**CHUYÊN ĐỀ: TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC**

***Dạng 1: Bài toán về tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến và vị trí của trọng tâm tam giác.***

**Bài 1:** Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Cho biết BD $<$ CE. So sánh $\hat{GCB} và \hat{GBC}.$

**Bài 2:** Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân,

**Bài 3:** Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của BM. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho IE $=$ IA.

1. Điểm M là trọng tâm tam giác nào?
2. Gọi F là trung điểm CE. Chứng minh A, M, F thẳng hàng.

**Bài 4:** Chứng minh rằng trong một tam giác, tổng của hai đường trung tuyến luôn lớn hơn đường trung tuyến thứ ba.

***Dạng 2: Đường trung tuyến của các tam giác đặc biệt.***

**Bài 5:** Chứng minh trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền ấy.

**Bài 6:** Chứng minh nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng một nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

-------------------------------------------------------------------

**BÀI TẬP**

**Bài 7:** Cho tam giác ABC có đường trung tuyến BD $=$ 3 cm, đường trung tuyến CE $=$ 4,5 cm.

Tính độ dài cạnh BC biết độ dài đó ( tính theo cm ) là một số tự nhiên lẻ.

**Bài 8:** Cho tam giác ABC với các đường trung tuyến BD và CE. Chứng minh rằng:

1. Nếu AB $=$ AC thì BD $=$ CE.
2. Nếu BE $=$ CE thì AB $=$ AC.

**Bài 9:** Cho tam giác ABC có AB $=$ AC $=$ 5 và BC $=$ 8. Gọi G là trọng tâm tam giác. Tính độ dài các đoạn GA, GB, GC.

**Bài 10:** Cho tam giác ABC có BC $=$ 34 cm, trung tuyến BD $= $24 cm, trung tuyến CE $=$ 45 cm. G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính độ dài các cạnh của tam giác GDE.

**Bài 11:** Chứng minh:

1. Một tam giác là tam giác cân khi và chỉ khi có hai đường trung tuyến bằng nhau.
2. Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi có ba đường trung tuyến bằng nhau.

**Bài 12:** Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM và trọng tâm G. Trên tia đối của tia MA lấy các điểm I và K sao cho MI $= $MG, IK $=$ IG. Gọi N là trung điểm CK. Chứng minh rằng ba điểm B, I, N thẳng hàng.

**Bài 13:** Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BM $=$ 2 CM. Vẽ điểm D sao cho C là trung điểm AD, gọi N là trung điểm BD. Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.

**Bài 14:** Cho tam giác ABC có đường trung tuyến BM. Gọi D là trung điểm của MC. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho DE $=$ DB. Gọi K là trung điểm AE. Chứng minh ba điểm B, M, K thẳng hàng.

**Bài 15:** Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD và BE cắt nhau ở K. Gọi I là trung điểm AK, O là giao điểm của BE và IC, F là trung điểm của AB.

1. Chứng minh ba điểm C, K, E thẳng hàng.
2. Tính EO biết BE $=$ 18 cm.

**Bài 16:** Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho MN $=$ MA. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm AB và AC. Gọi I và K theo thứ tự là giao điểm của ND, NE với BC. Chứng minh: BI $=$ IK $=$ KC.

**Bài 17:** Cho tam giác ABC có AB $<$ AC, hai trung tuyến BE, CF và trọng tâm G.

1. Chứng minh: BE $<$ CF.
2. Chứng minh: $\hat{GBC}>\hat{GCB}.$

**Bài 18:** Cho tam giác ABC có AB $=$ 4, AC $=$ 5 và G là trọng tâm. Chứng minh AG $<3.$

**Bài 19:** D

 2

 x

A 1

 2 I 2

 y C

 B z K 2

Cho hình vẽ. Tính độ dài x, y, z biết IA $=$ 1 và AD $= $AB $=$ CI $=$ CK $=$ 2.

**Bài 20:** Cho tam giác ABC có trung tuyến BN và CP cắt nhau tại G. Chứng minh rằng:

$$BN+CP>\frac{3}{2}BC.$$

**Bài 21\*:** Cho tam giác ABC có AM, BN và CP cắt nhau tại G. Chứng minh:

1. $AM<\frac{1}{2} (AB+AC)$
2. $\frac{3}{4}\left(AB+BC+CA\right)<AM+BN+CP<AB+BC+CA.$

**Bài 22:** Cho tam giác ABC có trung tuyến AD. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB; qua B kẻ đường thẳng song song với AD. Hai đường thẳng trên cắt nhau tại E, gọi K là trung điểm EC. Chứng minh ba điểm A, D, K thẳng hàng.

**Bài 23:** Cho tam giác ABC vuông tại A có AC $=$ b, AB $=$ c. Hai trung tuyến AD, BE cắt nhau tại điểm G. Tìm mối quan hệ giữa b và c để AD vuông góc BE.

--------------------------------------------------------------

**LUYỆN TẬP**

**Bài 24:** Cho tam giác ABC, trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Biết BM = CN, chứng mình AG vuông góc BC.

**Bài 25:** Cho tam giác ABC vuông tại A có trung tuyến AM. Kẻ AH $⊥$ BC. Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AC cắt AM ở N. Chứng minh BN vuông góc AM.

**Bài 26:** Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho HD = HA. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = CB.

1. Chứng minh C là trọng tâm tam giác ADE.
2. Tia AC cắt DE tại M. Chứng minh AE // HM.

**Bài 27:** Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy hai điểm D và E sao cho AD = BE. Trên cạnh AC lấy hai điểm F và H sao cho AF = CH. Chứng mình hai tam giác BFH và CDE có cùng một trọng tâm.

**Bài 28:** Cho tam giác ABC có AB < AC, hai trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh:

1. Ba điểm A, G, D thẳng hàng.
2. BE < CF.
3. Độ dài AD, BE và CE thỏa mãn có thể là ba cạnh một tam giác.

**Bài 29:** Cho tam giác ABC, ba trung tuyến AD, BE và CF cắt nhau tại G. Chứng minh:

1. $AD<\frac{AB+AC }{2}$
2. $BE+CF>\frac{3}{2}BC$
3. $^{3}/\_{4}$ chu vi tam giác ABC < AD + BE + CF < chu vi tam giác ABC

**Bài 30:** Cho tam giác ABC, O là một điểm nằm trong tam giác. Kẻ BH, CK vuông góc đường thẳng AO. Biết ba tam giác AOB, BOC và COA có diện tích bằng nhau. Chứng minh:

1. BH = CK
2. O là trọng tâm tam giác ABC.

**Bài 31:** a. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến BD và CE vuông góc nhau. Tính độ dài BC biết BD = 9 cm, CE = 12 cm.

b.Cho tam giác ABC có BC = 10 cm, các đường trung tuyến BD = 9 cm và CE = 12 cm. Chứng minh BD vuông góc CE.

**Bài 32:** Cho tam giác ABC. Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AC và AB sao cho AD = $^{1}/\_{3}$ AC, AE = $^{1}/\_{3}$ AB. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng các đường thẳng BD, CE và AM đồng quy.

**Bài 33:** Cho tam giác ABC. Gọi D và E lần lượt là trung điểm AB, BC. Vẽ các điểm M, N sao cho C là trung điểm EM, B là trung điểm DN. Gọi K là giao điểm DM và AC. Chứng minh ba điểm N, E, K thẳng hàng.

**Bài 34:** Cho tam giác ABC vuông tại A. KẺ AH vuông góc BC. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Tính $\hat{DHE}.$

**Bài 35:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AC > AB, trung tuyến AM. Kẻ AH vuông góc BC.

Chứng minh rằng: $\hat{MAH}=\hat{B}-\hat{C}.$

**Bài 36\*:** Gọi O là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\hat{ABO}=\hat{ACO}.$ Vẽ OH vuông góc AB, OK vuông góc AC. Gọi M là trung điểm BC.

* 1. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của OB và OC. Chứng minh: $\hat{OEH}=\hat{OFK}$
	2. Chứng minh: MH $=$ MK.

**Bài 37\***: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm BM. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho IE = IA. Gọi N là trung điểm của EC. Chứng minh đường thẳng AM luôn đi qua điểm N.

**Bài 38\*:** Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến CD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho BK = BA. Chứng minh rằng CK = 2CD.

**Bài 39\*:** Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD = 12 cm, trung tuyến BE = 9 cm, trung tuyến CF = 15 cm. Tính độ dài cạnh BC.

**Bài 40\*:** Cho tam giác ABC có $\hat{A}=120°,$ AB = 4, AC = 6. Tính độ dài trung tuyến AM.

**Bài 41\*:** Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau. Gọi A’, B’, C’ và D’ theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC.

Chứng minh rằng các đường thẳng AA’, BB’, CC’ và DD’ đồng quy.

**Bài 42\*:** Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Qua D vẽ đương thẳng vuông góc với BD cắt BC tại E. Chứng minh rằng BE $= $2CD.