**Chuyên đề 4: SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN**

**A. Kiến thức cần nhớ**

Giả sử a, b, c là các số nguyên dương, ta có các tính chất sau

1. Nếu  2. Nếu 

3. Nếu  ( BCNN) 4. 

5. Nếu  6. Nếu 

7. Nếu  8. Nếu 

9. Trong n số nguyên liên tiếp có 1 và chỉ 1 số chia hết cho n

10. Tính chất chia hết của một tổng, của một hiệu, một tích

+)  +)  +) 

**B. Bài tập và các dạng toán**

**Dạng 1: Chứng minh quan hệ chia hết**

- Để chứng minh biểu thức A(n) chia hết cho số m, ta phân tích A(n) thành nhân tử, trong đó có 1 nhân tử là m 

- Nếu m là hợp số, ta phân tích m thành tích các thừa số đôi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh A(n) chia hết cho tất cả các số đó.

- Khi chứng minh A(n) chia hết cho m thực chất là ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A(n) cho m

**Bài 1:** Chứng minh rằng

a.  b. 

c.  d. 

Lời giải:

a. Ta có : 

b. 

c. 

d. 

+) Nếu 

+) Nếu 

+) Tương tự như vậy ta xét a = 7k + 2,3,4,5,6 đều chia hết cho 7. (đpcm)

**Bài 2:** Chứng minh rằng

a.  b. 

c.  d. 

Lời giải:

a. Ta có: 

b. 

c. 

d. 

**Bài 3:** Chứng minh với mọi n lẻ thì

a.  b. 

c.  d. 

Lời giải:

a. Ta có: 

Vì n là số lẻ nên n + 1 và n + 3 là tích của hai số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8

b. 

Vì n lẻ, đặt n = 2k + 1 

c. 

d. 

Đặt n = 2k + 1 ( k thuộc Z )



**Bài 4:** Chứng minh rằng số 

Lời giải:



Là tích của 7 số nguyên liên tiếp

+) Tồn tại 1 bội của 7 và 1 bội của 5

+) Tồn tại 2 bội của 3 ( chia hết cho 9)

+) Tồn tại 3 bội của 2 có 1 bôi của 4 nên chia hết cho 16

Vậy A chia hết cho 5040

**Bài 5:** Chứng minh rằng 

Lời giải:







**Bài 6:** Chứng minh rằng: 

Lời giải:



 là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 8.5.3=120.

**Bài 7:** Chứng minh rằng với mọi n chẵn ta có:

a. b. , n chẵn )

Lời giải:

a. 

Đặt n = 2k 

b. Đặt 

**Bài 8:** Chứng minh rằng với mọi n lẻ thì : 

Lời giải: 1152 = 9.27 = 32.27





Vì n lẻ nên n – 1 và n + 1 là 2 số chẵn liên tiếp  có 1 số chia hết cho 4  tích 2 số chẵn chia hết cho 8, mặt khác n2 + 1 là số chẵn  chia hết cho 2 

Từ (1)(2) 

**Bài 9:** Cho m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp, CMR: mn – m – n chia hết 192

Lời giải:

Đặt 



Ta đi chứng minh A chia hết cho 64 và 3



**Bài 10:** Cho n là số tự nhiên, chứng minh rằng:

a.  b. 

Lời giải:

a. 

b. 

Lại có: n + 1 + n – 1 = 2n chia hết cho 2 nên n + 1 và n – 1 cùng tính chẵn lẻ

N + 3n + 2 = 4n + 2 chia hết cho 2 nên n và 3n + 2 cùng tính chẵn lẻ

Do đó A luôn có ít nhất 2 số chẵn. Vậy 

**Bài 11:[ Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2014 – 2015 ]**

Cho x, y là các số nguyên, CMR : 

Lời giải :

Ta có : 



**Bài 12: [ Vào 10 Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2015 – 2016 ]**

CMR : Với x, y là hai số nguyên bất kỳ ta có : 

Lời giải :



**Bài 13:** Cho n là số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau với 10. CMR : 

**Lời giải:**

Vì (n,10) = 1 

Ta có :  vì tích của hai số chẵn liên tiếp

Ta đi chứng minh A chia hết cho 5

+) Xét n = 5k + 1 ; n = 5k + 2 ; n = 5k + 3 ; n = 5k + 4 đều thỏa mãn chia hết cho 5.

**Bài 14:** CMR 

Lời giải:

Cách 1: 



Cách 2: Dùng phương pháp quy nạp toán học

+) n = 1 

+) Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là ta có: 

+) Ta đi chứng minh đúng với n = k + 1



**Bài 15:** Cho n số x1, x2, …xn mỗi số chỉ nhận giá trị là 1 hoặc -1. CMR: Nếu x1x2 + x2x3 + … +xnx1 = 0 thì n chia hết cho 4

Lời giải:

Đặt y1 = x1x2 ; y2 = x2x3 ; … ; yn = xnx1

 nhận giá trị 1 hoặc -1 và 

Suy ra trong số y1, ….yn thì số các số có giá trị = 1 bằng với số các số có giá trị = -1 suy ra n chẵn suy ra n = 2k

Ta có : y1.y2….yn = (x1.x2…xn)2 = 1

Có k số trong n số y1 , y2 , … , yn = 1 và k số trong n số y1 ,…..yn bằng -1

Vậy k phải chẵn. Suy ra k = 2q. vậy n = 4q chia hết cho 4 (đpcm)

**Bài 16:** Có bao nhiêu số có 5 chữ số, thỏa mãn: Chia hết cho 3 và có ít nhất 1 số 3

Lời giải:

Ta có: 30000 số có 5 chữ sô chia hết cho 3 ( 10000 đến 99999 có 90000 số, cách 3 số có 1 số chia hết cho 3 )

Ta đi đếm số các số chia hết cho 3 mà không chứa chữ số 3 nào

Giả sử:  có 8 cách chọn a ; b,c,d có thể chọn 9 cách

Ta có: a + b + c + d + e chia hết cho 3

Nếu 

Vậy có 3 cách chọn e. suy ra có 8.9.9.9.3 = 17496 số chia hết 3 không chứa thừa số 3

Suy ra có: 30000 – 17496 = 12504 số thỏa mãn bài toán.

**Dạng 2: Sử dụng các công thức sau nâng cao**

a.  b. 

c. 

**Bài 1:** Chứng minh rằng

a.  b. 

c.  d. 

Lời giải:

a. Ta có:  b. 

c.  d. 

**Bài 2:** Chứng minh rằng

a.  b. 

c.  d. 

Lời giải:

a. 

b. 

c. 

d. 

**Bài 3:** Cho 

Lời giải:

Ta có: 

Ta đi chứng minh A chia hết cho 101 và 50.

+) 

+) 

**Bài 4:** Cho , CMR: A chia hết cho 17 khi và chỉ khi n là số tự nhiên chẵn

Lời giải:

+) Với n là số tự nhien chẵn , đặt n = 2k , k thuộc N



+) Với n là số tự nhiên lẻ, 

Có: 

**Bài 5:** Chứng minh rằng: 

Lời giải:

+) ;

**Bài 6:** Chứng minh rằng

a.  b. 

Lời giải:

a. 

b. 

**Bài 7:** Cho 

CMR: Với mỗi số tự nhiên n có một và chỉ một trong hai số an hoặc bn chia hết cho 5

Lời giải: Ta đi xét các trường hợp

+) Nếu an và bn cùng chia hết cho 5 

Ta có: 

+) 

**Bài 8 [ Khó ]**

Cho a, b là các số tự nhiên không chia hết cho 5. Chứng minh rằng p.a4m + q.b4m chia hết cho 5 khi và chỉ khi p + q chia hết cho 5 ( p, q, m thuộc N )

Lời giải:

Ta có: 

Mà :  , ta có : 

Mà :  a-1, a+1, a-2, a+2 1 trong 4 số này phỉa chia hết cho 5

Tương tự: 

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 1:** Cho 

a. Phân tích A(x) thành nhân tử b. CMR: 

**Bài 2:** Cho 

a. Phân tích B(x) thành nhân tử b. CMR: 

**Bài 3:** CMR 

**Bài 4:**Chứng minh rằng : 

**Bài 5:** Chứng minh rằng : 

**Lời giải:**

**Bài 1:**

a. 

b. 

**Bài 2:**

a. 

b. 

**Bài 3:** 



**Bài 4:** Ta có:  ; 

**Bài 5:** Ta có : 

Lại có : 

**Dạng 3 : Tìm điều kiện để xảy ra quan hệ chia hết**

**Bài 1:** Tìm n thuộc Z để giá trị biểu thức  chia hết cho giá trị biểu thức 

Lời giải :

Cách 1 : Đặt phép chia ta được : 

Để A chia hết cho B thì 

Cách 2: 

Lập luận tương tự ta có 

**Bài 2: [ HSG – Yên Phong – 2016 ]**

Tìm số nguyên dương n để 

Lời giải:



+) n = 1 ta được: 0 chia hết cho 1 ( đúng )

+) n > 1 thì n -1 < n (n-1) + 1 

Vậy n = 1 là giá trị cần tìm

**Bài 3:** Tìm n thuộc Z sao cho

a.  b. 

c.  d. 

Lời giải:

a. 

b. 



c. 

Thử lại các giá trị này đều thỏa mãn

d. 

**Bài 4:** Tìm tất cả các số nguyên dương n, sao cho 

Lời giải:

**Bài 5:** Tìm mọi số tự nhiên n sao cho: 

Lời giải:

 Có: n chia 5 dư 1 hay n = 5k + 1 ( k thuộc N)

**Bài 6:** Tìm số tự nhiên n để: 

Lời giải:

Ta có: 



**Dạng 4: Tồn tại hay không tồn tại sự chia hết**

**Bài 6:** Tìm n thuộc N sao cho 

Lời giải:

+) Nếu 

+) Nếu 

+) Nếu 

Vậy  khi n là bội số của 3, hay n chia hết cho 3

**Bài 7:** Tìm n thuộc N để:

a.  b. c. 

Lời giải:

a. khi 

+) 

Vậy  khi n = 2k ( k thuộc N )

b. 

+) Nếu 

+) Nếu n = 2k thì 9n có tận cùng = 1, 16n có tận cùng là 6 suy ra 9n + 16n có tận cùng là 4 nên không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 25

c. Nếu 

+) 

+) n = 3k + 2 thì cũng không chia hết cho 9

Vậy n là bội số của 3 thì thỏa mãn bài toán.

**Bài 8:** Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng lập phương của chúng cũng chia hết cho 3.

Lời giải:

Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có a + b chia hết cho 3

Lại có: 

Vì a + b chia hết cho 3 nên (a+b)2 – 3ab chia hết cho 3

Do vậy 

**Bài 9:** Tìm giá trị nguyên của x để 

Lời giải:

