

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. KHẢO SÁT HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

Khảo sát hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$																								
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	y'	+		+	y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	y'	-		-	y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
y'	+		+																						
y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$																						
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
y'	-		-																						
y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$																						

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:

a) Có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

b) Nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.

c) Nhận 2 đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Sự biến thiên

Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$. Do đó, đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \quad \text{với mọi } x \neq 1.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'			
y	2	$+\infty$	2

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

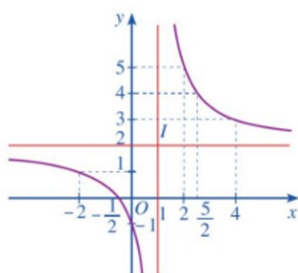
3) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.

- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1), \left(-\frac{1}{2}; 0\right), (-2; 1), (2; 5), \left(\frac{5}{2}; 4\right)$ và $(4; 3)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ được cho ở Hình.



Quan sát đồ thị ở Hình, đồ thị đó nhận giao điểm $I(1; 2)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$. Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$. Do đó, đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

3) Đồ thị

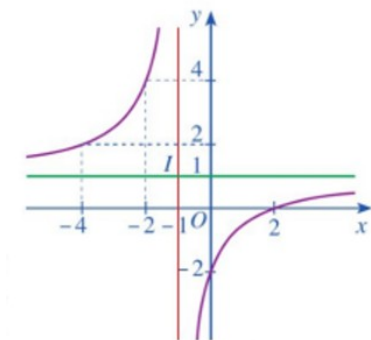
- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -2)$.

- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $(2; 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -2), (2; 0), (-2; 4)$ và $(-4; 2)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ được cho ở Hình.



Câu 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

- Tiệm cận:

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$.

Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

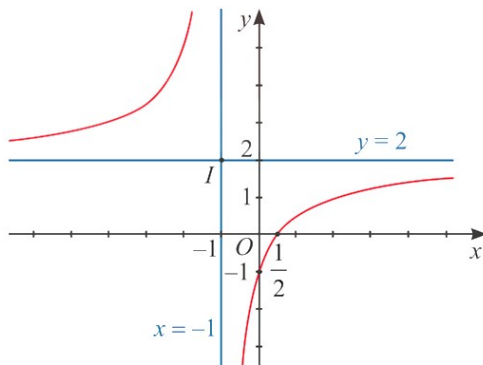
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+		+	
y	2		$+\infty$		$-\infty$

3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1; 2)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = 2$.



Câu 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-x+2}{2x+3}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-7}{(2x+3)^2}$.

Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq -\frac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

- Tiệm cận:

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{2x+3} = -\frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{2x+3} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} \frac{-x+2}{2x+3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^+} \frac{-x+2}{2x+3} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'		-	-
y	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$

3. Đồ thị:

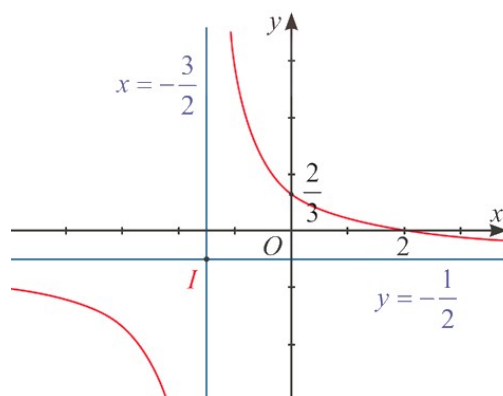
Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(2;0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận

$x = -\frac{3}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}$.



Câu 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$.

Lời giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x+1}{x-2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+1}{x-2} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x-2} = -1; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x-2} = -1.$$

Suy ra đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có $y' = \frac{1}{(x-2)^2} > 0, \forall x \in D; y'$ không xác định tại $x=2$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'			
y	-1		-1

- Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

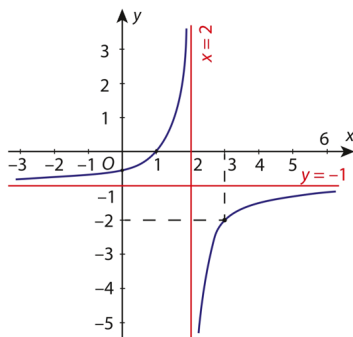
- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

- Đồ thị:

- Vẽ các đường tiệm cận $x=2$ và $y=-1$.

- Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và giao với trục Ox tại điểm $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; -2)$, nhận giao điểm $I(2; -1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số được cho như Hình.

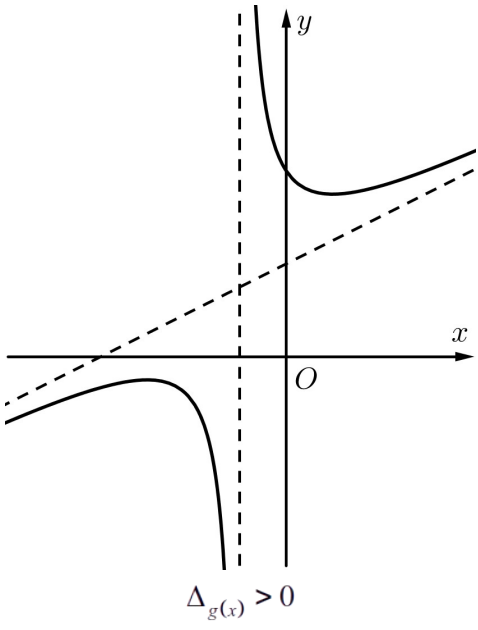
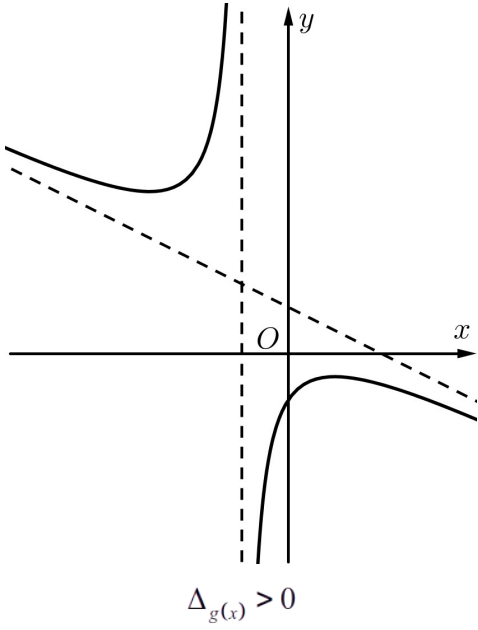
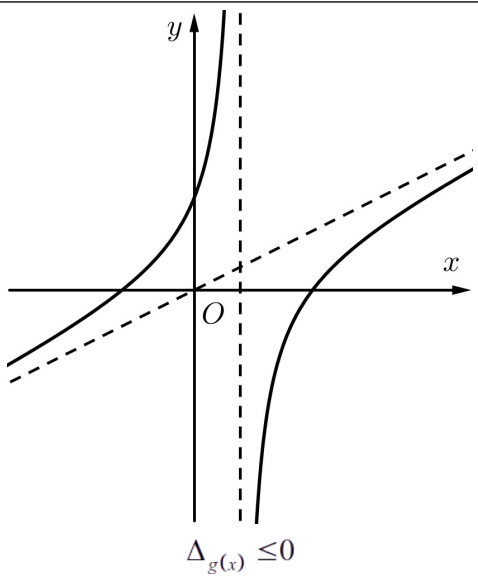
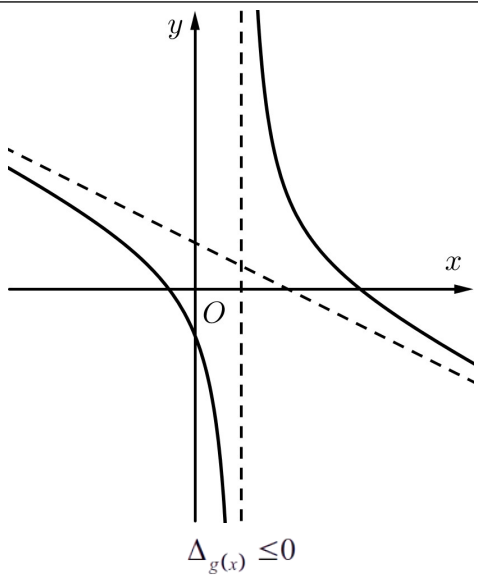


Khảo sát hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu, tức là $\frac{n}{m}$ không là nghiệm của tử)

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + bn - mc}{(mx + n)^2}$. Đặt $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

	$am > 0$	$am < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt	 $\Delta_{g(x)} > 0$	 $\Delta_{g(x)} > 0$
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm	 $\Delta_{g(x)} \leq 0$	 $\Delta_{g(x)} \leq 0$

Bảng biến thiên

$am > 0$	$am < 0$
----------	----------

x	$-\infty$	$x_{\text{CĐ}}$	$-\frac{n}{m}$	x_{CT}	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$y_{\text{CĐ}}$	$-\infty$	$+\infty$	y_{CT}	$+\infty$
Hàm số có 2 cực trị						

x	$-\infty$	x_{CT}	$-\frac{n}{m}$	$x_{\text{CĐ}}$	$+\infty$	
y'	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$	y_{CT}	$+\infty$	$-\infty$	$y_{\text{CĐ}}$	$-\infty$
Hàm số có 2 cực trị						

x	$-\infty$	$-\frac{n}{m}$	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Hàm số không có cực trị			

x	$-\infty$	$-\frac{n}{m}$	$+\infty$
y'	-		-
y	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Hàm số không có cực trị			

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$), đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

- a) Có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{n}{m}$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = \frac{a}{m}x - \frac{an - bm}{m^2}$.
- b) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng là tiệm cận xiên làm tâm đối xứng, tâm đối xứng này cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị (nếu có).
- c) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Câu 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y = x + \frac{1}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$$

Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Do đó, đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CB} = -1$; đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = 3$.

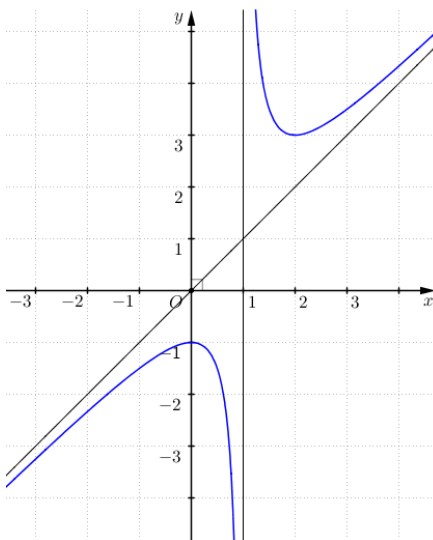
3) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.

· Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

· Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1), \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(-1; -\frac{3}{2}\right), (2; 3), \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ và $\left(3; \frac{7}{2}\right)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ được cho ở Hình.



Quan sát đồ thị ở Hình, đồ thị đó nhận giao điểm $I(1; 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận Hình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Câu 7. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$.

Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y = -x + \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y+x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Do đó, đường thẳng $y=-x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$$y' = -\frac{x^2+1}{x^2}, y' < 0, \forall x \neq 0.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		-
y	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

3) Đồ thị

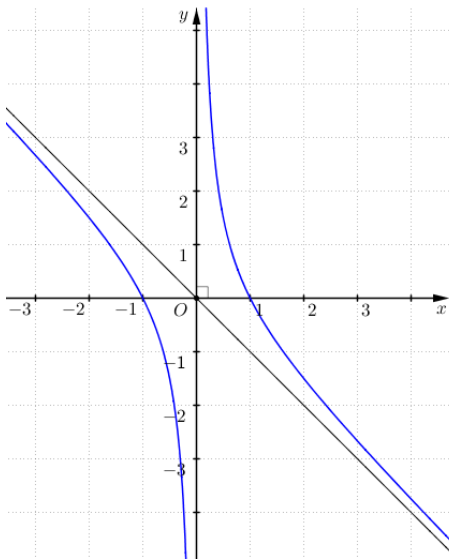
· Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm $(-1; 0), (1; 0)$.

· Đồ thị hàm số không cắt trục tung.

· Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1; 0), (1; 0), \left(-2; \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(2; -\frac{3}{2}\right)$.

· Đồ thị hàm số nhận giao điểm $O(0; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2+1}{x}$ được cho ở Hình.



Câu 8. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = +\infty$$

$$\text{Ta có: } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x} = 1 \quad \text{và} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{x - 1} = 3$$

Suy ra đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	2	$+\infty$	6	$+\infty$	

3. Đồ thị:

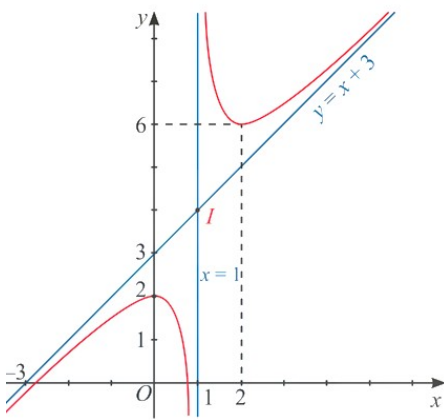
Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{3}$ hoặc $x=-1-\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1+\sqrt{3};0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3};0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$.

Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;4)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=1$ và $y=x+3$.



Câu 9. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-x^2 - 4x - 10}{(x+2)^2}$.

Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq -2$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

- Các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = -\infty.$$

$$\text{Ta có: } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x} = -1 \quad \text{và} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} - (-1)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x + 4}{x + 2} \right) = -1.$$

Suy ra đường thẳng $y = -x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = +\infty$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	-		-
y	$+\infty$ 		$+\infty$ 
	$-\infty$		$-\infty$

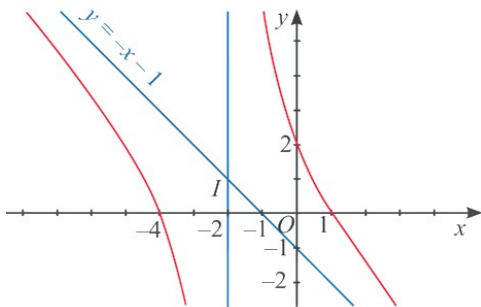
3. Đồ thị:

Ta có $y=0 \Leftrightarrow -x^2-3x+4=0$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1.$$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4;0)$ và điểm $(1;0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 2)$. Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-2; 1)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -2$ và $y = -x - 1$.



$$y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$$

Câu 10. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Lời giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = x + 2 + \frac{1}{x + 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x+2} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x+2} \right) = -\infty.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = -\infty$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = x+2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2};$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = -1.$$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

- Chiều biến thiên:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.

- Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -3, f_{CD} = f(-3) = -2$;

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1, f_{CT} = f(-1) = 2$.

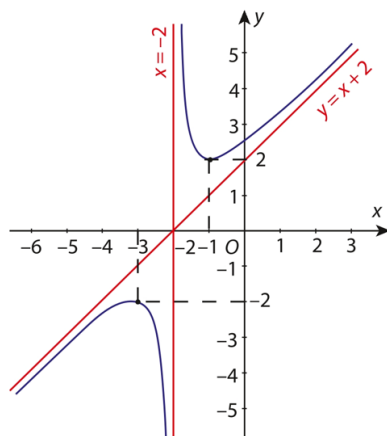
- Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x = -2$ và $y = x+2$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{5}{2}\right)$ và không giao với trục Ox .

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình.



Câu 11. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Lời giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = -x + \frac{2}{x+1}$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2}{x+1} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{2}{x+1} \right) = +\infty.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = -x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Ta có $y' = -1 - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$.

Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, y' không xác định tại $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$-$
y	$+\infty \searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow -\infty$

- Chiều biến thiên: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

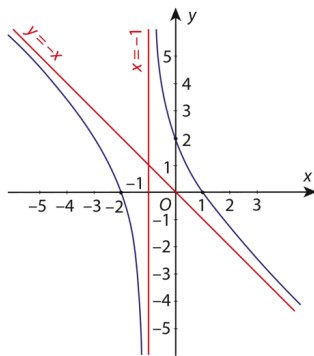
- Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x = -1$ và $y = -x$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại $(0; 2)$ và giao với trục Ox tại $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình.



DẠNG 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$, trong đó m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m=1$
2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

Lời giải

1. Khi $m=1$ thì hàm số là: $y = \frac{x+4}{x+1}$.

⊞ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

⊞ Chiều biến thiên:

$$y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$$

+Ta có:

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$

oGiới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$$

+Ta có: , do đó đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị

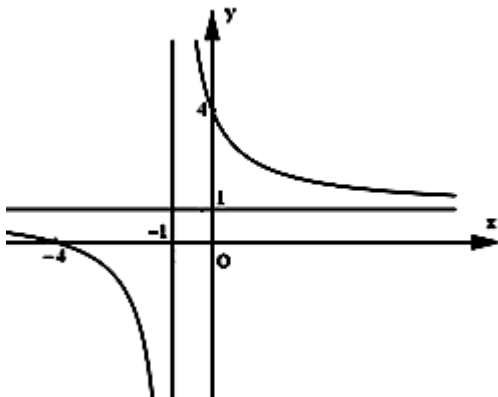
hàm số đã cho (khi $x \rightarrow (-1)^-$ và khi $x \rightarrow (-1)^+$).

+ Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$, nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$)

oBảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$-\infty$	$+\infty$

⊞ Đồ thị: (hình vẽ)



o $y=0 \Rightarrow x=-4; x=0 \Rightarrow y=4$, tức là đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-4; 0)$, cắt trục tung tại $(0; 4)$

o Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(-1; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ x = -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $-2 < m \leq -1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên:

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$$

o Chiều biến thiên:

Suy ra, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

o Cực trị: Hàm số không có cực trị.

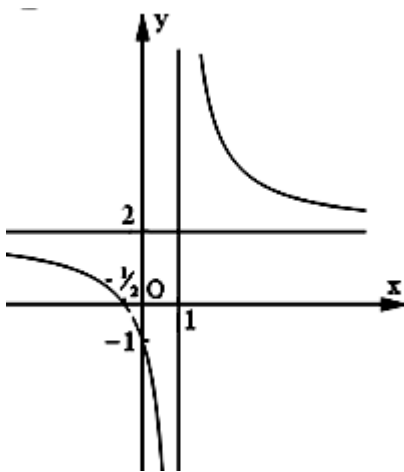
Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$, và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	2	$+\infty$	2

Đồ thị:



Đồ thị cắt trục tung tại $A(0; -1)$, cắt trục hoành tại $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$
 Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(1; 2)$ làm tâm đối xứng.

2. Đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} &= -x + m \\ \Leftrightarrow x - 1 &\text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x + m+1 &= 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác 1.} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \\ 1^2 - (m-2) \cdot 1 + m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 8 \end{cases}$$

Vậy, với $m < 0$ hoặc $m > 8$ thì đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải.

1. Xét hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C)

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Sự biến thiên:

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$$

o Chiều biến thiên:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

o Giới hạn và tiệm cận:

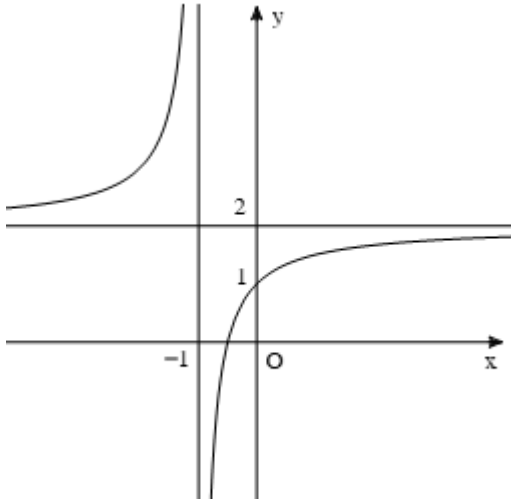
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2; \text{ tiệm cận ngang: } y = 2.$$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty;$ tiệm cận đứng : $x = -1$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	
y	2	$+\infty$	$-\infty$

• Đồ thị :



2. Gọi (d) là đường thẳng $y = kx + 2k + 1$. Khi đó hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình :

$$\begin{aligned} kx + 2k + 1 &= \frac{2x+1}{x+1} \\ \Leftrightarrow (x+1)(kx + 2k + 1) &= 2x + 1 \quad (\text{do } x = -1 \text{ không là nghiệm}) \\ \Leftrightarrow kx^2 + (3k - 1)x + 2k &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì (1) cần có hai nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (3k - 1)^2 - 8k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - (k + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi k thỏa mãn (2) ta có: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$, ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1).

$$\text{Ta có : } d(A, Ox) = d(B, Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x_1 - x_2) = 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \quad (\text{do } k \neq 0) \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

Theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{1-3k}{k}$, từ đó ta có :

$$k \frac{1-3k}{k} + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

Rõ ràng $k = -3$ thỏa mãn (2), nên là giá trị duy nhất cần tìm của tham số k .

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số:

$$y = \frac{2|x|}{|x|-1} \quad (C_1)$$

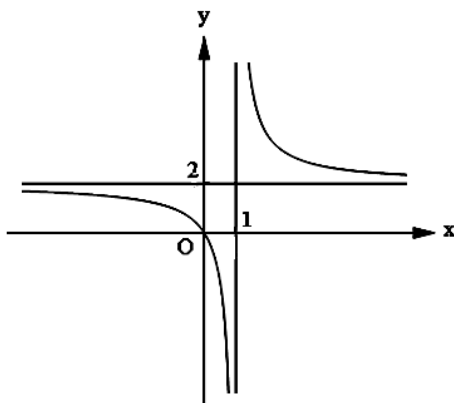
2. Biện luận theo m số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của phương trình: $(m-2)|x| - m = 0$

Lời giải.

1. + Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	2	$+\infty$	2

+ Đồ thị (C)



$$(C_1): y = \frac{2|x|}{|x|-1} = \frac{2x}{x-1} \text{ khi } x \geq 0$$

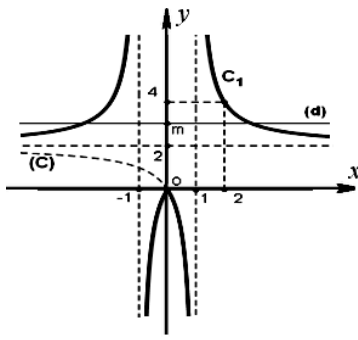
*Ta có:

Mặt khác $y = \frac{2|x|}{|x|-1}$ là hàm số chẵn nên (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng. Vậy đồ thị của hàm số

$y = \frac{2|x|}{|x|-1} \quad (C_1)$ gồm hai phần:

+Phần 1: Phần của (C) khi $x \geq 0$.

+ Phần 2: Đối xứng của phần 1 qua Oy.



$$(m-2)|x| - m = 0 \Leftrightarrow \frac{2|x|}{|x|-1} = m \quad (1)$$

2. Ta có:

Số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của (1) là số giao điểm của (C_1) và $(d): y = m$ trên đoạn $[-1; 2]$. Nhìn vào đồ thị ta thấy:

⊆ Khi $\begin{cases} m \geq 4 \\ m = 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có một nghiệm $x \in [-1; 2]$.
 ⊆ Khi $m < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x \in [-1; 2]$.
 Khi $0 < m < 4$ thì phương trình (1) không có nghiệm

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ;

2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0; \frac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Lời giải.

1. • Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Sự biến thiên: $y' = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

$$y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y - (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y - (-x + 2) = 0 \Rightarrow y = -x + 2$ là tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$		
y'	-	0	+	+	0	-	$+\infty$
y	$+\infty$						$+\infty$

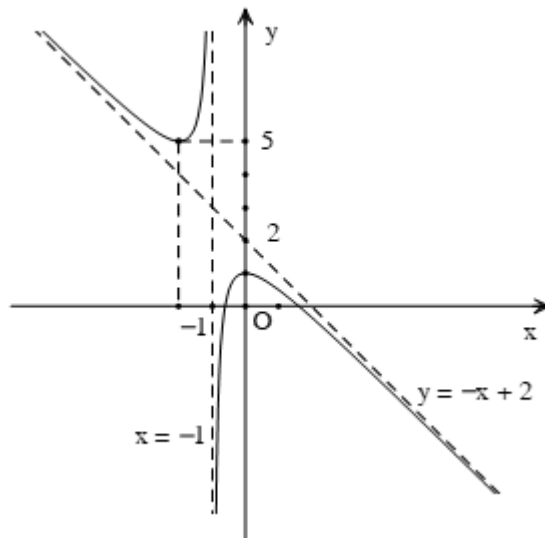
↘ 5 ↗

Cực tiểu

↘ 1 ↗

Cực đại

Đồ thị nhận điểm $I(-1;3)$ làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại $(0,1)$, cắt trục Ox tại $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.



2. Gọi (d) là đường thẳng $y = kx + \frac{5}{4}$.

Để (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ:

$$\begin{cases} \frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = kx_0 + \frac{5}{4} & (1) \\ \frac{-x_0^2 - 2x_0}{(x_0 + 1)^2} = k & (2) \end{cases} \quad \text{có nghiệm } x_0$$

Thế k từ (2) vào (1): $\frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = \frac{-x_0^2 - 2x_0}{(x_0 + 1)^2} \cdot x_0 + \frac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ (-x_0^2 + x_0 + 1)(x_0 + 1) = -x_0^2 - 2x_0 + \frac{5}{4}(x_0 + 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ 3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

• Tại $x_0 = 1 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$, có tiếp tuyến $(T_1): y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

• Tại $x_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{5}{4}$, có tiếp tuyến $(T_2): y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Dựa vào đồ thị của hàm số ở câu 1, vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1}$ và từ đồ thị của hàm số này, biện luận về số nghiệm của phương trình $\frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} = a$ theo các giá trị của tham số a .

Lời giải.

1. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} = x + 1 - \frac{2}{x + 1}.$

• Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

• Sự biến thiên: $y' = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} > 0$ với mọi x thuộc D : hàm số luôn luôn đồng biến trên D , không có cực đại và cực tiểu.

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$

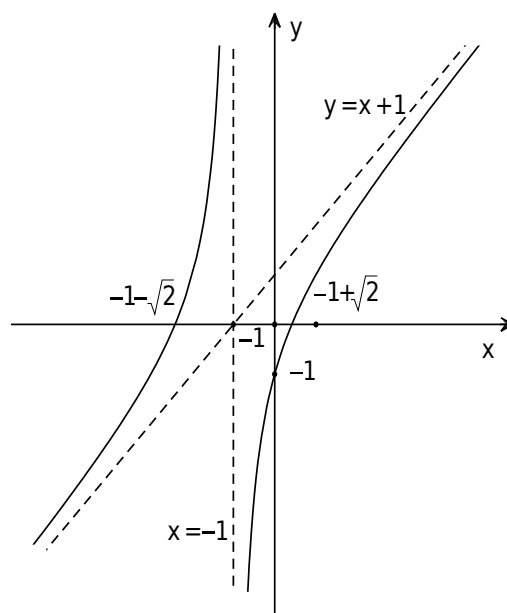
$\Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y - (x + 1) = 0 \Rightarrow y = x + 1$ là tiệm cận xiên.

o Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$

Đồ thị nhận điểm $I(-1; 0)$ làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại $(0, -1)$, cắt trục Ox tại $(-1 - \sqrt{2}; 0), (-1 + \sqrt{2}; 0)$.

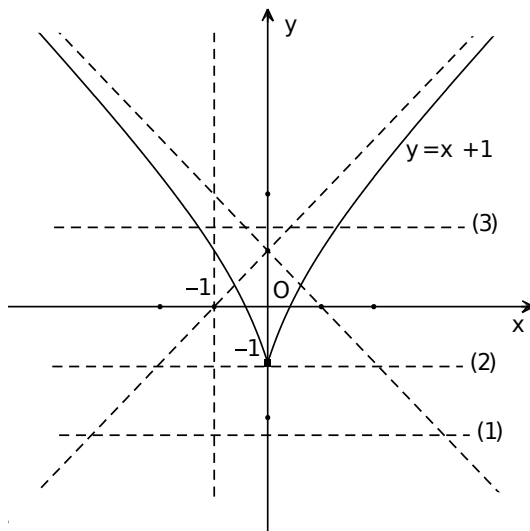


2. $y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1}$ là một hàm số chẵn (do $f(-x) = f(x)$) nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

• Vẽ phần đồ thị của (1) ứng với $x \geq 0$.

• Lấy đối xứng của phần đồ thị trên qua trục Oy sẽ được đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} \quad (\text{hình bên}).$$



Số giao điểm của đường thẳng $y = a$ và đồ thị này là số nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} = a.$$

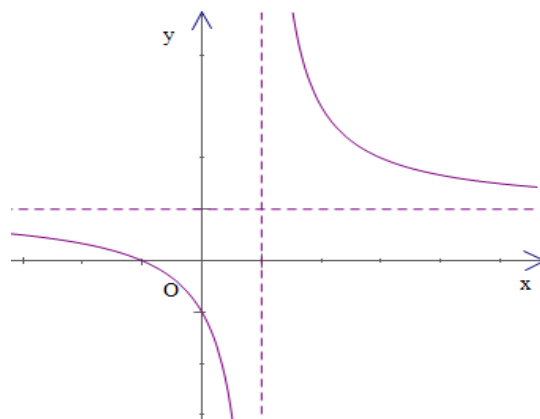
Xét qua 3 vị trí của đường thẳng $y = a$:

(1): $a < -1$: vô nghiệm;

(2): $a = -1$: một nghiệm $x = 0$;

(3): $a > -1$: thỏa nghiệm.

Câu 18. (Sở Cần Thơ - 2021) Cho hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ ($a \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như sau:



Xác định dấu của a, b, c

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ có tiệm cận đứng $x = a$, tiệm cận ngang $y = b$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0; \frac{c}{a}\right)$.

Nhìn hình vẽ ta thấy:
$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Câu 19. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax - 6}{bx - c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Suy ra
$$\begin{cases} \frac{c}{b} = -2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc < 0 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, c < 0, a > 0 \quad (1) \\ b < 0, c > 0, a < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x) = \frac{-ac + 6b}{(bx - c)^2} < 0 \Rightarrow ac > 6b$.

Ta thấy ⁽¹⁾ không thể xảy ra do nếu $b > 0$ thì $ac > 6b > 0$; và ⁽²⁾ có thể xảy ra do nếu $c > 0, a < 0$ thì $6b < ac < 0$.

Vậy trong các số a, b, c có hai số âm.

BỔ SUNG ngày 7-6-2024

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$

Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

Giải

$$y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = x + 3 + \frac{1}{x - 2}$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 3 \Rightarrow y = 7 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2 \pm} y = \pm \infty : x = 2$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = x + 3 \Rightarrow y = x + 3$ là tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:

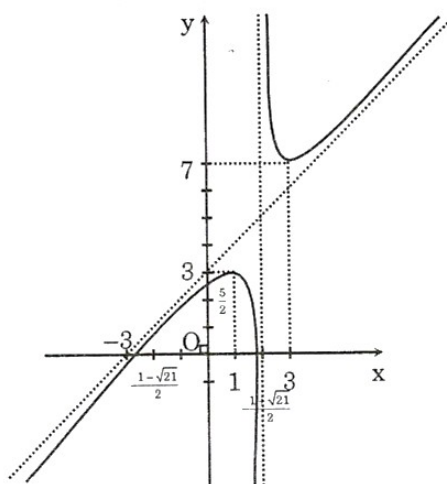
x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 7$	$\nearrow +\infty$	

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Đồ thị:



$$y = x - \frac{1}{x+1}$$

Câu 21. Cho hàm số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) (C) cắt trục Oy tại M . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M

c) Chứng minh rằng không thể có hai tiếp tuyến của (C) vuông góc với nhau

d) Tìm k để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$

e) Tìm những điểm thuộc trục Oy để từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm ở về hai phía của trục Oy .

Giải

a) $y = x - \frac{1}{x+1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$y' = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$: hàm số luôn luôn đồng biến, không có cực đại, cực tiểu

$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} y = \pm\infty : x = -1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = x : y = x$ là tiệm cận xiên

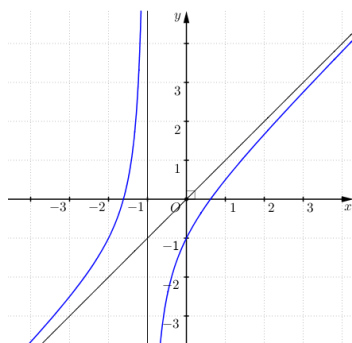
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

$y = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Đồ thị: Tâm đối xứng $I(-1, -1)$



b) $M(0, -1), y'_0 = 2$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M : y = 2(x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

c) Tiếp tuyến (T_1) của (C) tại $P(x_1, y_1)$ có hệ số góc $k_1 = y'_{x_1} = 1 + \frac{1}{(x_1 + 1)^2} > 0$

Tiếp tuyến (T_2) của (C) tại $Q(x_2, y_2)$ có hệ số góc $k_2 = y'_{x_2} = 1 + \frac{1}{(x_2 + 1)^2} > 0$

Do $y'_{x_1} > 0, y'_{x_2} > 0$ nên không thể có 2 tiếp tuyến của (C) vuông góc nhau

d) $y = x - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 + x - 1}{x+1}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = k$:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x+1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - (k-1)x - (k+1) = 0(*) \end{cases}$$

Do vị trí của (C) trên hệ tọa độ Oxy , có thể kết luận $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt

$$x_A, x_B \neq -1 \text{ và } \begin{cases} x_A + x_B = k-1 \\ x_A \cdot x_B = -(k+1) \end{cases} A(x_A; k), B(x_B; k)$$

$$\overrightarrow{OA} = (x_A, k), \overrightarrow{OB} = (x_B, k)$$

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + k^2 = 0 \Leftrightarrow -k-1+k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

e) Gọi $D(0, d) \in Oy$ và d là đường thẳng $y = kx + d$: d tiếp xúc (C) khi và chỉ khi hệ phương

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x - 1}{x+1} = kx + d & (1) \\ \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

trình sau có nghiệm:

$$\text{Thế } k \text{ từ (2) vào (1): } \frac{x^2 + x - 1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} \cdot x + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x^2 + x - 1)(x+1) = (x^2 + 2x + 2)x + d(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ dx^2 + 2dx + d + 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Thế $x = -1$ vào $(*)$: $d - 2d + d + 1 \neq 0 \forall d$: $x = -1$ không phải là nghiệm của $(*) \forall d$

Để d tiếp xúc (C) tại hai điểm ở hai phía khác nhau của trục Oy thì $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow \frac{d+1}{d} < 0 \Leftrightarrow -1 < d < 0$$

Các điểm cần tìm thuộc trục Oy có tung độ $d \in (-1, 0)$

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2(m+1)x - 5}{x-1}$

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu

b) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m=0$

c) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M > 1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C))

Giải

a) $y = \frac{-x^2 + 2(m+1)x - m - 5}{x-1}$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x - 2m - 2 + m + 5}{(x-1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - m + 3}{(x-1)^2}$$

y có cực đại cực tiểu khi phương trình $-x^2 + 2x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m + 3 = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4, x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình
 $y' = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 - m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Điều kiện sau cùng: $m < 4$

b) Khi $m=0$: $y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x-1} = -x + 1 - \frac{4}{x-1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 3 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$; $x=1$ là tcd

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -x + 1$; $y = -x + 1$ là tcx

Bảng biến thiên:

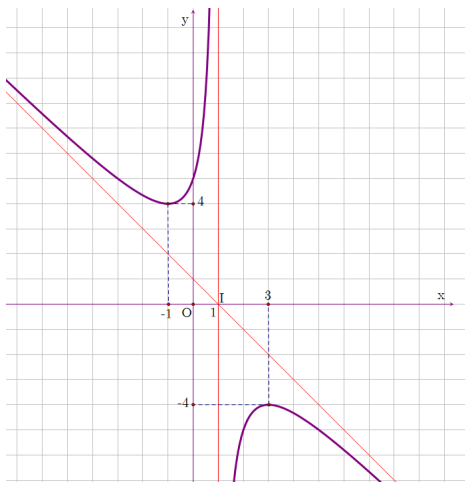
x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	-4
							$-\infty$

$$x=0 \Rightarrow y=5$$

$$y=0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Đồ thị hàm số không cắt Ox .

Đồ thị:



c) $x_M > 1 \Rightarrow M$ thuộc nhánh bên phải của (C). $I(1,0)$

$$M \left(m, -m+1 - \frac{4}{m-1} \right)$$

$$\begin{aligned} IM^2 &= (m-1)^2 + \left[(-m+1)^2 + \frac{16}{(m-1)^2} + 8 \right] \\ &= 2(m-1)^2 + \frac{16}{(m-1)^2} + 8 \geq 2\sqrt{2}(m-1) \cdot \frac{4}{(m-1)} + 8 \\ &\Rightarrow IM^2 \geq 8(\sqrt{2}+1) \Rightarrow IM \geq \sqrt{8(\sqrt{2}+1)} \end{aligned}$$

$$IM \text{ ngắn nhất khi } \frac{2(m-1)^2}{(m-1)^2} = \frac{16}{(m-1)^2} \Leftrightarrow (m-1)^4 = 8 \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt[4]{8}$$

$$\Rightarrow y_M = -\sqrt[4]{8} - \frac{4}{\sqrt[4]{8}}$$

$$\text{Điểm cần tìm: } M \left(1 + \sqrt[4]{8}; -\sqrt[4]{8} - \frac{4}{\sqrt[4]{8}} \right)$$

Câu 23. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$

b) Tìm những điểm trên trục tung sao cho qua đó kẻ được 2 tiếp tuyến của (C) tiếp xúc (C) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh khác nhau.

Giải

$$\text{a) } y = \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}. \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$y=1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=2 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \pm \infty : x=1 \text{ là tcd}$$

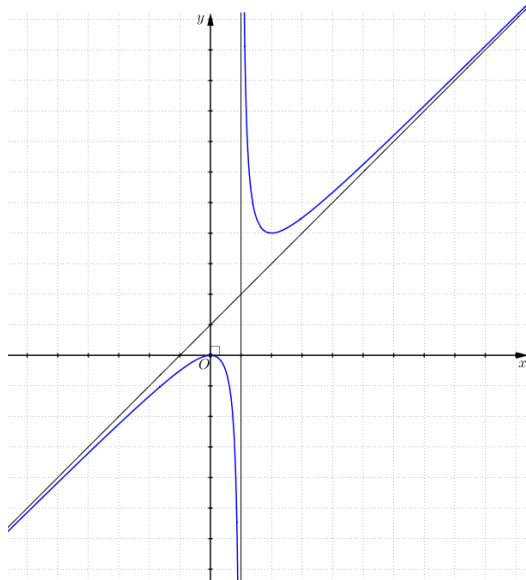
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = x+1 \Rightarrow y=x+1 \text{ là ttx}$$

Đồ thị đi qua gốc O

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	$+\infty$	4	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị:



b) Gọi $M(0, m) \in Oy$ và d là đường thẳng $y = kx + m$.

d tiếp xúc (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm khác 1:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = kx + m & (1) \\ \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế k từ (2) vào (1):

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2(x-1) = x^3 - 2x^2 + m(x^2 - 2x + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (m-1)x^2 - 2mx + m = 0 (*) \end{cases}$$

Thế $x=1$ vào (*): $m-1-2m+m=-1 \neq 0 \forall m: x=1$ không phải là một nghiệm của (*)

(*) có $\Delta' = m^2 - m(m - 1) = m$

Theo yêu cầu bài toán: (*) phải có 2 nghiệm $x_1 < 1 < x_2$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{m}{m-1} - \frac{2m}{m-1} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{-1}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy những điểm $M(0, m) \in Oy$ có $m > 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{-mx^2 + (4m - 2)x + 1 - 4m}{x - 1}$

a) Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực đại và cực tiểu trong miền $x > 0$

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với $m = 1$

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $x - y = 0$

d) Dựa vào đồ thị (C) , biện luận theo a số nghiệm của phương trình: $-2x + 1 - \frac{2}{x - 1} = a$

Giải

a) $y = \frac{-mx^2 + (4m - 2)x + 1 - 4m}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{-mx^2 + 2mx - 4m + 2 - 1 + 4m}{(x - 1)^2}$

$y' = \frac{-mx^2 + 2mx + 1}{(x - 1)^2}$

Dấu y' là dấu của tam thức $g(x) = -mx^2 + 2mx + 1$

$g(x)$ có $\Delta' = m^2 + m$

$g(1) = -m + 2m + 1 = m + 1$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \end{cases}$

Lúc này, hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại $x = x_1, x = x_2$ và $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{m} \end{cases}$.

Giả sử $x_1 < x_2$

Theo yêu cầu bài toán:

$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ -\frac{1}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$

Giao với điều kiện $\Delta' > 0$ được $m < -1$

b) Khi $m = 1$: $y = \frac{-x^2 + 2x - 3}{x - 1} = -x + 1 - \frac{2}{x - 1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -2\sqrt{2} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} y = \pm\infty : x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -x + 1 : y = -x + 1$ là tiệm cận xiên

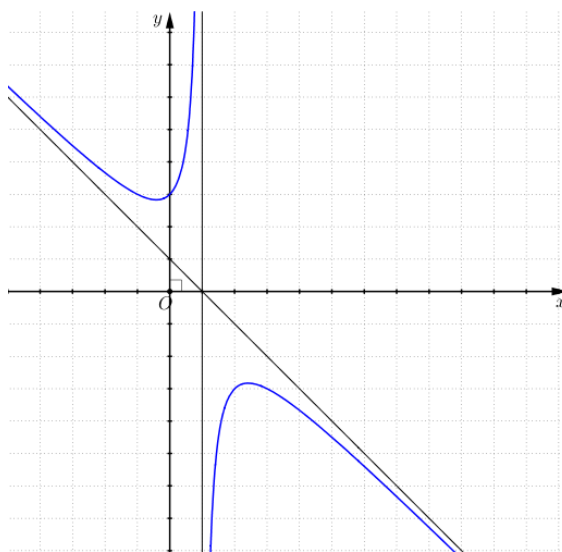
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
y'		-	0	+		+	0	-
y	$+\infty$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$		$-2\sqrt{2}$	
			CT				CD	

$$x = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ (vô nghiệm), đồ thị hàm số không cắt trục } Ox$$

Đồ thị:



$$c) \quad y'_x = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x - 1)^2}$$

Đường thẳng $x - y = 0$ có hệ số góc $k = 1$

Để tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = x$, cần và đủ là

$$\begin{aligned} y'_x = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x - 1)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ -x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán:

$$(T_1): y = 1(x - 0) + 3 \Leftrightarrow y = x + 3$$

$$(T_2): y = 1(x - 2) - 3 \Leftrightarrow y = x - 5$$

$$-2x+1-\frac{2}{x-1}=a \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ -x+1-\frac{2}{x-1}=x+a \end{cases}$$

d)

$\Rightarrow$ Số giao điểm của (C) và đường thẳng $y=x+a // (T_1) // (T_2)$ là số nghiệm của phương trình.
Dựa vào đồ thị và kết quả câu c, ta có kết luận:

$a < -5 : 2$ nghiệm

$a = -5 : 1$ nghiệm kép

$-5 < a < 3 : 0$ nghiệm

$a = 3 : 1$ nghiệm kép

$a > 3 : 2$ nghiệm

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị là đường cong (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$

c) Dựa vào đồ thị (C) , tìm m để phương trình $x^2 + 3x + 3 = m|x + 2|$ có 4 nghiệm phân biệt

Giải

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = x + 1 + \frac{1}{x + 2}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} y = \pm\infty : x = -2$ là tđ

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = x + 1 \Rightarrow y = x + 1$ là tđ

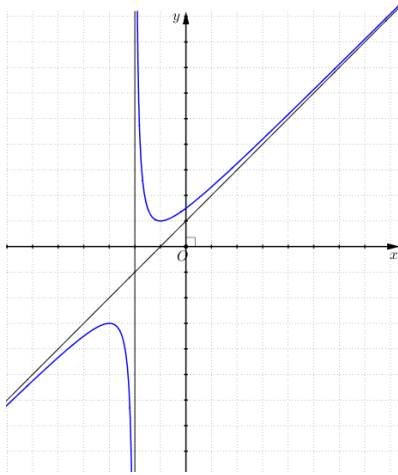
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3		-2		-1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y			-3			$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$			$-\infty$			1	

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Đồ thị không cắt trục Ox

Đồ thị:



b) Đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$ có hệ số góc $k_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ tiếp tuyến của

(C) vuông góc với đường thẳng này có hệ số góc $k_2 = -3$

Xét phương trình $y'_x = -3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 + 4x + 3 = -3x^2 - 12x - 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ 4x^2 + 16x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{7}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tại $A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_1): y = -3\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 11$

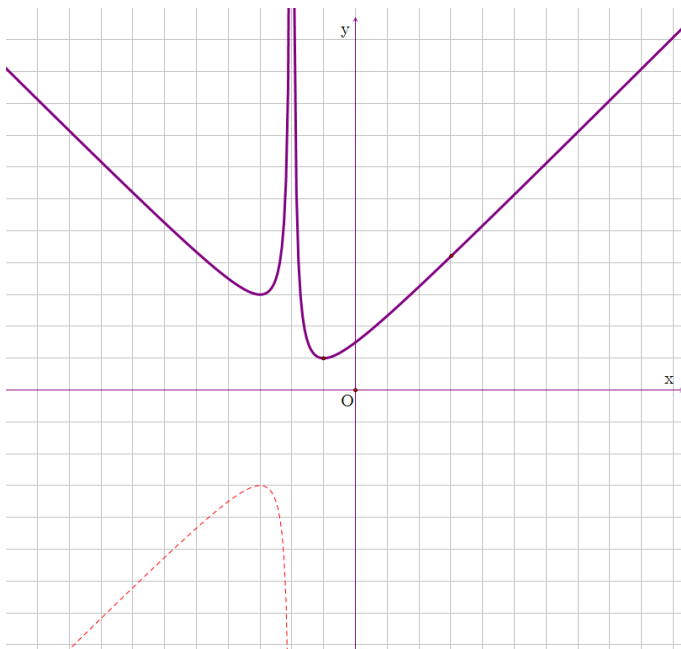
Tại $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_2): y = -3\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 3$

$$x^2 + 3x + 3 = m |x + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \frac{x^2 + 3x + 3}{|x + 2|} = m \end{cases}$$

c)

$\Rightarrow$ Số giao điểm của đồ thị (C_1)

$$y = \frac{x^2 + 3x + 3}{|x + 2|} = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} & (1) \text{ nếu } x > -2 \\ -\left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}\right) & (2) \text{ nếu } x < -2 \end{cases}$$



(1): bên phải tiệm cận đứng: giữ nguyên (C)

(2): bên trái tiệm cận đứng: lấy đối xứng của (C) qua trục Ox

(C_1) là đường có nét liền, đậm

Số giao điểm của (C_1) và đường thẳng $y = m$ là số nghiệm của phương trình. Vị trí của đường thẳng $y = m$ để có 4 giao điểm với (C_1) là $m > 3$

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + m}{x - 2}$ có đồ thị là đường cong (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 3$

b) Tìm k để phương trình $x^2 - 3x + 3 = k|x - 2|$ có đúng 3 nghiệm

c) Tìm m để (C_m) có hai điểm phân biệt A, B đối xứng qua gốc tọa độ.

Giải

a) Khi $m = 3: y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = x - 1 + \frac{1}{x - 2}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} y = \pm\infty: x = 2$ là tcd

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = x - 1: y = x - 1$ là ttx

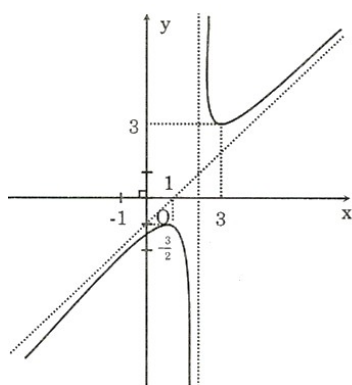
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

$$x=0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

Đồ thị không cắt trục Ox

Đồ thị:



b) $x^2 - 3x + 3 = k|x - 2|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{x^2 - 3x + 3}{|x - 2|} = k(*) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Số giao điểm của đồ thị $(C_1): y = \frac{x^2 - 3x + 3}{|x - 2|}$ và đường thẳng $y = k$ là số nghiệm của phương trình (*)

$$(C_1): y = \frac{x^2 - 3x + 3}{|x - 2|} = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} & (1) \\ -\left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}\right) & (2) \end{cases}$$

(1) nếu $x > 2$

(2) nếu $x < 2$

$\Rightarrow$ Bên trái tiệm cận đứng, (2) là hình đối xứng của (C) qua trục Ox Bên phải tiệm cận đứng: (1): giữ nguyên (C)

Đồ thị (C_1) là đường có nét liền:

Vị trí của đường thẳng $y = k$ để nó cắt (C_1) tại đúng 3 điểm là $k = 3$

c) Gọi $A\left(x_1, \frac{x_1^2 - 3x_1 + 3}{x_1 - 2}\right); B\left(-x_1, \frac{x_1^2 + 3x_1 + 3}{-x_1 - 2}\right)$, A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + 3x_1 + 3}{-x_1 - 2} + \frac{x_1^2 - 3x_1 + 3}{x_1 - 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1^2 + 3x_1 + 3)(x_1 - 2) - (x_1^2 - 3x_1 + 3)(x_1 + 2)}{-(x_1 + 2)(x_1 - 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq \pm 2 \\ x_1^3 + x_1^2 - 3x_1 - 6 - (x_1^3 - x_1^2 - 3x_1 + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq \pm 2 \\ 2x_1^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{6} \Rightarrow y_1 = \sqrt{6} - 1 + \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \frac{9 - 3\sqrt{6}}{\sqrt{6} - 2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ x_2 = -\sqrt{6} \Rightarrow y_2 = -\sqrt{6} - 1 + \frac{1}{-\sqrt{6} - 2} = \frac{-9 - 3\sqrt{6}}{-\sqrt{6} - 2} = \frac{-3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$A\left(\sqrt{6}, \frac{3\sqrt{6}}{2}\right), B\left(-\sqrt{6}, -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$$

Cặp điểm cần tìm là

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có đồ thị là đường cong (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số khi $m = 1$

b) Tìm k để phương trình $x^2 + (1 - k)x + k - 1 = 0$ không có nghiệm âm

c) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x$ cắt (C_m) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C_m)

Giải

a) $m = 1: y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} y = \pm\infty: x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = x + 2: y = x + 2$ là tiệm cận xiên

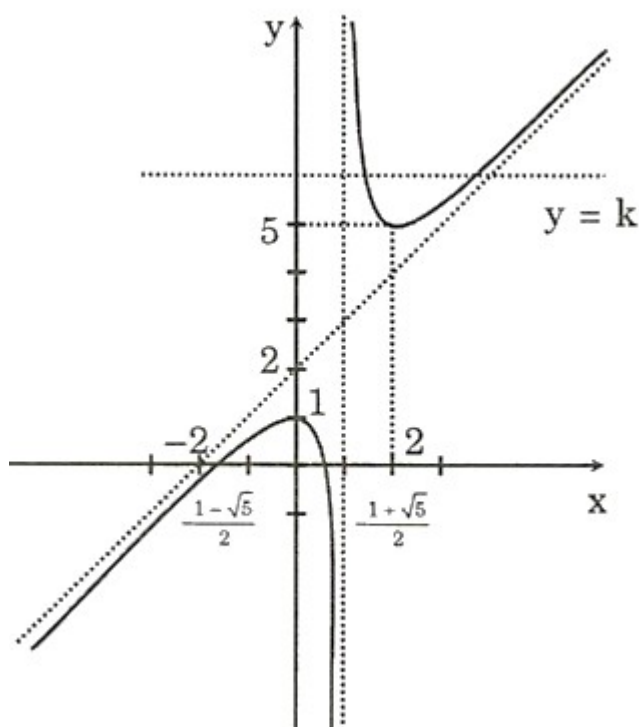
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	5	$+\infty$	

$$x=0 \Rightarrow y=1$$

$$y=0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Đồ thị:



b) $x^2 + (1-k)x + k - 1 = 0$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = k(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x^2 + x - 1}{x-1} = k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Số giao điểm của đồ thị (C_1) và đường thẳng $y=k$ là số nghiệm của phương trình

Nhìn đồ thị, ta thấy để phương trình (*) không có nghiệm âm thì $k \geq 5$

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) :

$$\frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + mx - 1 = 2x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - (m+2)x + 1 = 0 \end{cases}$$

Để d cắt C_m tại hai điểm thuộc 2 nhánh của (C_m) , ta phải có $x_1 < 1 < x_2$, với x_1, x_2 là 2 hoành độ của 2 giao điểm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$\forall i \begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - (m + 2) + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ có đồ thị là đường cong (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 4 = 0$ và tiếp điểm có hoành độ âm.

c) Chứng minh rằng trên (C) không thể tồn tại hai điểm M, N để hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

d) Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của (C) đều không đi qua gốc tọa độ O .

Giải

$$a) \quad y = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in D \quad : \text{hàm số luôn luôn đồng biến, không có cực đại, cực tiểu}$$

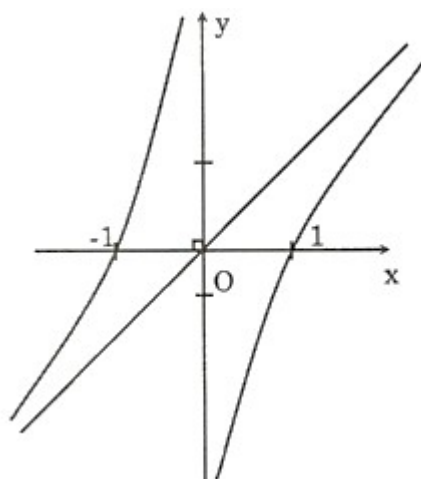
$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$: là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = x \Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị không cắt Oy : $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$



b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

$x + 2y - 4 = 0$ sẽ có hệ số góc $k = 2$

Xét phương trình $1 + \frac{1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

Tại $A(-1, 0)$ có tiếp tuyến $(T_1): y = -1(x + 1) + 0 \Leftrightarrow y = -x - 1$

Tại $B(1, 0)$ có tiếp tuyến $(T_2): y = -1(x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = -x + 1$

c) Tiếp tuyến tại $M\left(x_1, x_1 - \frac{1}{x_1}\right)$ có hệ số góc $k_1 = \left(1 + \frac{1}{x_1^2}\right) > 0$

Tiếp tuyến tại $N\left(x_2, x_2 - \frac{1}{x_2}\right)$ có hệ số góc $k_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2^2}\right) > 0$

$\Rightarrow k_1 \cdot k_2 > 0 \Leftrightarrow$ không tồn tại hai điểm $M, N \in (C)$ để hai tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

d) Gọi $M\left(x_M, x_M - \frac{1}{x_M}\right) \in (C); y'_M = 1 + \frac{1}{x_M^2}$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (T) của (C) tại M :

$$y = \left(1 + \frac{1}{x_M^2}\right)(x - x_M) + x_M - \frac{1}{x_M}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(1 + \frac{1}{x_M^2}\right)x - x_M - \frac{1}{x_M} + x_M - \frac{1}{x_M} \Leftrightarrow y = \left(1 + \frac{1}{x_M^2}\right)x - \frac{2}{x_M}$$

Nếu (T) qua $O \Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{x_M}$ vô lý vì vế phải luôn $\neq 0, \forall x_M \neq 0$

$\Rightarrow$ Mọi tiếp tuyến của (C) đều không đi qua O .

$$y = \frac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + 4}{2(x+m)}$$

Câu 29. Cho hàm số

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$

b) Tìm điều kiện của m để hàm số (1) có 2 điểm cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm này.

Giải

a) Khi $m = 0: y = \frac{x^2 + x + 4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} y = \pm\infty: x = 0$ là tiệm cận đứng

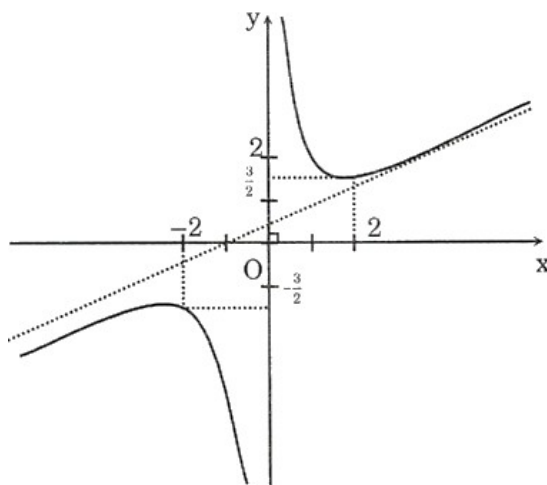
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}: y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y			$-\infty$		$+\infty$		$-\infty$	

Đồ thị không cắt cả hai trục tọa độ

Đồ thị:



b) $y = \frac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + 4}{2(x+m)}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 2mx + m(2m+1) - m^2 - m - 4}{(x+m)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 4}{(x+m)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = -m + 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$\forall m, (C_m)$ luôn có hai điểm cực trị là

$$A\left(-m-2, -\frac{3}{2}\right) \text{ (điểm cực đại); } A\left(-m+2, \frac{5}{2}\right) \text{ (điểm cực tiểu)}$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x-1}$ có đồ thị (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_{-1}) của hàm số khi $m = -1$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C_{-1}) , biết tiếp tuyến này song song với đường thẳng $3x + 4y - 5 = 0$

c) Tìm m để (C_m) có cực đại và cực tiểu với hoành độ dương

d) Tìm m để (C_m) cắt Ox tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{5}$

e) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^4 + (m-1)x^2 + (1-m) = 0$

Giải

a) Khi $m = -1$: (C_{-1}) : $y = \frac{-x^2 + x - 1}{x-1} = -x - \frac{1}{x-1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=-3 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y = \pm\infty$: $x=1$ là tcd

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -x$: $y = -x$ là ttx

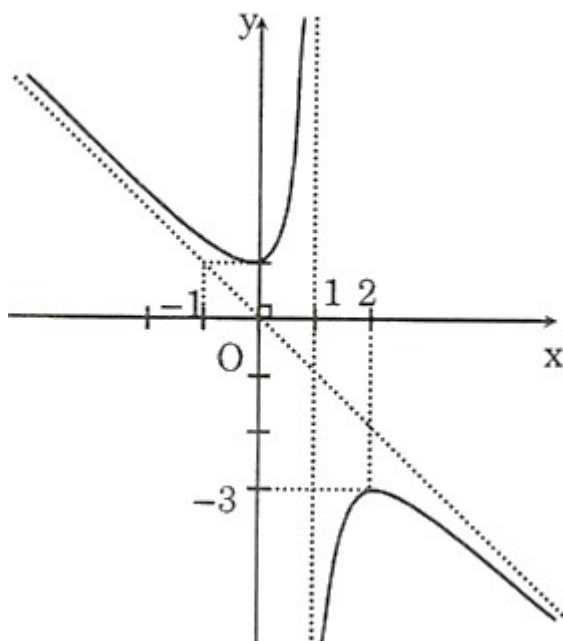
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	$+\infty$	$-\infty$	-3	$-\infty$

$$x=0 \Rightarrow y=1$$

Không cắt trục Ox

Đồ thị:



b) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x + 4y - 5 = 0$ sẽ có hệ số góc

$$y'_x = k = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 4x^2 - 8x = 3x^2 - 6x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ x = 3 \Rightarrow y = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Có 2 tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán:

$$(T_1): y = -\frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$(T_2): y = -\frac{3}{4}(x-3) - \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$\text{c) } y = \frac{mx^2 + x + m}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{mx^2 - 2mx - 1 - m}{(x-1)^2}$$

Dấu y' là dấu của tam thức $g(x) = mx^2 - 2mx - 1 - m$.

Tam thức này có $\Delta' = m^2 + m(1+m) = 2m^2 + m$

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases}$$

Để có cực đại, cực tiểu thì

$$x_1, x_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-(m+1)}{m} \end{cases}$$

Lúc này các điểm cực đại, cực tiểu là

$$\text{Theo yêu cầu bài toán: } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ \frac{-(m+1)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$$

Giao với $\Delta' > 0$ được $-1 < m < -\frac{1}{2}$

d) Phương trình hoành độ giao điểm A, B của (C_m) và trục Ox :

$$\frac{mx^2 + x + m}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ m^2 + x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \neq 0 \\ \Delta = 1 - 4m^2 > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x_A &= \frac{-1 - \sqrt{1-4m^2}}{2m} \\ x_B &= \frac{-1 + \sqrt{1-4m^2}}{2m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{1-4m^2}}{m}$$

Theo yêu cầu bài toán:

$$AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-4m^2}}{m} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{1-4m^2} = \sqrt{5}m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1-4m^2 = 5m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 9m^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$

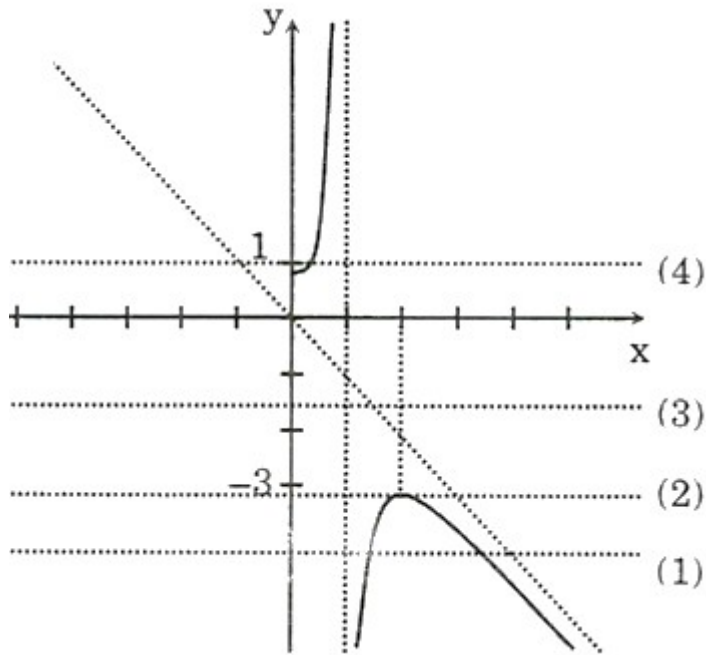
$$\text{e) } x^4 + (m-1)x^2 + (1-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 = -m(x^2 - 1) \Leftrightarrow m = \frac{-x^4 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

Đặt: $x^2 = t (t \geq 0)$ ta có phương trình trung gian: $\frac{-t^2 + t - 1}{t - 1} = m$

$\Rightarrow$ số giao điểm của đồ thị (C) phần bên phải trục Oy với đường thẳng $y = m$ là số nghiệm của phương trình

Cho đường thẳng $y = m$ biến thiên qua 4 vị trí:



(1): $m < -2$: 2 nghiệm

(2): $m = -2$: 1 nghiệm kép $x = 1$

(3): $-2 < m < 1$: vô nghiệm

(4): $m > 1$: 1 nghiệm