

THI CHÍNH TH C

( thi g m 01 trang)

**Bài 1.** (4 i m)

Gi i các ph ãng trình sau:

a)  $\sin x + 2\cos^3 x = \cos 2x$

b)  $\sqrt[3]{3x+24} = 9x^3 + 2x - 8$

**Bài 2.** (3 i m)

Gi i h ph ãng trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4 = y^3 - 6y^2 + 9y \\ x^2 + y^2 + 4 = 2x + 4y \end{cases}$$

**Bài 3.** (3 i m)

Cho 2 s th c  $x, y$  th a i u ki n:  $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ .

Tìm giá tr l n nh t và giá tr nh nh t c a bi u th c  $P = x^3 + y^3 - 3(x + y)$

**Bài 4.** (4 i m)

Tìm  $m$  ph ãng trình:  $(x^2 - x + 1)(x^2 - 5x + 1) = mx^2$  có úng hai nghi m phân bi t.

**Bài 5.** (4 i m)

Hai hình chóp tam giác ãu có chung chi u cao, ãnh c a hình chóp này trùng v i tâm c a áy hình chóp kia. M i c nh bên c a hình chóp này ãu c t m t c nh bên c a hình chóp kia. C nh bên  $l = 8\text{cm}$  c a hình chóp th ãnh t t o v i ãng cao m t góc  $30^\circ$ . C nh bên c a hình chóp th ãnh t o v i ãng cao m t góc  $60^\circ$ . Tìm th tích ph ãn chung c a hai hình chóp.

**Bài 6.** (2 i m)

Có bao nhiêu s t nhiên có 4 ch s mà t ãng 2 ch s ãu b ãng t ãng 2 ch s cu i?

## ÁP ÁN

### Bài 1. (4 i m)

a)  $\sin x + 2\cos^3 x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x + 2\cos^3 x = 2\cos^2 x - 1$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x + 2\cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)[1 + 2(1 - \sin x)(\cos x - 1)] = 0 \quad (0,5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (1,5)$$

b)  $\sqrt[3]{3x+24} = 9x^3 + 2x - 8 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{3x+24} = 27x^3 + 6x - 24 \quad (0,5)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{3x+24} + 3x + 24 = 27x^3 + 9x \quad (0,5)$$

t  $a = \sqrt[3]{3x+24}, b = 3x$ , ta  $c \quad a^3 + 3a = b^3 + 3b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+24} = 3x \Leftrightarrow x = 1 \quad (1)$$

### Bài 2. (3 i m)

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4 = y^3 - 6y^2 + 9y \\ x^2 + y^2 + 4 = 2x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 3(x-1) = (y-2)^3 - 3(y-2) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

t  $x-1 = a, y-2 = b$

Ta c h  $\begin{cases} a^3 - 3a = b^3 - 3b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(ab-2) = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1,5)$

Suy ra  $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (0,5)$

### Bài 3. (3 i m)

Cho 2 s th c  $x, y$  th a i u ki n:  $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ .

Tìm giá tr 1 n nh t và giá tr nh nh t c a bi u th c  $P = x^3 + y^3 - 3(x + y)$

$$x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \Leftrightarrow (x + y)^2 - (x + y) - 1 = xy \quad (0,5)$$

T b t ng th c  $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$ , ta suy ra  $-\frac{2}{3} \leq x + y \leq 2 \quad (0,5)$

t  $t = x + y$ , ta có  $P = f(t) = -2t^3 + 3t^2$  v i  $t \in [-\frac{2}{3}, 2] \quad (0,5)$

$$f'(t) = -6t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1 \quad (0,5)$$

GTNN c a  $P = f(2) = -4$  khi  $x = y = 1 \quad (0,5)$

GTLN c a  $P = f(-\frac{2}{3}) = \frac{52}{27}$  khi  $x = y = -\frac{1}{3} \quad (0,5)$

**Bài 4.** (4 i m)

Tìm  $m$  để phương trình:  $(x^2 - x + 1)(x^2 - 5x + 1) = mx^2$  có đúng hai nghiệm phân biệt. Nhận thấy  $x = 0$  không là nghiệm của phương trình. (0,25 )

Phương trình tương đương với  $(x + \frac{1}{x} - 1)(x + \frac{1}{x} - 5) = m$  (1) (0,25 )

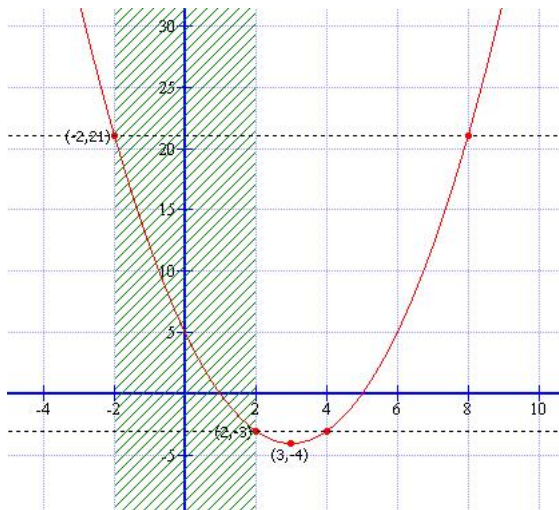
$$t = x + \frac{1}{x} \quad (*) \quad (t \leq -2 \vee t \geq 2) \quad (0,5 )$$

+ **Nhận xét:**

(\*) có 2 nghiệm phân biệt  $t$  khi và chỉ khi  $t < -2 \vee t > 2$  (0,5 )

(\*) có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi  $t = -2 \vee t = 2$  (0,5 )

(1)  $\Leftrightarrow (t-1)(t-5) = m \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = m$  (2) (0,5 )



Xét hàm số  $f(t) = t^2 - 6t + 5$  thì (0,5 )

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $t$  khi và chỉ khi:  $m = -4 \vee -3 < m < 21$  (1 )

**Bài 5.** (4 i m)

Cho 2 hình chóp tam giác đều là:  $O.ABC$  và  $O'.A'B'C'$  với  $O$  là tâm của tam giác  $ABC$  và  $O'$  là tâm của tam giác  $A'B'C'$ .

Theo bài ra thì  $OO'$  là đường cao chung của 2 hình chóp.

Cho  $D, E, F$  là các giao điểm của các cạnh bên tương ứng của 2 hình chóp.

Chứng minh:  $EF \parallel BC \parallel B'C'$ ;  $DE \parallel AB \parallel A'B'$ ,  $DF \parallel AC \parallel A'C'$  (0,75 )

Chứng minh  $(DEF) \parallel (ABC) \parallel (A'B'C')$  và  $DEF$  đều (0,75 )

Phân tích chung của 2 hình chóp là thể tích của khối đa diện  $ODEFO'$  (0,25 )

Ký hiệu  $V$  là thể tích đó thì  $V = \frac{1}{3} OO' \cdot S_{\Delta DEF}$  (0,25 )

$\Delta OO'C$  vuông tại  $O'$  nên  $OO' = l \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$  (0,25 )

Do tính đối xứng nên  $OO'$  đi qua tâm  $I$  của  $\Delta DEF$ . (0,5 )

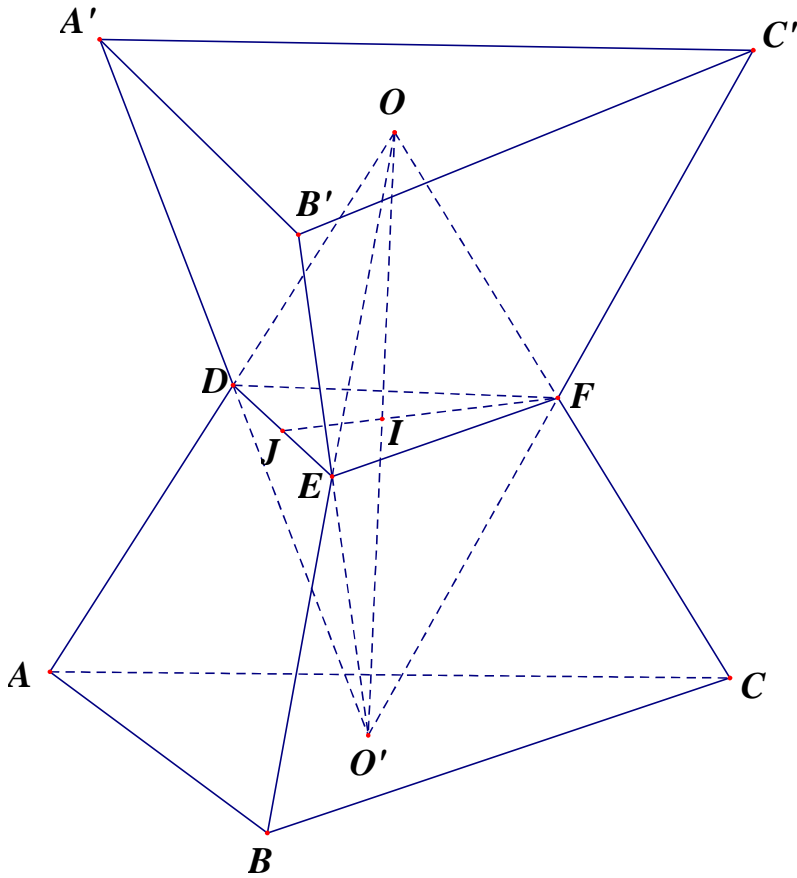
Trong  $\Delta IOF$  ta có:  $OI = IF \cot 30^\circ = IF\sqrt{3}$  (0,25 )

Trong  $\Delta IO'F$  có:  $O'I = IF \cot 60^\circ = \frac{IF}{\sqrt{3}}$  (0,25 )

Suy ra  $OO' = \frac{4}{\sqrt{3}} IF \Rightarrow IF = \frac{\sqrt{3}}{4} OO' = 3 \Rightarrow EF = 3\sqrt{3}$  (0,25 )

$\Rightarrow S_{\Delta DEF} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$  (0,25 )

Vậy thể tích phân chung của 2 hình chóp là:  $V = 27 \text{ cm}^3$  (0,25 )



**Bài 6.** (2 i m)

Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng 2 chữ số đầu bằng tổng 2 chữ số sau?

Gọi số có 4 chữ số là  $\overline{abcd}$  với  $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}, a \neq 0, a + b = c + d$

Ta lần lượt xét số nghiệm của các phương trình  $a + b = k, c + d = k$  với  $k \in \{0, \dots, 18\}$ .

- $k = 0$ :  $a = b = 0$  (loại)
- $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ : pt  $a + b = k$  có  $k$  nghiệm và pt  $c + d = k$  có  $k + 1$  nghiệm.

Trong trường hợp này số các số thỏa mãn YCBT là  $\sum_{k=1}^9 k(k+1) = 330$  (1)

- $k \in \{10, 11, \dots, 18\}$ : có 2 pt  $a + b = k, c + d = k$  và có  $19 - k$  nghiệm.

Trong trường hợp này số các số thỏa mãn YCBT là  $\sum_{k=10}^{18} (19 - k)^2 = 285$

Vậy số các số thỏa mãn YCBT là  $330 + 285 = 615$ . (1)

**Cách khác:**

nguyên số  $\overline{abcd}$  thì số YCBT có ứng dụng  $\overline{ab(9-c)(9-d)}$

Như vậy thay vì tìm số thỏa mãn YCBT ta tìm số có tổng bằng 18.

Tức là tìm số nghiệm của phương trình:  $a + b + c + d = 18$

Số nghiệm của phương trình  $a + b + c + d = 18$  là:  $C_{21}^3 - 4C_{11}^3 = 670$

Số nghiệm của phương trình  $b + c + d = 18$  là:  $C_{20}^2 - 3C_{10}^2 = 55$

Vậy số các số thỏa mãn YCBT là  $670 - 55 = 615$ .