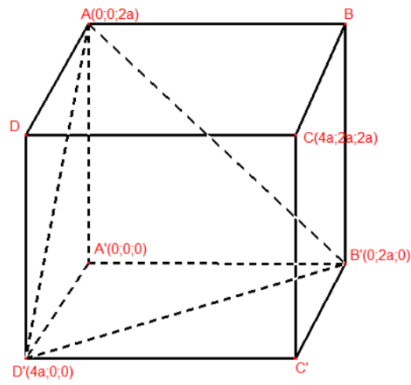
$$d(B, (ACE)) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 2a - 0|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4a}{3}$$

Vậy

Câu 11. (SGD Nghệ An - 2022 - 2023) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = 2a$, $AD = 4a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(AB'D')$ bằng bao nhiêu khi $a = 3$

Lời giải

Trả lời: 8



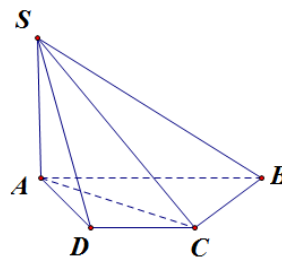
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D')$ có dạng: $\frac{x}{4a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{2a} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 4a = 0$

Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(AB'D')$ bằng

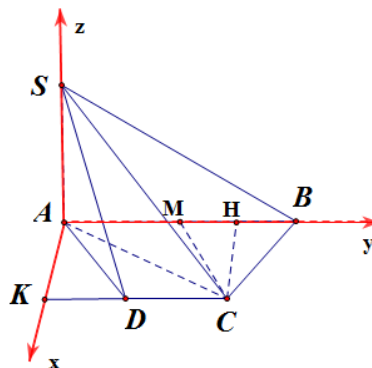
$$d(C; (AB'D')) = \frac{|4a + 2 \cdot 2a + 2 \cdot 2a - 4a|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{8a}{3}.$$

Câu 12. (THPT - Hồng Đức - TP HCM - 2022 - 2023) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cạnh $AB = 2a, AD = DC = CB = a, SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng bao nhiêu khi $a = \sqrt{10}$



Lời giải

Trả lời: 1,5



Gọi M là trung điểm AB , H là trung điểm MB thì dễ thấy MBC là tam giác đều và $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH = \frac{3a}{2}$. Chọn $a = 2$ và dựng hệ trục $Axyz$ như hình vẽ, ta có: $C(\sqrt{3}; 3; 0), B(0; 4; 0), S(0; 0; 6)$ suy ra $\vec{AC} = (\sqrt{3}; 3; 0), \vec{SB} = (0; 4; -6), \vec{AS} = (0; 0; 6)$ và $[\vec{AC}, \vec{SB}] = (-18; 6\sqrt{3}; 4\sqrt{3}) \Rightarrow [\vec{AC}, \vec{SB}] \cdot \vec{AS} = 24\sqrt{3}$

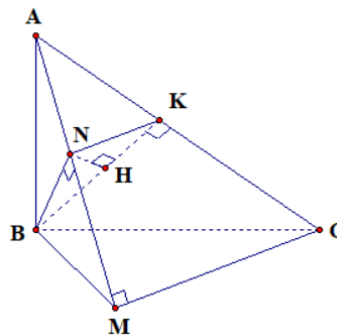
$$d(AC, SB) = \frac{|[\vec{AC}, \vec{SB}] \cdot \vec{AS}|}{|[\vec{AC}, \vec{SB}]|} = \frac{24\sqrt{3}}{5} \Rightarrow d = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$$

Khi đó

Câu 13. (Chuyên Vinh - Lần 01 - Năm 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3; 4; 4), B(1; 2; 3), C(5; 0; -1)$. Điểm M thay đổi trong không gian thoả mãn $\angle ABM = \angle AMC = 90^\circ$. Mặt phẳng (α) đi qua B và vuông góc với AC cắt AM tại N . Khoảng cách từ N đến (ABC) có giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 1,34



Ta có $\vec{BA}(2; 2; 1), \vec{BC}(4; -2; -4) \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$ do đó $\triangle ABC$ vuông tại B .

$$\Rightarrow BA = 3; BC = 6$$

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MBC)$

Gọi K là hình chiếu của B lên AC nên $(BKN) \perp AC$ cố định.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có đường cao BK:

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{5}{36} \Rightarrow BK = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Ta có $\begin{cases} BN \perp AM \\ BN \perp AC \end{cases} \Rightarrow BN \perp (AMC) \Rightarrow BN \perp NK$ suy ra N chạy trên đường tròn đường kính $BK = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Trong (BNK) kẻ $NH \perp BK \Rightarrow NH \perp (ABC) \Rightarrow NH = d(N, (ABC))$

Trong tam giác vuông BNK có $NH \leq \frac{1}{2}BK = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Phương trình mặt phẳng (BCM) đi qua B và có vecto pháp tuyến $\vec{BA}(2; 2; 1)$ có dạng:

$$2x + 2y + z - 9 = 0$$

Tam giác BNK vuông cân tại N nên $BN = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Xét $\triangle ABM$ vuông tại B có đường cao BN :

$$\frac{1}{BM^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BA^2} = \frac{5}{18} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow BM = \sqrt{6}$$

Gọi $M(a; b; c)$, ta có $\begin{cases} BM = \sqrt{6} \\ AM \cdot CM = 0 \\ M \in (BCM) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 6 \\ (a-3)(a-5) + (b-4)b + (c-4)(c+1) = 0 \\ 2a + 2b + c - 9 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 6c + 8 = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 4b - 3c + 11 = 0 \\ 2a + 2b + c - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 6 \\ 2a - c - 1 = 0 \\ 2a + 2b + c - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 6 \\ c = 2a - 1 \\ b = 5 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 30a + 20 = 0 \\ c = 2a - 1 \\ b = 5 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5 + \sqrt{5}}{3} \\ b = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} \\ c = \frac{7 + 2\sqrt{5}}{3} \end{cases} \vee \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5 - \sqrt{5}}{3} \\ b = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{3} \\ c = \frac{7 - 2\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Vậy khoảng cách từ N đến (ABC) có giá trị lớn nhất bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

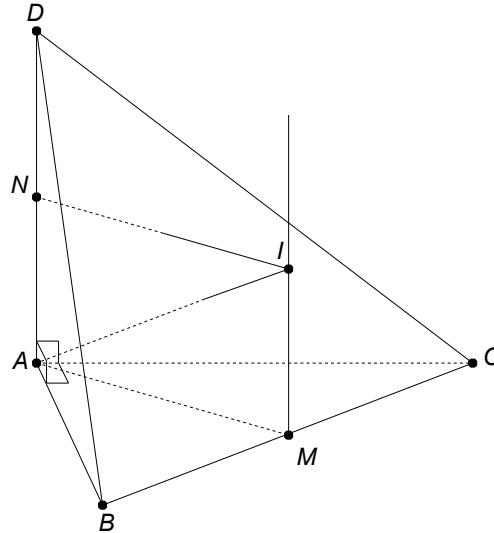
khi $M(a; b; c)$ với $a; b; c$ như trên.

Dạng 3. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm THỂ TÍCH, BÁN KÍNH

Câu 1. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $A(1; 0; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 10,7



Mặt cầu (S) có bán kính $r = IA = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$.

Đặt $AB = a; AC = b; AD = c$

Ta có
$$IA^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

Do đó
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = 12$$

Theo BĐT Cô-si ta có:
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \geq \frac{3\sqrt{a^2 b^2 c^2}}{4}$$

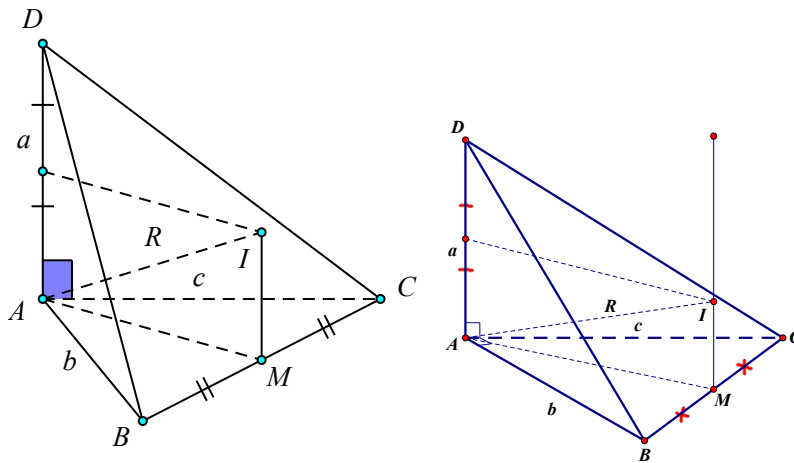
Do đó
$$V = \frac{1}{6}abc \leq \frac{1}{6}\sqrt{16^3} = \frac{32}{3} \approx 10,7$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 2. (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và đi qua điểm $A(0; 1; 1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 1,33



Đặt: $AD = a$, $AB = b$, $AC = c$.

Ta có:

- $R = IA = \sqrt{3}$

- $AM = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}; IM = \frac{a}{2} \Rightarrow R^2 = IA^2 = \frac{b^2 + a^2 + c^2}{4} = 3$

$$b^2 + a^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{b^2 a^2 c^2} \Rightarrow b^2 a^2 c^2 \leq \frac{(b^2 + a^2 + c^2)^3}{27} \Leftrightarrow abc \leq 8$$

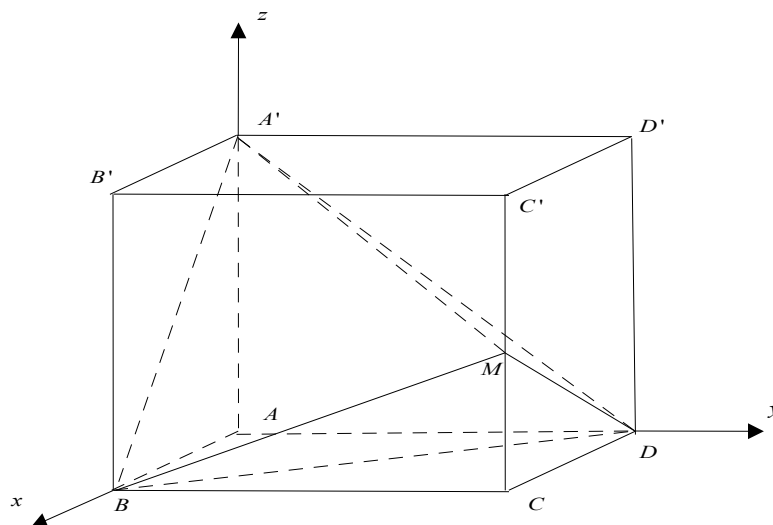
AD BĐT Cosi:

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}abc \leq \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

Câu 3. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a, b > 0$ và $a + b = 2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 0,3



Tọa độ điểm $C(a; a; 0)$, $C'(a; a; b)$, $M(a; a; \frac{b}{2})$

$$\overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b), \quad \overrightarrow{BD} = (-a; a; 0), \quad \overrightarrow{BM} = (0; a; \frac{b}{2})$$

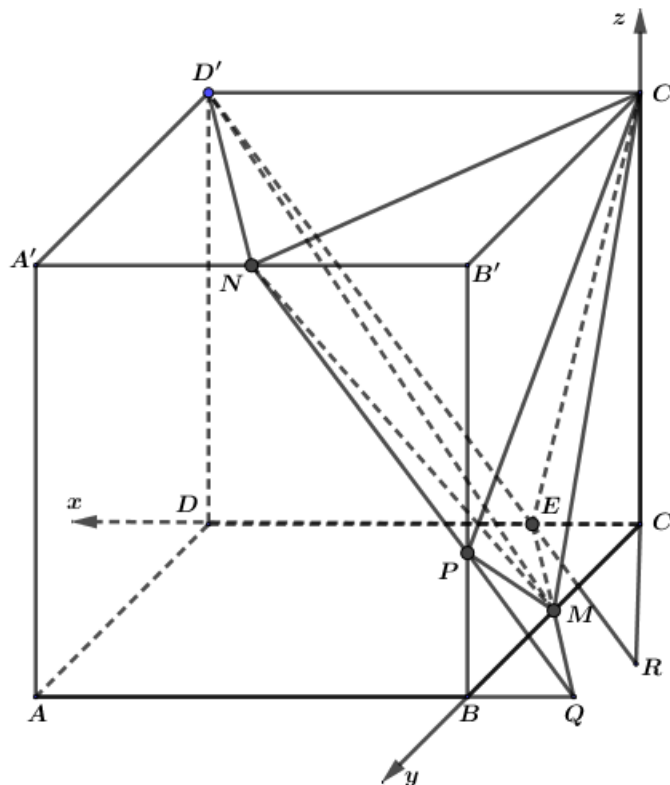
$$[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}] = (-ab; -ab; -b^2) \quad \text{nhên} \quad V_{BD.A'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BM}| = \frac{a^2 b}{4}$$

Ta có: $a.a.(2b) \leq \left(\frac{a+a+2b}{3} \right)^3 = \frac{64}{27} \Rightarrow a^2 b \leq \frac{32}{27} \Rightarrow V_{BD.A'M} \leq \frac{8}{27} \approx 0,3$

Câu 4. (THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (MND') chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm C gọi là (H) . Tính thể tích khối (H) khi $a=1$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,38



Thể tích khối lập phương bằng a^3 .

Mặt phẳng (MND') cắt cạnh DC tại E thỏa $EC = \frac{1}{4}DC$; cắt BB' tại P sao cho $BP = \frac{1}{3}BB'$.

Khi đó $V_{(H)} = V_{C'D'NPME} + V_{C'.CEM} + V_{C'.B'PN}$

$$\text{Có } V_{B'.CNP} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{18}$$

$$V_{C.CME} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$$

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ; lấy đơn vị trên trục 1 đơn vị bằng a .

$$\text{Ta có } C(0;0;0), C'(0;0;1), E\left(\frac{1}{4};0;0\right), M\left(0;\frac{1}{2};0\right), R\left(0;0;-\frac{1}{3}\right), Q\left(-\frac{1}{4};1;0\right), D'(1;0;1)$$

$$\text{Mặt phẳng } (MND'): \frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{-\frac{1}{3}} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y - 3z - 1 = 0 \Rightarrow d(C', (MND')) = \frac{4\sqrt{29}}{29}$$

$$S_{MPND'E} = S_{EQND'} - S_{PMQ} = \frac{\sqrt{29}}{4} - \frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{29}}{4} = \frac{11\sqrt{29}}{48}$$

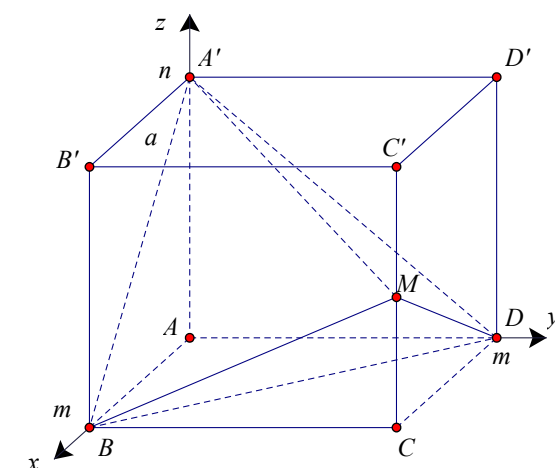
$$V_{C'.D'NPME} = \frac{1}{3} d(C', (MND')) \cdot S_{D'NPME} = \frac{11}{36} a^3$$

$$\text{Vậy } V_{(H)} = \frac{55}{144} a^3 \xrightarrow{a=1} V_{(H)} \approx 0,38$$

Câu 5. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O các đỉnh $B(m;0;0), D(0;m;0), A'(0;0;n)$ với $m, n > 0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 2,4



$$M\left(m; m; \frac{n}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{BA'} = (-m; 0; n)$$

$$\overrightarrow{BD} = (-m; m; 0)$$

$$\overrightarrow{BM} = \left(0; m; \frac{n}{2} \right)$$

Ta có

$$[\overrightarrow{BA'}; \overrightarrow{BD}] = (-mn; -mn; -m^2)$$

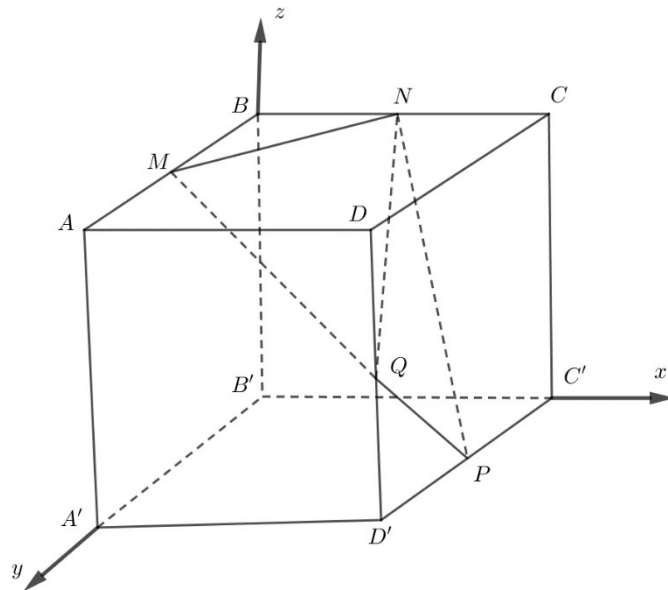
$$[\overrightarrow{BA'}; \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BM} = -m^2n - m^2 \cdot \frac{n}{2} = -\frac{3}{2}m^2n$$

$$V_{BA'DM} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{BA'}; \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BM}| = \frac{1}{4}m^2n = \frac{1}{4}m^2(4-m) = \frac{1}{8}m \cdot m(8-2m) \leq \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,4$$

Câu 6. (Nho Quan A - Ninh Bình - 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Gọi thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $a+b$.

Lời giải

Trả lời: 13



Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc $O \equiv B'$. Khi đó:

$$M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right).$$

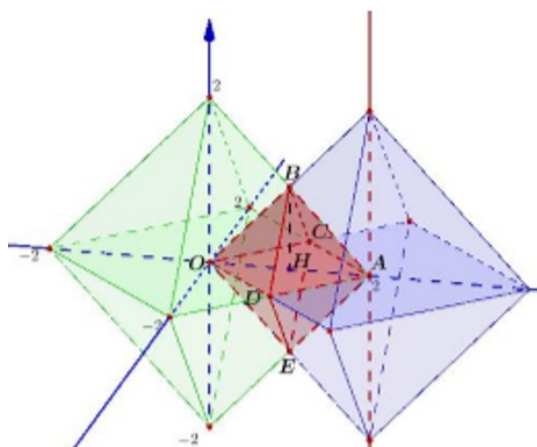
$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{MP} = (1; 0; -1), \overrightarrow{MQ} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Suy ra } V_{MNPQ} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ}| = \frac{1}{12} \Rightarrow a=1; b=12 \Rightarrow a+b=13.$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, tập hợp tất cả các điểm thỏa mãn $|x| + |y| + |z| \leq 2$ và $|x-2| + |y| + |z| \leq 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 1,33



Tập các điểm $M(x; y; z)$ có tọa độ thỏa $|x| + |y| + |z| \leq 2$ là bát diện đều tâm O , các đỉnh có tọa độ $(2; 0; 0), (-2; 0; 0), (0; 2; 0), (0; -2; 0), (0; 0; 2), (0; 0; -2)$.

Tập các điểm $M(x; y; z)$ có tọa độ thỏa $|x-2| + |y| + |z| \leq 2$ là bát diện đều tâm $A(2; 0; 0)$, các đỉnh có tọa độ $(0; 0; 0), (4; 0; 0), (2; 2; 0), (2; -2; 0), (2; 0; 2), (2; 0; -2)$.

Giao của hai bát diện đều trên là một bát diện đều có tâm $H(1; 0; 0)$, các đỉnh là:

$O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; -1; 0)$, $D(1; 1; 0)$, $E(1; 0; -1)$.

Ta có $AD = \sqrt{2}, BH = 1$.

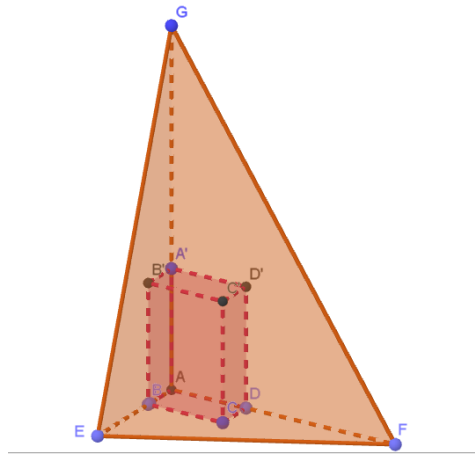
Thể tích khối đa diện:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot BH \cdot AD^2 = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

Câu 8. (Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1; AD = 2; AA' = 3$. Mặt phẳng (P) đi qua C' và cắt các tia $AB; AD; AA'$ lần lượt tại $E; F; G$ (khác A) sao cho thể tích khối tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất. Tổng của $AE + AF + AG$ bằng.

Lời giải

Trả lời: 18



Trong không gian xây dựng hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O; B(1;0;0); D(0;2;0); A'(0;0;3)$

Khi đó ta có $C'(1;2;3)$

Giả sử mặt phẳng (P) cắt các trục $Ox; Oy; Oz$ lần lượt tại $E(a;0;0); F(0;b;0); G(0;0;c)$, với $a > 0; b > 0; c > 0$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

Do mặt phẳng (P) đi qua $C'(1;2;3)$.

Nên ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ hay $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \geq 3\sqrt{\frac{6}{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 162$

Mặt khác thể tích khối tứ diện $AEFG$ là $V = \frac{1}{6}abc \geq 27$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases}$.

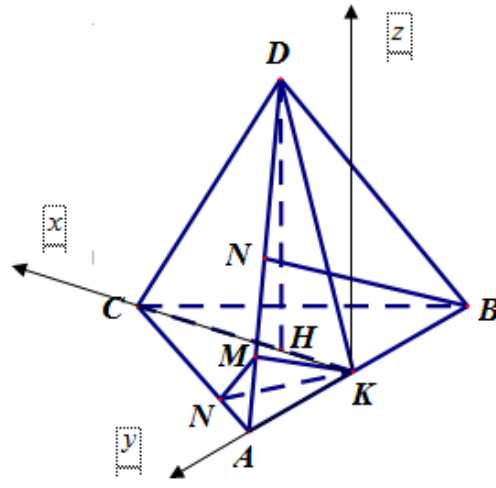
Tức là $a=3; b=6; c=9$.

Vậy tổng $AE + AF + AG = 18$.

Câu 9. (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm AB , gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$ khi $a = \sqrt{2}$

Lời giải

Trả lời: 0,75



Coi $a=1$, ta có: $KC = \frac{\sqrt{3}}{2}, DH = \frac{\sqrt{6}}{3}; AN = \frac{1}{4}AC; HK = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $K \equiv O(0;0;0), A\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), D\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Ta có: $\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AC} \Rightarrow N\left(\frac{\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; 0\right)$

Ta có: Tứ giác $CDMN$ là hình thang cân. Do đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $KCDN$.

Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $KCDN$ có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0) \quad (1)$$

$$K, C, D, N \in (S) \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ \sqrt{3}a = -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{2\sqrt{6}}{3}c = -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{3}{4}b = -\frac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ b = 0 \\ c = -\frac{\sqrt{6}}{8} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Vì

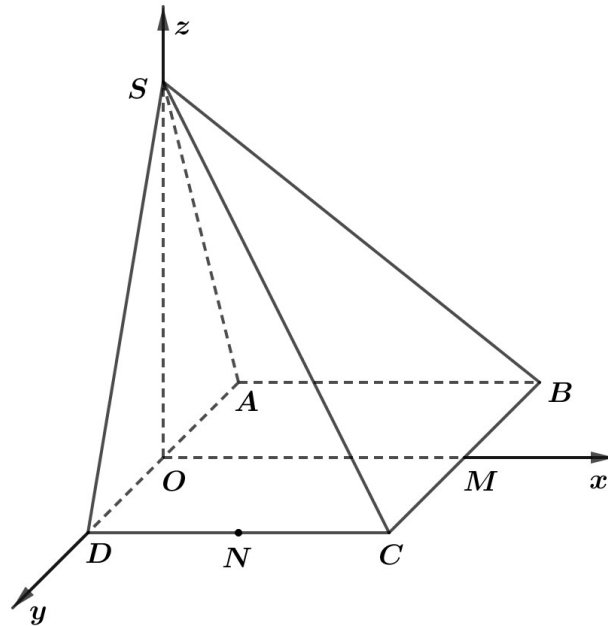
$$R = \frac{3a\sqrt{2}}{8} \xrightarrow{a=\sqrt{2}} R = 0,75$$

Vậy

Câu 10. (Chuyên Thái Bình -2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng bao nhiêu khi $a = \sqrt{93}$

Lời giải

Trả lời: 7,75



Chọn hệ tọa độ O_{xyz} như hình vẽ.

$$M(1;0;0), N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), C\left(1;\frac{1}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN \Rightarrow MI = NI = CI = SI$.

$$\overrightarrow{MI} = (x-1; y; z), \overrightarrow{NI} = \left(x - \frac{1}{2}; y - \frac{1}{2}; z\right), \overrightarrow{CI} = \left(x - 1; y - \frac{1}{2}; z\right), \overrightarrow{SI} = \left(x; y; z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ta có:

Từ $MI = NI = CI = SI$ ta có hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{5\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

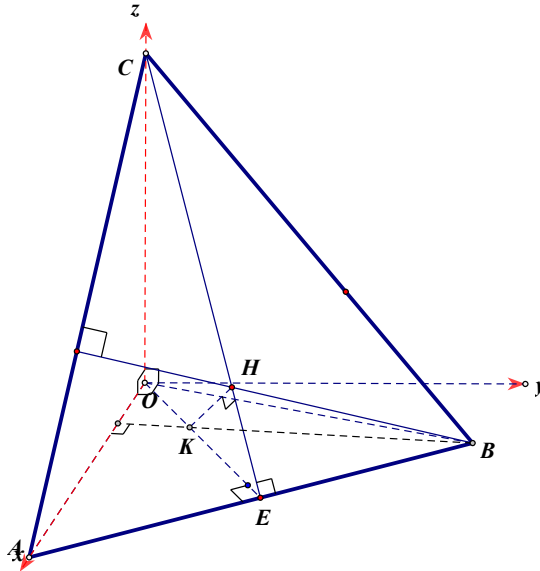
$$\Rightarrow I\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{5\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)$$

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ là: $R = IM = \frac{\sqrt{93}}{12}$.

Câu 11. (Chuyên KHTN - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz , gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,56



Ta có $C(0;0;c)$. Dễ thấy tam giác ABC cân tại C . Gọi $E = (4;2;0)$ là trung điểm của AB . Ta có mặt phẳng (OCE) vuông góc với AB (do $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp CE \end{cases}$) và là mặt phẳng cố định.

Gọi K là trực tâm tam giác OAB , do A, B và K cùng nằm trong mặt phẳng (Oxy) nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (-2) + y \cdot 4 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ . Tìm được } K = \left(3; \frac{3}{2}; 0 \right) \text{ .}$$

Ta chứng minh được $KH \perp (CAB)$ do $\begin{cases} AB \perp (OEC) \\ CA \perp (BHK) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HK \perp AB \\ HK \perp CA \end{cases}$.

Suy ra $\angle KHE = 90^\circ$. Suy ra H thuộc mặt cầu đường kính $KE = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ và

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2} d(H, (SCD))$$

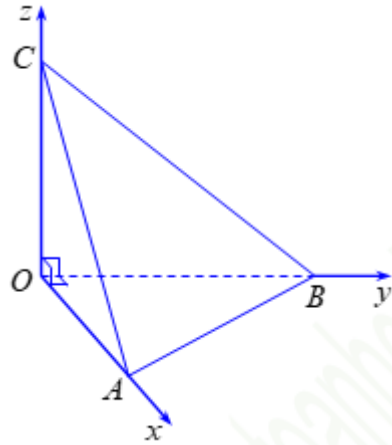
thuộc mặt phẳng (OCE) cố định. Vậy H luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính

$$R = \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0,56 \text{ .}$$

Câu 12. (Chuyên Vinh - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

Lời giải

Trả lời : 2



Ta có
$$\frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{3} S_{ABC} d(O, (ABC))} = \frac{3}{d(O, (ABC))}$$

Mà $\frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{3}{2}$ nên $d(O, (ABC)) = 2$.

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc mặt cầu tâm O , bán kính $R = 2$.

Câu 13. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$, $(d_2): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$, $(d_3): \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a; b; c)$, tiếp xúc với 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$. Tính $S = a + 2b + 3c$.

Lời giải

Trả lời: 11

(d_1) đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$ d_2

(d_2) đi qua điểm $B(3; -1; 2)$ có VTCP $\vec{u}_2 = (1; 2; 2)$ $\bullet I$

(d_3) đi qua điểm $C(4; 4; 1)$ có VTCP $\vec{u}_3 = (2; -2; 1)$ A

C 45
 d_3

d_1

Ta có $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$, $\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0$, $\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$

$\Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một vuông góc với nhau.

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \right] \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0, \left[\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3} \right] \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0, \left[\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_1} \right] \cdot \overrightarrow{CA} \neq 0$$

$\Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một chéo nhau.

Lại có: $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 1)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$ nên $(d_1), (d_2), (d_3)$ chứa 3 cạnh của hình hộp chữ nhật như hình vẽ.

Vì mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ tiếp xúc với 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ nên bán kính

$$R = d(I, d_1) = d(I, d_2) = d(I, d_3) \Leftrightarrow R^2 = d^2(I, d_1) = d^2(I, d_2) = d^2(I, d_3)$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{\left| \left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{u_1} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u_1} \right|} \right)^2 = \left(\frac{\left| \left[\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{u_2} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u_2} \right|} \right)^2 = \left(\frac{\left| \left[\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{u_3} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u_3} \right|} \right)^2, \text{ với } \left| \overrightarrow{u_1} \right|^2 = \left| \overrightarrow{u_2} \right|^2 = \left| \overrightarrow{u_3} \right|^2 = 9,$$

$$\overrightarrow{AI} = (a-1; b-1; c-1), \left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{u_1} \right] = (-2b-c+1; 2a+2c-4; a-2b+1)$$

$$\overrightarrow{BI} = (a-3; b+1; c-2), \left[\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{u_2} \right] = (2b-2c+6; -2a+c+4; 2a-b-7)$$

$$\overrightarrow{CI} = (a-4; b-4; c-1), \left[\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{u_3} \right] = (b+2c-6; -a+2c+2; -2a-2b+16)$$

$$\begin{cases} 9R^2 = \left| \left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{u_1} \right] \right|^2 \\ 9R^2 = \left| \left[\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{u_2} \right] \right|^2 \\ 9R^2 = \left| \left[\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{u_3} \right] \right|^2 \end{cases} \Leftrightarrow 27R^2 = \left| \left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{u_1} \right] \right|^2 + \left| \left[\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{u_2} \right] \right|^2 + \left| \left[\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{u_3} \right] \right|^2$$

$$\Leftrightarrow 27R^2 = 18(a^2 + b^2 + c^2) - 126a - 54b - 54c + 423$$

$$\Leftrightarrow 27R^2 = 18\left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + 18\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + 18\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{243}{2} \geq \frac{243}{2}$$

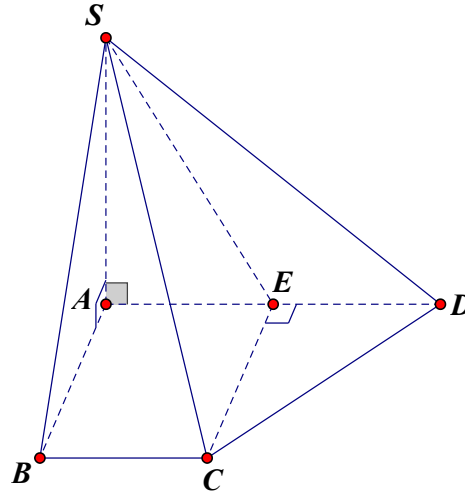
$$\Rightarrow R_{\min} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ khi } a = \frac{7}{2}, b = c = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Khi đó $S = a + 2b + 3c = 11$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi E là trung điểm cạnh AD . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ khi $a = \sqrt{11}$

Lời giải

Trả lời: 5,5



Để tính được $AB = BC = AE = a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$, $\vec{AB} = \vec{i}$, $\vec{AE} = \vec{j}$, $\vec{AS} = 2\vec{k}$

Khi đó ta có $E(0;1;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta có:

$$IE = IC \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2 + c^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2} \Leftrightarrow 2a-1=0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$IE = ID \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2 + c^2} \Leftrightarrow 2b-3=0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$IE = IS \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (c-2)^2} \Leftrightarrow 4c-2b-3=0 \Rightarrow c = \frac{2b+3}{4} = \frac{3}{2}$$

Vậy $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ suy ra bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IE = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Câu 15. (SGD Hòa Bình 2023) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ cạnh $AB = 2a$, $BC = a$, SA vuông góc với mặt đáy và cạnh SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α có

$\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Gọi E, F lần lượt là các điểm nằm trên cạnh SB, SD sao cho $SB = 2SE, SD = 3SF$. Thể tích V của khối tứ diện $AEFC$ bằng bao nhiêu khi $a = \sqrt[3]{6}$

Lời giải

Trả lời: 1

Gắn hệ trục tọa độ với gốc $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AB$; tia $Oy \equiv AD$; tia $Oz \equiv AS$.

Coi $a = 1$.

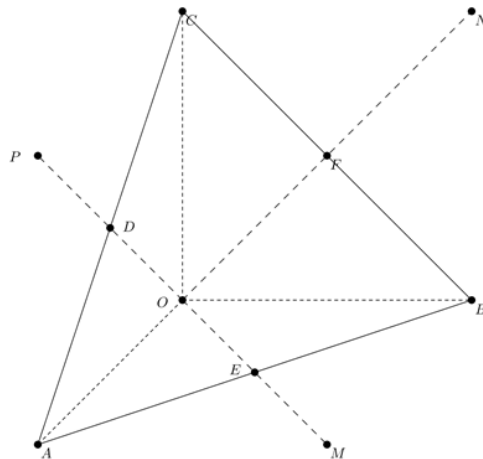
$$SA = AC \cdot \tan \alpha = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 1$$

Ta có $A(0;0;0), C(2;1;0), E\left(1;0;\frac{1}{2}\right), F\left(0;\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

$$\vec{AC}(2;1;0), \vec{AE}\left(1;0;\frac{1}{2}\right), \vec{AF}\left(0;\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right) \Rightarrow [\vec{AC}, \vec{AE}] = \left(\frac{1}{2}; -1; -1\right)$$

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AC}, \vec{AE}] \cdot \vec{AF}| = \frac{1}{6} a$$

Câu 16. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2023) Cho tứ diện $OABC$ vuông tại O có $OA = 2a, OB = 3a, OC = 4a$. Gọi M, N, P lần lượt là điểm đối xứng với điểm O qua trung điểm ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC .

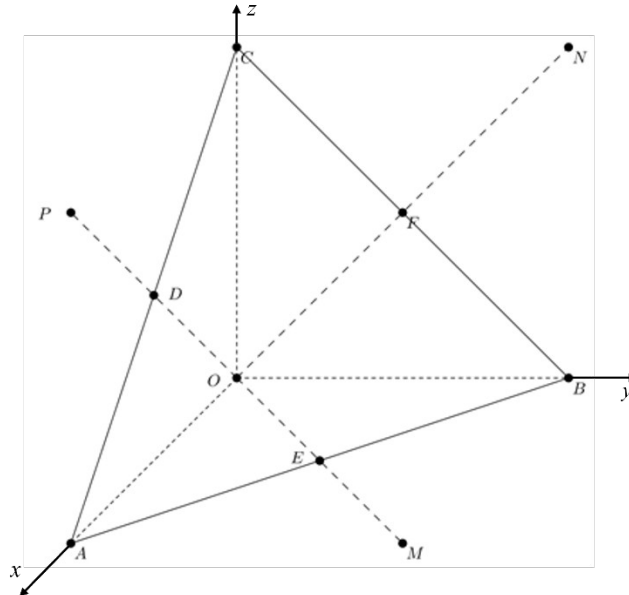


Thể tích của tứ diện $OMNP$ bằng bao nhiêu khi $a = 1$

Lời giải

Trả lời: 8

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Ta có: $O(0;0;0), A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4), D(1;0;2), E\left(1;\frac{3}{2};0\right), F\left(0;\frac{3}{2};2\right)$

$P(2;0;4), M(2;3;0)$ và $N(0;3;4)$

$$\overrightarrow{OM} = (2;3;0), \overrightarrow{ON} = (0;3;4) \Rightarrow \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{ON} \end{bmatrix} = (12; -8; 6) \text{ và } \overrightarrow{OP} = (2;0;4)$$

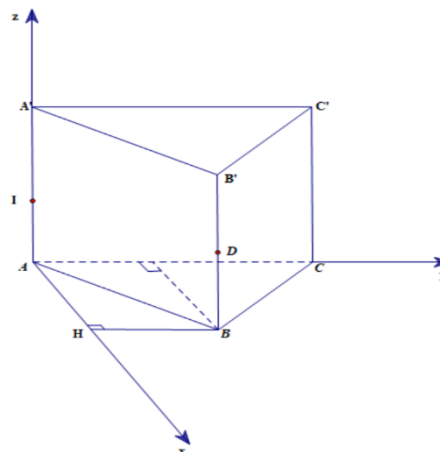
Thể tích khối tứ diện $OMNP$ là: $V_{O.MNP} = \frac{1}{6} \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{ON} \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{OP} \right| = 8$

Thể tích của tứ diện $OMNP$ bằng $8a^3$.

Câu 17. (THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2023) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a ; $AA' = 4a$. Điểm D là trung điểm của BB' , I di động trên cạnh AA' . Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác IDC' . Tính giá trị biểu thức $\sqrt{15m} + \sqrt{51M}$ bằng bao nhiêu khi $a = \sqrt{2}$

Lời giải

Trả lời: 33



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ với $A' \equiv 0 \Rightarrow A'(0;0;0)$

$$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{a}{2}; 2a\right), I(0;0;x), C'(0;a;4a) \quad (0 \leq x \leq 4a)$$

$$S_{\Delta DIC'} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{C'D} & \vec{C'I} \end{vmatrix} \right|$$

$$\vec{C'I} = (0; -a; x - 4a)$$

$$\vec{C'D} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a; -\frac{a}{2}; -2a \right)$$

$$\left[\vec{IC'}, \vec{ID'} \right] = \left(-\frac{1}{2}ax; -\frac{\sqrt{3}}{2}ax + 2\sqrt{3}a^2; -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \right)$$

Ta có

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{\Delta DIC'} &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{C'D} & \vec{C'I} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}ax \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}ax + 2\sqrt{3}a^2 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{3}{4}a^2x^2 - 6a^3x + 12a^4 + \frac{3}{4}a^4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2x^2 - 6a^3x + \frac{51}{4}a^4} = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2x^2 - 24a^3x + 51a^4} = \frac{1}{4} a \sqrt{4x^2 - 24ax + 51a^2} \\ &= \frac{1}{4} a \sqrt{(2x - 6a)^2 + 15a^2} \geq \frac{1}{4} a \sqrt{15}a = \frac{\sqrt{15}}{4} a^2 \end{aligned}$$

$$\min S_{\Delta DIC'} = \frac{\sqrt{15}}{4} a^2 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{15}}{4} a^2$$

Suy ra

x	0	$3a$	$4a$
$S'_{\Delta DIC'}$	-	0	+
$S_{\Delta DIC'}$	$51a^2$	$\frac{\sqrt{15}}{4}a^2$	$19a^2$

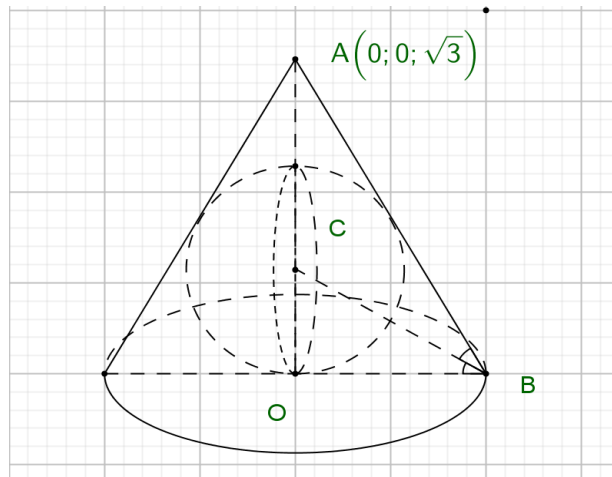
$$\Rightarrow \max S_{\Delta DIC'} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{51a^2} = \frac{\sqrt{51}a^2}{4} \Rightarrow M = \frac{\sqrt{51}a^2}{4}$$

Vậy $\sqrt{15}m + \sqrt{51}M = \frac{33}{2}a^2$.

Câu 18. (THPT Lê Khiết 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;\sqrt{3})$ và điểm B thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi C là điểm trên tia Oz thỏa mãn $d[C, AB] = d[C, OB] = k$. Thể tích của khối tròn xoay tạo bởi tập hợp tất cả các điểm M mà $CM \leq k$ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,81



Tam giác OAB vuông tại $O \Rightarrow \frac{1}{2}OB.OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = 1 \Rightarrow B$ nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $r = 1$. Ta có $\tan \angle BAO = \frac{OA}{OB} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle BAO = 60^\circ$.

Theo bài ra $d[C, AB] = d[C, OB] = k \Rightarrow C \in \text{tia } Oz$ và nằm trên tia phân giác trong của $\angle BAO \Rightarrow C$ là chân đường phân giác trong của góc $B \Rightarrow \angle BOC = \frac{\angle BAO}{2} = 30^\circ \Rightarrow OC = k = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tập hợp các điểm M là khối cầu tâm C , bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \approx 0.81$