|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TỈNH YÊN BÁI**  **HDC ĐỀ CHÍNH THỨC**  *(Đề thi gồm 05 câu)* | **KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN**  **NĂM HỌC 2020 - 2021**  Môn thi: **Toán**  Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*  Khóa thi ngày: **20/07/2020** |
|  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 1**  *(1,5 đ)* | Cho biểu thức , với .  1. Rút gọn biểu thức .  2. Tìm tất cả các giá trị của *a* để. |  |
| 1. Với  ta có | 0,25 |
|  | 0,25 |
|  | 0,25 |
| . Vậy | 0,25 |
| 2. Tìm tất cả các giá trị của *a* để.    Vậy  thì . | 0,5 |
| **Câu 2** *(3,0 đ)* | 1. Cho parabol  và đường thẳng , với  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để parabol  cắt đường thẳng  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  thỏa mãn . |  |
| Phương trình hoành độ giao điểm (\*)  cắt đường thẳng  tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi | 0,25 |
| Gọi  là nghiệm của (\*) khi đó  là hoành độ giao điểm của  và  Theo hệ thức Vi-et, ta có . | 0,25 |
| Do đó . Thỏa mãn điều kiện  .  Vậy . | 0,5 |
| 2. Giải phương trình . |  |
| Điều kiện xác định:  thỏa mãn với mọi .  Đặt , Điều kiện . Phương trình trở thành | 0,25 |
|  | 0,25 |
| ( thỏa mãn điều kiện). | 0,25 |
| \* Với  ta có  .  \* Với  ta có . Phương trình vô nghiệm.  Vậy phương trình có các nghiệm là  và . | 0,25 |
| 3. Giải hệ phương trình  . |  |
| Cộng vế của hai phương trình (1) và (2) ta được | 0,25 |
|  | 0,25 |
| hoặc  . Thử lại ta thấy  thỏa mãn.  Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất . | 0,5 |
| **Câu 3.** *(3,5 đ)* | Cho hình vuông  nội tiếp đường tròn tâm , bán kính . Trên tia đối của tia  lấy điểm  khác điểm . Kẻ  vuông góc với  ( thuộc ). Gọi  là giao điểm của  với .  1. Chứng minh tứ giác  nội tiếp,  là tia phân giác của .  2. Chứng minh .  3. Gọi  là trung điểm của cạnh , tia  cắt đường tròn  tại . Tính độ dài đoạn thẳng  theo .  4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn  tại  ( khác ). Chứng minh ba điểm  thẳng hàng. |  |
|  |  |
| 1. Theo giả thiết  nên .  Vì  là hình vuông nên .  Suy ra  nên tứ giác  nội tiếp. | 0,5 |
| Vì  nội tiếp nên . Suy ra  là phân giác của . | 0,5 |
| 2. Theo chứng minh ở phần a) ta có  là phân giác của  suy ra  (1) | 0,5 |
| Mặt khác dễ thấy  (g.g) nên (2)  Từ (1) và (2) suy ra . | 0,5 |
| 3. Ta có  (g.g)  Suy ra | 0,25 |
| Xét  vuông cân có  nên , . | 0,25 |
| Áp dụng định lí Pytago cho tam giác vuông  ta có  . Vậy  . | 0,25 |
| 4. \*Ta chứng minh  thẳng hàng.  Thật vậy: Gọi  là giao điểm của  và đoạn  Vì  nên theo định lí Talet ta có  (3) (vì )  Mà  (g.g) nên .  Mặt khác theo chứng minh phần b) ta có .  Từ đó suy ra  (4)  Từ (3), (4) ta có  (với  thuộc đoạn ) suy ra .  Vậy  thẳng hàng (3) | 0,25 |
| \* Ta chứng minh  thẳng hàng.  Thật vậy  Vì  nên đường tròn ngoại tam giác có đường kính là  suy ra .  Vì  là đường của đường tròn  nên  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ).  Từ đó suy ra  nên  thẳng hàng (4).  Từ (3) và (4) ta có  thẳng hàng. | 0,5 |
| **Câu 4.** *(1,0 đ)* | 1. Tìm tất cả các số tự nhiên  sao cho  là số chính phương. |  |
| Đặt  ()  Với  ta có  là số chính phương. | 0,5 |
| 2. Cho biểu thức , với  là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức  chia hết cho  thì  chia hết cho 3. |  |
| Ta có  chia hết cho  suy ra  chia cho  dư 1.  Suy ra hai số  không chia hết cho  và phải có cùng số dư khi chia cho .  Giả sử  đều chia cho  dư  thì  chia cho  dư  (trái giả thiết) .  Suy ra  đều chia cho  dư Vậy  chia hết cho 3. | 0,5 |
| **Câu 5** *( 1,0 đ)* | 1. Cho các số thực  dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau  .  1. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có      . | 0,25 |
| Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  .  Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức  bằng  khi . | 0,25 |
| 2. Cho  điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một lục giác đều cạnh  Chứng minh rằng có ít nhất hai trong số các điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá |  |
| + Giả sử  điểm đã cho nằm trong hoặc nằm trên cạnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm    + Nối  với 6 đỉnh của lục giác tạo thành 6 tam giác đều. Khi đó sẽ có ít nhất 5 điểm nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều trong số 6 tam giác đó (theo nguyên lý Dirichlet) | 0,25 |
| + Giả sử 5 điểm trong 25 điểm đó cùng nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác đều .  + Gọi  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  Khi đó bốn tam giác  là các tam giác đều cạnh bằng .  + Năm điểm nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác  sẽ có ít nhất hai điểm nằm trong một trong hay nằm trên cạnh của một trong bốn tam giác đều trong số bốn tam giác trên (theo nguyên lý Dirchlet). Khoảng cách giữa hai điểm đó không quá . | 0,25 |

***Chú ý:*** *Thí sinh làm bài theo cách khác chính xác vẫn cho điểm tối đa*