

LỜI NÓI ĐẦU.

Trong nhiều năm qua, các cuộc thi Olympic toán quốc gia, quốc tế dành cho học sinh, sinh viên đã trở thành một sân chơi trí tuệ nhằm phát hiện và ươm mầm những tài năng toán học tương lai. Qua một thời sinh viên Đại học sư phạm đã từng nhiều lần tham dự các kỳ thi Olympic toán, bản thân tôi đã học tập được những điều thật quý giá về vấn đề rèn luyện tư duy độc lập, sáng tạo thông qua việc giải các bài toán khó. Hơn thế nữa, xuất phát từ nhiều đam mê và yêu thích với lĩnh vực giải tích toán học, tôi luôn có mong muốn tìm tòi, tổng hợp những bài toán có lời giải đẹp và khó trên những tạp chí toán trong nước và nước ngoài. Trên cơ sở những bài toán sưu tầm được, tôi mở rộng nó theo nhiều hướng khác nhau để được những bài toán mới lạ hơn, hấp dẫn hơn. Nhằm giúp các bạn học sinh, sinh viên đang ôn luyện để chuẩn bị thi Olympic có thêm một tài liệu hỗ trợ cho việc giải toán của mình, tôi xin mạnh dạn viết cuốn sách: **Bài tập giải tích dành cho Olympic toán**. Mong rằng qua cuốn sách này, các bạn sẽ tìm thấy được niềm vui và những cảm xúc riêng trước những dạng toán, những bài toán hay mà lâu nay trong những giáo trình giải tích căn bản các bạn rất ít gặp.

Nội dung cuốn sách này được chia ra làm 7 chương. Từ chương 1 đến chương 5, mỗi chương được chia ra làm 3 phần gồm: **Tóm tắt lý thuyết- Các dạng bài tập** (có kèm theo lời giải chi tiết)- **Bài tập đề nghị**. Chương 6 là hệ thống các **bài tập tổng hợp- nâng cao** cho các chương trên với những định hướng, gợi ý cách giải. Chương 7 là phần giới thiệu **các đề thi của Hội Toán học Việt Nam** đã ra thi từ năm 1993 đến 2011.

Với kinh nghiệm còn non trẻ của một giảng viên trong buổi đầu dạy học, chắc chắn rằng cuốn sách này còn rất nhiều những sai sót, rất mong sự chỉ dạy thêm của quý thầy cô giáo, sự đóng góp của các bạn học sinh-sinh viên yêu thích toán để tôi rút ra được nhiều kinh nghiệm quý báu. Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn Th.S Huỳnh Tấn Trọng giảng viên khoa Toán-Tin, trường Đại học Quảng Nam đã động viên, ủng hộ và giúp đỡ cho tôi trong việc hoàn thành cuốn sách này.

Mọi ý kiến trao đổi xin bạn đọc liên hệ theo địa chỉ sau đây:

Văn Phú Quốc, GV. Trường Đại học
Quảng Nam, Số 102- Đường Hùng
Vương-TP. Tam Kỳ
Mail: quocdhsptoan@gmail.com
Số điện thoại: **0982 333 443**

CHƯƠNG 1 DÃY SỐ THỰC VÀ GIỚI HẠN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa dãy số

Dãy số là một ánh xạ $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
$$n \mapsto u(n)$$

Ta thường ký hiệu dãy là (u_n) hoặc $\{u_n\}$.

2. Dãy số hội tụ, phân kỳ

2.1. Định nghĩa

2.1.1. Định nghĩa 1

a) Dãy (u_n) hội tụ đến $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ hoặc $u_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$.

b) Dãy (u_n) không hội tụ thì được gọi là dãy phân kỳ.

2.1.2. Mệnh đề 1

Giới hạn của một dãy hội tụ là duy nhất.

2.1.3. Định nghĩa 2

a) Dãy (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu $\exists M : u_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Dãy (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu $\exists m : u_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Dãy (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là $\exists \alpha > 0 : |u_n| < \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2.1.4. Định nghĩa 3

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0 \Rightarrow u_n > A$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall B < 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0 \Rightarrow u_n < B$.

Nhận xét: Tất cả các dãy số có giới hạn $\pm\infty$ đều phân kỳ.

2.1.5. Mệnh đề 2

a) Mọi dãy số tiến đến $+\infty$ đều bị chặn dưới.

b) Mọi dãy số tiến đến $-\infty$ đều bị chặn trên.

2.2. Tính chất về thứ tự của dãy số hội tụ

2.2.1. Mệnh đề 1

Cho (u_n) là một dãy số hội tụ có giới hạn là a và hai số thực α, β .

Nếu $\alpha < a$ thì $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow \alpha < u_n$.

Nếu $a < \beta$ thì $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow u_n < \beta$.

Nếu $\alpha < a < \beta$ thì $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \alpha < u_n < \beta$.

2.2.2. Mệnh đề 2

Cho (u_n) là một dãy số hội tụ. Khi đó:

- a) Nếu $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow u_n \geq \alpha$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \alpha$
 b) Nếu $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow u_n \leq \beta$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \beta$.
 c) Nếu $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \alpha \leq u_n \leq \beta$ thì $\alpha \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \beta$.

2.2.3. Mệnh đề 3

Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ hội tụ

Nếu $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

2.2.4. Mệnh đề 4

Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$ sao cho:

- (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow v_n \leq u_n \leq w_n$
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a$.

Khi đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

2.2.5. Mệnh đề 5

Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ sao cho:

- (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Khi đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.

2.2.6. Mệnh đề 6

Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ sao cho:

- (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq v_n$
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

Khi đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$.

2.3. Các tính chất về đại số của dãy số hội tụ

2.3.1. Mệnh đề 1

Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ và các số $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$.
 (ii) $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = a + b$
 (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda u_n = \lambda a$

$$(iv) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \\ \exists M > 0 : |v_n| \leq M \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 0$$

$$(v) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = ab$$

$$(vi) \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}.$$

$$(vii) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}.$$

2.3.2. Mệnh đề 2

Cho $(u_n), (v_n)$ là hai dãy số thực.

$$a) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \\ \exists m : v_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = +\infty.$$

$$\text{Đặc biệt: (i)} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

$$(ii) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

$$b) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \\ \exists \omega > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow v_n \geq \omega \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = +\infty.$$

$$\text{Đặc biệt: (i)} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = +\infty$$

$$(ii) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = +\infty$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

$$d) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = +\infty.$$

2.4. Cấp số cộng, cấp số nhân

2.4.1. Cấp số cộng

2.4.1.1. Định nghĩa

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n + d, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(x_0, d là các số hằng số cho trước) được gọi là cấp số cộng. Trong đó x_0 gọi là số hạng đầu tiên, d gọi là công sai.

2.4.1.2. Các kết quả

a) Cho (u_n) là cấp số cộng. Khi đó: $u_n = u_1 + (n-1)d \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Cho (u_n) là cấp số cộng. Khi đó: $2u_n = u_{n+1} + u_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Cho (u_n) là cấp số cộng. Khi đó tổng của n số hạng đầu tiên là:

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

Ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow 2b = a + c$.

2.4.2. Cấp số nhân

2.4.2.1. Định nghĩa.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n q \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(x_0, q là các hằng số cho trước) được gọi là cấp số nhân. Trong đó x_0 gọi là số hạng đầu tiên, q gọi là công bội.

2.4.2.2. Các kết quả

a) Cho (u_n) là cấp số nhân. Khi đó: $u_n = u_1 q^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Cho (u_n) là cấp số nhân. Khi đó: $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Cho (u_n) là cấp số nhân. Khi đó tổng của n số hạng đầu tiên là:

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad q \neq 1.$$

Ba số a, b, c khác không theo thứ tự lập thành một cấp số nhân

$$\Leftrightarrow b^2 = ac > 0.$$

3. Tính đơn điệu

3.1. Dãy đơn điệu

3.1.1. Định nghĩa

Cho (u_n) là một dãy thực. Ta nói rằng:

a) (u_n) tăng $\Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- c) (u_n) tăng thực sự $\Leftrightarrow u_n < u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.
 d) (u_n) giảm thực sự $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \forall n \in \mathbb{N}$.
 e) (u_n) đơn điệu $\Leftrightarrow (u_n)$ tăng hoặc giảm.
 f) (u_n) đơn điệu thực sự $\Leftrightarrow (u_n)$ tăng thực sự hoặc giảm thực sự

*** Nhận xét**

- (i) Nếu các dãy (u_n) , (v_n) đều tăng (tương ứng giảm) thì dãy $(u_n + v_n)$ tăng (tương ứng giảm).
 (ii) Nếu các dãy (u_n) , (v_n) đều tăng (tương ứng giảm) và các số hạng không âm thì dãy $(u_n v_n)$ tăng (tương ứng giảm).
 (iii) Một dãy số có thể không tăng hoặc không giảm, Ví dụ dãy số (u_n) xác định bởi công thức sau đây: $u_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

3.1.2. Định lý

- a) Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
 b) Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

3.1.3. Mệnh đề

- a) Mọi dãy tăng và không bị chặn trên thì tiến đến $+\infty$.
 b) Mọi dãy giảm và không bị chặn dưới thì tiến đến $-\infty$.

*** Nhận xét:**

$$(i) (u_n) \text{ tăng} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \end{cases}$$

$$(ii) \text{ Nếu } (u_n) \text{ tăng và hội tụ đến } a \text{ thì } a = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

$$(iii) \text{ Nếu } (u_n) \text{ tăng thì hiển nhiên nó bị chặn dưới bởi } u_0.$$

3.2. Dãy kề nhau

3.2.1. Định nghĩa

Hai dãy số (u_n) và (v_n) được gọi là kề nhau khi và chỉ khi:

$$(i) (u_n) \text{ tăng} \quad (ii) (v_n) \text{ giảm} \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0.$$

3.2.2. Mệnh đề 1

Nếu hai dãy số (u_n) và (v_n) kề nhau thì chúng hội tụ và có cùng giới hạn.

3.2.3. Mệnh đề 2 (Nguyên lý Cantor)

Cho hai dãy số (a_n) , (b_n) sao cho :

$$(i) a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (ii) [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

Khi đó tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}$ sao cho $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{a\}$.

Một cách diễn đạt gọn hơn: Mọi dãy thắt dần đều có một điểm chung duy nhất.

4. Dãy con

4.1. Định nghĩa

Cho dãy số (u_n) và (n_k) là dãy các số tự nhiên tăng thực sự. Khi đó ta gọi (u_{n_k}) là một dãy con của (u_n) .

4.2. Mệnh đề 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a < +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_k} = a.$$

4.3. Mệnh đề 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a < +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = a.$$

4.4. Định lý Bolzano- Weierstrass.

Mọi dãy số bị chặn đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.

5. Dãy Cauchy

5.1. Định nghĩa

Dãy (u_n) được gọi là dãy Cauchy nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

5.2. Các kết quả

$$a) (u_n) \text{ là dãy Cauchy} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

$$b) (u_n) \text{ là dãy Cauchy} \Leftrightarrow \text{nó hội tụ.}$$

6. Dãy chặn, dãy không đáng kể, dãy tương đương

6.1. Dãy chặn

Dãy (v_n) “chặn” dãy (u_n) nếu tồn tại hằng số $C > 0$ và tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|u_n| \leq C|v_n| \quad \forall n \geq n_0$. Ta viết: $u_n = O(v_n)$.

6.2. Dãy không đáng kể

Dãy (u_n) “không đáng kể” so với (v_n) nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sao cho $|u_n| \leq \varepsilon|v_n| \quad \forall n \geq n_\varepsilon$, nghĩa là: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. Ta viết: $u_n = o(v_n)$

6.3. Dãy tương đương

Dãy (u_n) “tương đương” với (v_n) nếu $u_n - v_n = o(v_n)$, nghĩa là $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Ta viết $u_n \sim v_n$.

7. Một số loại dãy quan trọng

7.1. Dãy truy hồi truy hồi cấp 1 với hệ số hằng số

a) Dạng tổng quát: $u_{n+1} = au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$.

b) Công thức

+ Nếu $a = 1$ thì dãy (u_n) là một cấp số cộng.

+ Nếu $a \neq 1$ thì $u_n = Aa^n + B$.

7.2. Dãy truy hồi tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

a) Dạng tổng quát: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$.

b) Công thức:

Xét phương trình đặc trưng của dãy: $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$.

+ Nếu phương trình này có hai nghiệm phân biệt λ_1, λ_2 thì tồn tại

$A, B \in \mathbb{R}$ sao cho: $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

+ Nếu phương trình này có nghiệm kép λ thì tồn tại $A, B \in \mathbb{R}$ sao cho

$u_n = (A + Bn)\lambda^n$.

+ Nếu phương trình này có nghiệm phức $\lambda = x + iy$ thì ta đặt

$$r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Khi đó $\lambda = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $u_n = r^n (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi)$
($A, B \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$).

7.3. Dãy truy hồi cấp 1 dạng: $u_{n+1} = f(u_n, n)$

* Cách làm

+ Bước 1: biến đổi để đưa về dạng:
$$\begin{cases} \varphi(u_n) = f(\varphi(u_n)) \\ \varphi(u_n) = f(\varphi(u_n), n) \end{cases}$$

+ Bước 2: đặt dãy phụ $v_n = \varphi(u_n)$. Khi đó ta thu được một dãy truy hồi mới theo v_n đơn giản hơn.

7.4. Dãy truy hồi cấp 2 dạng: $u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, n)$

* Cách làm

+ Bước 1: biến đổi để đưa về dạng:
$$\begin{cases} \varphi(u_n) + \varphi(u_{n-1}) = f(\varphi(u_n), \varphi(u_{n-1})) \\ \varphi(u_n) + \varphi(u_{n-1}) = f(\varphi(u_n), \varphi(u_{n-1}), n) \end{cases}$$

+ Bước 2: đặt dãy phụ Đặt dãy phụ $v_n = \varphi(u_n)$. Khi đó ta thu được một dãy truy hồi mới theo v_n đơn giản hơn.

8. Giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy số

8.1. Định nghĩa

a) Nếu dãy số (u_n) có một dãy con (u_{n_k}) sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_k} = a$ thì a được gọi là một giá trị riêng của dãy (u_n) và a có thể hữu hạn hay là $\pm\infty$.

b) Tập các giới hạn riêng của dãy số bị chặn (u_n) có giá trị lớn nhất. Giá trị này được gọi là “giới hạn trên” của dãy (a_n) ký hiệu là $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$.

c) Tập các giới hạn riêng của dãy số bị chặn (u_n) có giá trị bé nhất. Giá trị này được gọi là “giới hạn dưới” của dãy (a_n) ký hiệu là $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$.

8.2. Định lý 1

Mọi dãy số (u_n) đều có giới hạn trên, giới hạn dưới và

$$\begin{cases} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{u_n, u_{n+1}, \dots\} \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{u_n, u_{n+1}, \dots\} \end{cases}.$$

8.3. Định lý 2

Dãy số (u_n) có giới hạn (hữu hạn hay $\pm\infty$) $\Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Khi đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$.

9. Giới thiệu hai định lý quan trọng về dãy số

9.1. Định lý Toeplitz

Giả sử đồng thời xảy ra các điều kiện sau đây:

(i) Các số $P_{nk} > 0 \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $\sum_{k=1}^n P_{nk} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

(iii) Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$ cố định, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{nk} = 0$

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a < +\infty$.

Khi đó dãy (v_n) xác định bởi $v_n = \sum_{k=1}^n P_{nk} u_k$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a.$$

9.2. Định lý Stolz

Nếu hai dãy số $(u_n), (v_n)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $v_{n+1} > v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = a$$

$$\text{thì tồn tại } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = a.$$

B- CÁC DẠNG BÀI TẬP

BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG TÍNH TOÁN CÁC TỔNG HỮU HẠN

1.1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \arctan \frac{1}{2n^2}$, $n \geq 1$.

Hãy tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{2011}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } u_n &= \arctan \frac{1}{2n^2} = \arctan \frac{2}{4n^2} = \arctan \frac{(2n+1) - (2n-1)}{1 + (2n+1)(2n-1)} \\ &= \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} \\ &= \arctan 3 - \arctan 1 + \arctan 5 - \arctan 3 + \dots + \arctan 4023 - \arctan 4021 \\ &= \arctan 4023 - \arctan 1 = \arctan 4023 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

1.2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = (n^2 + 1)n!$, $n \geq 1$

Hãy tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{2011}$.

Giải

$$\text{Ta có: } u_n = (n^2 + 1)n! = (n^2 + n - n + 1)n! = n(n+1)! - (n-1)n!, \quad n \geq 1$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} \\ &= 1.2! - 0.1! + 2.3! - 1.2! + \dots + 2011.2012! - 2010.2011! = 2011.2012! \end{aligned}$$

1.3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2 - 1}}$, $n \geq 1$.

Hãy tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{2011}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2} + 2\sqrt{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} + \frac{n-1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}} + \sqrt{\frac{n-1}{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}} + \sqrt{\frac{n-1}{2}}} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{\frac{n-1}{2}}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Khi

$$\text{đó: } S = u_1 + u_2 + \dots + u_{2011}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - 0 + \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \dots + \sqrt{\frac{2011}{2}} - \sqrt{\frac{2009}{2}} + \sqrt{1006} - \sqrt{1005} \\ &= \sqrt{1006} + \sqrt{\frac{2011}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} - 0 = \frac{\sqrt{2012} + \sqrt{2011} - 1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

1.4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_n = \sqrt{1 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 2\left(\frac{1}{n} - 1\right)}, \quad n \geq 1.$$

$$\text{Hãy tính tổng } S = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_{2011}}.$$

Giải

$$\text{Ta có : } u_n = \sqrt{1 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 2\left(\frac{1}{n} - 1\right)} = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

Suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}}{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{n^2 + (n+1)^2}}{n} - \frac{\sqrt{n^2 + (n-1)^2}}{n}}{\frac{4}{n}} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{n^2 + (n+1)^2} - \sqrt{n^2 + (n-1)^2} \right) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Khi đó :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_{2011}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{1^2 + 2^2} - \sqrt{1^2 + 0^2} + \dots + \sqrt{2011^2 + 2012^2} - \sqrt{2011^2 + 2010^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2011^2 + 2012^2} - 1}{4}. \end{aligned}$$

1.5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[4]{n^3 + n^2} + \sqrt[4]{n^3 + 2n^2 + n} + \sqrt[4]{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}}, \quad n \geq 1$$

Hãy tính tổng : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{2011}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } u_n &= \frac{1}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[4]{n^3 + n^2} + \sqrt[4]{n^3 + 2n^2 + n} + \sqrt[4]{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[4]{n} + \sqrt{n}\sqrt[4]{n+1} + \sqrt{n+1}\sqrt[4]{n} + \sqrt{n+1}\sqrt[4]{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}) + \sqrt{n+1}(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})} = \frac{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\ &= \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó : } S &= u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} = \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2} + \dots + \sqrt[4]{2012} - \sqrt[4]{2011} \\ &= \sqrt[4]{2012} - 1. \end{aligned}$$

BÀI TẬP XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

1.6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = 3, u_1 = 4 \\ (n+1)(n+2)u_n = 4(n+1)(n+3)u_{n-1} - 4(n+2)(n+3)u_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Tính u_{2011} ?

Giải

Chia hai vế của (*) cho $(n+1)(n+2)(n+3)$ ta được:

$$\frac{u_n}{n+3} = 4 \frac{u_{n-1}}{n+2} - 4 \frac{u_{n-2}}{n+1}.$$

Đặt $v_n = \frac{u_n}{n+3}$. Khi đó dãy (v_n) xác định bởi: $\begin{cases} v_0 = v_1 = 1 \\ v_n = 4v_{n-1} - 4v_{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$

Phương trình đặc trưng có nghiệm là $\lambda = 2$.

Do đó: $v_n = (A + Bn)2^n$. Với $v_0 = v_1 = 1$, ta có hệ: $\begin{cases} A = 1 \\ 2(A + B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow v_n = 2^n - n2^{n-1} \Rightarrow u_n = (n+3)2^n - n(n+3)2^{n-1}.$$

Với $n = 2011$, ta có: $u_{2011} = 2014.2^{2011} - 2011.2014.2^{2010}$

1.7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2011u_n + 2010}{2010u_n + 2011}, n \geq 1 \end{cases}$

Tính u_{2011} ?

Giải

Ta có: $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{2010u_n + 2011} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 2010 + \frac{4021}{u_n - 1}.$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. Khi đó dãy (v_n) xác định bởi: $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 4021v_n + 2010 \end{cases}$

Khi đó: $v_n = A.4021^n + B.$

Với $v_0 = 1, v_1 = 6031$ ta có hệ: $\begin{cases} A + B = 1 \\ 4021A + B = 6031 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Do đó: $v_n = \frac{3}{2}4021^n - \frac{1}{2} \Rightarrow u_n = 1 + \frac{2}{3.4021^n - 1}$

Với $n = 2011$, ta có: $u_{2011} = 1 + \frac{2}{3.4021^{2011} - 1} = \frac{3.4021^{2011} + 1}{3.4021^{2011} - 1}.$

1.8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_0 = 253 \\ u_{n+1} = 2011u_n + 2012^n, n \geq 1 \end{cases}$.

Tính u_{2011} ?

Giải

Đặt $v_n = u_n - 2012^n$. Khi đó dãy (v_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - 1 \\ v_{n+1} + 2012^{n+1} = 2011(v_n + 2012^n) + 2012^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 252 \\ v_{n+1} = 2011v_n, n \geq 1 \end{cases}$$

Suy ra: $v_n = 2011v_{n-1} = 2011^2v_{n-2} = \dots = 2011^n v_0 = 252 \cdot (2011^n)$.

Do đó: $u_n = 252 \cdot (2011^n) + 2012^n$.

Với $n = 2011$, ta có: $u_{2011} = 252 \cdot (2011^{2011}) + 2012^{2011}$.

1.9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - u_{n-1}^2}}}{2}, n \geq 2 \end{cases}$.

Tính u_{2011} ?

Giải

$$\text{Ta có : } u_1 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}, u_2 = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{6}}}}{2} = \sin \frac{\pi}{2 \cdot 6}$$

Chúng minh bằng quy nạp ta được : $u_n = \sin \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 6}$

Với $n = 2011$, ta có : $u_{2011} = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{2011}}$.

1.10. Cho dãy số (u_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{4^n}} \right), n \geq 2 \end{cases}$$

Tính u_{2011} ?

Giải

Ta có : $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^1} \cot \frac{\pi}{2^{1+1}}$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} \cot^2 \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \right) = \frac{1}{4} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{8}}{2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2^2} \cot \frac{\pi}{2^{2+1}}$$

Chúng minh bằng quy nạp ta được : $u_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Với $n = 2011$, ta có : $u_{2011} = \frac{1}{2^{2011}} \cot \frac{\pi}{2^{2012}}$.

1.11. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{u_{n-1}^2 + 2}{2u_{n-1}} \end{cases}, n \geq 2.$$

Hãy xác định công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Giải

Xét hai dãy số (x_n) và (y_n) xác định như sau :

$$\begin{cases} x_1 = 2, y_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1}^2 + 2y_{n-1}^2 \\ y_n = 2x_{n-1}y_{n-1} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

Chúng minh bằng quy nạp : $u_n = \frac{x_n}{y_n} \quad \forall n \geq 1.$

Vấn đề là bây giờ chúng ta đi tìm công thức tổng quát của hai dãy (x_n) , (y_n) là xong.

Đề ý rằng:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^2 + 2y_{n-1}^2 \\ y_n = 2x_{n-1}y_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = x_{n-1}^2 + 2y_{n-1}^2 \\ \sqrt{2}y_n = 2\sqrt{2}x_{n-1}y_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n + \sqrt{2}y_n = (x_{n-1} + \sqrt{2}y_{n-1})^2 \\ x_n - \sqrt{2}y_n = (x_{n-1} - \sqrt{2}y_{n-1})^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n + \sqrt{2}y_n = (x_{n-2} + \sqrt{2}y_{n-2})^{2^2} \\ x_n - \sqrt{2}y_n = (x_{n-2} - \sqrt{2}y_{n-2})^{2^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_n + \sqrt{2}y_n = (x_1 + \sqrt{2}y_1)^{2^{n-1}} = (2 + \sqrt{2})^{2^{n-1}} \\ x_n - \sqrt{2}y_n = (x_1 - \sqrt{2}y_1)^{2^{n-1}} = (2 - \sqrt{2})^{2^{n-1}} \end{cases}.$$

Đây là một hệ phương trình theo hai ẩn x_n, y_n .

Giải hệ trên ta được:
$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2} \left[(2 + \sqrt{2})^{2^{n-1}} + (2 - \sqrt{2})^{2^{n-1}} \right] \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(2 + \sqrt{2})^{2^{n-1}} - (2 - \sqrt{2})^{2^{n-1}} \right] \end{cases}.$$

Vậy ta thu được:
$$x_n = \sqrt{2} \frac{(2 + \sqrt{2})^{2^{n-1}} + (2 - \sqrt{2})^{2^{n-1}}}{(2 + \sqrt{2})^{2^{n-1}} - (2 - \sqrt{2})^{2^{n-1}}}$$

BÀI TẬP VỀ CHỨNG MINH TÍNH ĐƠN ĐIỆU, BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ

1.12. Cho các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ thỏa mãn điều kiện: $\sum_{k=1}^{2011} x_k \geq 2011$.

Đặt $u_n = \sum_{k=1}^{2011} x_k^n$. Chứng minh rằng dãy (u_n) tăng.

Giải

Với $x > 0$ ta luôn có: $(x^n - 1)(x - 1) \geq 0$.

Điều này tương đương với $x^{n+1} - x^n \geq x - 1$.

Do đó:
$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2011} x_k^{n+1} - \sum_{k=1}^{2011} x_k^n \geq \sum_{k=1}^{2011} x_k - 2011 \geq 0.$$

Vậy dãy (u_n) tăng.

1.13. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_1 > 0, \quad 2011u_n - 2010u_{n-1} = \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}} \quad n = 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2012.

Giải

Từ $2011u_n - 2010u_{n-1} = \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}}, n = 2, 3, \dots$

Suy ra: $u_n = \frac{1}{2011} \left(2010u_{n-1} + \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}} \right)$

Rõ ràng $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2011 số dương ta được:

$$u_n = \frac{1}{2011} \left(2010u_{n-1} + \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}} \right) = \frac{1}{2011} \left(\underbrace{u_{n-1} + \dots + u_{n-1}}_{2010} + \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}} \right) \geq 2012.$$

Lại có: $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{2011} \left(2010 + \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2011}} \right) \leq \frac{1}{2011} (2010 + 1) = 1$ (do $u_n \geq 2012$).

Vậy (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2012.

1.14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = (1-t)u_n + \frac{2011t}{u_n^t}, t \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh dãy (u_n) hội tụ

Giải

Xét hàm số: $f(x) = (1-t)x + \frac{2011t}{x^t}, x \in (0, +\infty), t \in (0,1).$

Ta có: $f'(x) = (1-t) \left(1 - 2011x^{-\frac{1}{t}} \right).$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2011^t$. Lập bảng biến thiên, ta dễ dàng suy ra: $f(x) \geq 2011^t$.

Mà $u_n = f(u_{n-1}) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n \geq 2011^t \forall n \in \mathbb{N}$ hay $u_n^{\frac{1}{t}} \geq 2011$

Do đó: $u_{n+1} - u_n = (1-t)u_n + \frac{2011t}{u_n^t} - u_n = tu_n^{\frac{t-1}{t}} \left(2011 - u_n^{\frac{1}{t}} \right) \leq 0, \forall t \in (0,1)$

Dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2011^t nên hội tụ.

1.15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \cdot C_{2n}^n$, $n \geq 1$.

Chứng minh dãy số (u_n) hội tụ.

Giải

Lập tỉ số:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \cdot C_{2n+2}^{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{4^n} \cdot C_{2n}^n} = \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2 + 4n}} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy dãy } (u_n) \text{ tăng thực sự.} \end{aligned}$$

Hơn nữa:

$$\begin{aligned} \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \ln \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 + 4k}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4k^2 + 4k} \right) < \frac{1}{8k^2 + 8k} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} &< \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} (\ln u_{k+1} - \ln u_k) < \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ \text{Hay } \ln u_n - \ln u_1 &< \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \Rightarrow \ln u_n < \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \Rightarrow u_n < \frac{\sqrt[8]{e}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy hội tụ.

1.16. Cho $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ là các số thực dương cố định. Xét dãy số :

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n}{2011}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) tăng.

Giải

$$\text{Đặt } v_n = \frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n}{2011}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski ta có :

$$\begin{aligned} v_n^2 &= \frac{1}{2010^2} \left(x_1^{\frac{n+1}{2}} x_1^{\frac{n-1}{2}} + x_2^{\frac{n+1}{2}} x_2^{\frac{n-1}{2}} + \dots + x_{2011}^{\frac{n+1}{2}} x_{2011}^{\frac{n-1}{2}} \right)^2 \\ &\leq \frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_{2011}^{n+1}}{2010} \cdot \frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_{2011}^{n-1}}{2010} = v_{n+1} v_{n-1} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh (u_n) là dãy tăng

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski ta có :

$$u_1^2 = \frac{1}{2011^2} (1.x_1 + 1.x_2 + \dots + 1.x_{2011})^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2011}^2}{2011} = u_2^2 \Rightarrow u_1 \leq u_2.$$

Giả sử rằng $u_{n-1} \leq u_n$. Khi đó : $\sqrt[n-1]{v_{n-1}} \leq \sqrt[n]{v_n} \Rightarrow v_{n-1} \leq v_n^{\frac{n-1}{n}}$

$$\text{Ta có : } u_{n+1} = \sqrt[n+1]{v_{n+1}} \geq \sqrt[n+1]{\frac{v_n^2}{v_{n-1}}} \geq \sqrt[n+1]{\frac{v_n^2}{v_n^{\frac{n-1}{n}}}} = \sqrt[n+1]{v_n^{\frac{n+1}{n}}} = \sqrt[n]{v_n} = u_n$$

Vậy (u_n) là dãy tăng.

BÀI TẬP VỀ DÃY SỐ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

1.17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ |u_n| = |u_{n-1} + 1|, n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} > -\frac{2011}{2}$.

Ta có: $|u_{k+1}| = |u_k + 1|, k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\text{Suy ra : } u_{k+1}^2 = u_k^2 + 2u_k + 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n u_{k+1}^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n u_k + n$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1}^2 = 2 \sum_{k=1}^n u_k + n \Rightarrow \sum_{k=1}^n u_k \geq -\frac{n}{2}.$$

Cho $n = 2011$, suy ra : $u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} > -\frac{2011}{2}$.

1.18. Cho dãy số (u_n) xác định như sau : $\frac{1}{u_n} = \frac{(2n+1)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{2}, n \geq 1$

Chứng minh rằng : $u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} < \frac{2011}{2013}$.

Giải

$$\text{Ta có : } u_k = \frac{2}{(2k+1)(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{2k+1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $2k+1 = k + (k+1) > 2\sqrt{k(k+1)}$.

Suy ra : $u_k < \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$

Do đó : $\sum_{i=1}^k u_i < 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 1 - \frac{2}{\sqrt{k^2 + 4k + 4}} = \frac{k}{k+2}.$

Cho $k = 2011$ ta được : $u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} < \frac{2011}{2013}.$

1.19. Cho (u_n) là dãy số thực dương thỏa : $u_n^2 \leq u_n - u_{n+1}$, $n \geq 1$.

Chứng minh rằng: $u_n < \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Giải

+ Với $n=1$, $u_1^2 \leq u_1 - u_2 < u_1 \Rightarrow u_1 < 1 = \frac{1}{1}$ (đúng trong trường hợp này)

+ Với $n=2$, $u_2 \leq u_1 - u_1^2 = \frac{1}{4} - \left(u_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

(đúng trong trường hợp này)

+ Giả sử khẳng định trên đúng đến n . Ta sẽ chứng minh nó đúng đến $n+1$.

Thật vậy!

Xét hàm số: $f(x) = x - x^2$.

Rõ ràng $f(x)$ là hàm số tăng trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Do đó $u_{n+1} \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n+1}.$

Vậy $u_n < \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

1.20. Cho dãy (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2012u_n - u_n^2}{2012} \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\frac{2011}{4023} < x_{2012} < \frac{1}{2}.$

Giải

Rõ ràng: $0 < u_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}.$

Ta có: $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n}{2012u_{n+1}} = \frac{1}{2012 - u_n} \in \left(\frac{1}{2012}, \frac{1}{2011}\right)$

Suy ra: $\frac{1}{u_{2012}} = v_{2012} + \dots + v_1 + \frac{1}{u_0} \in \left(1 + \frac{2012}{2012}, 1 + \frac{2012}{2011}\right) = \left(2, \frac{4023}{2011}\right)$

Vậy $\frac{2011}{4023} < u_{2011} < \frac{1}{2}$

1.21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n}}$, $n \geq 1$

Chứng minh rằng: $u_1 + u_2 + \dots + u_n < 2$.

Giải

Với $k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k^3} + \sqrt{k}} &= \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k} = \sqrt{k} \frac{1}{k(k+1)} = \sqrt{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sqrt{k} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \end{aligned}$$

Do đó:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n < 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < 2$$

1.22. Cho dãy số (u_n) , (v_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 > 0, v_1 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n}, n \geq 1 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n}, n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{(u_{2011} + v_{2011})^2} > 2\sqrt[3]{2011}$.

Giải

Đặt $w_n = (u_n + v_n)^2$.

Khi đó: $w_{n+1} = (u_{n+1} + v_{n+1})^2 = \left[(u_n + v_n) + \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right) \right]^2 =$

$$\begin{aligned}
 &= (u_n + v_n)^2 + 2(u_n + v_n) \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right) + \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right)^2 \\
 &> (u_n + v_n)^2 + 2(u_n + v_n) \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right) \geq w_n + 8 \quad (\text{bất đẳng thức Cauchy})
 \end{aligned}$$

Suy ra: $w_n > w_{n-1} + 8 > w_{n-2} + 2.8 > \dots > w_2 + (n-2).8$

$$\text{Mà } w_2 = \left[\left(u_1 + \frac{1}{u_1} \right) + \left(v_1 + \frac{1}{v_1} \right) \right]^2 \geq (2+2)^2 = 16 \quad (\text{bất đẳng thức Cauchy})$$

Vì thế: $w_n > 16 + (n-2).8 = 8n \Rightarrow \sqrt[3]{w_n} > 2\sqrt[3]{n}$ hay $\sqrt[3]{(u_n + v_n)^2} > 2\sqrt[3]{n}$

Chọn $n = 2011$, ta được: $\sqrt[3]{(u_{2011} + v_{2011})^2} > 2\sqrt[3]{2011}$.

1.23. Cho đa thức $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ và dãy số (u_n) xác định

$$\text{bởi: } u_n = \prod_{k=1}^n \frac{f(2k-1)}{f(2k)}. \text{ Chứng minh: } u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} < \frac{2011}{4024}$$

Giải

Ta có biến đổi sau

$$f(k) = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 2 = (k^2 + 1)[(k+1)^2 + 1], \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(bạn đọc tự kiểm tra !)

$$\text{Suy ra: } \frac{f(2k-1)}{f(2k)} = \frac{(4k^2 - 4k + 2)(4k^2 + 1)}{(4k^2 + 1)(4k^2 + 4k + 2)} = \frac{(2k-1)^2 + 1}{(2k+1)^2 + 1}$$

$$\text{Do đó: } u_n = \prod_{k=1}^n \frac{f(2k-1)}{f(2k)} = \frac{(1^2 + 1)(3^2 + 1) \dots ((2n-1)^2 + 1)}{(3^2 + 1)(5^2 + 1) \dots ((2n+1)^2 + 1)} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 2}$$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Vậy:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2011} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2012} \right) = \frac{2011}{4024}.$$

1.24. Cho dãy số (u_n) xác định như sau :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_k = u_{k-1} + \frac{1}{n} u_{k-1}^2, k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $1 - \frac{1}{n} < u_n < 1$.

Giải

Ta có: $u_k = u_{k-1} + \frac{1}{n} u_{k-1}^2, k = 1, 2, \dots, n$

$$\Leftrightarrow nu_k - nu_{k-1} - u_{k-1}^2 = 0 \Leftrightarrow nu_k - nu_{k-1} + u_k u_{k-1} - u_{k-1}^2 = u_k u_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow (u_k - u_{k-1})(n + u_{k-1}) = u_k u_{k-1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{n + u_{k-1}}.$$

Rõ ràng: $0 < \frac{1}{2} = u_0 < u_1 < \dots < u_n$.

$$\text{Vì thế: } \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} < \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} \right) < 1 \Rightarrow \frac{1}{u_n} > \frac{1}{u_0} - 1 = 1 \Rightarrow u_n < 1.$$

Mặt khác $u_n < 1$ nên:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} &> \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} \right) > \frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_0} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \\ &\Rightarrow u_n > \frac{n+1}{n+2} > \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Vậy $1 - \frac{1}{n} < u_n < 1$.

1.25. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + u_n^2, n \geq 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng: $1 < \frac{1}{u_1+1} + \frac{1}{u_2+1} + \dots + \frac{1}{u_{2011}+1} < 2$.

Giải

Ta có: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0 \forall n \Rightarrow (u_n)$ tăng.

Mặt khác:

$$u_2 = \frac{3}{4}, u_3 = \frac{21}{16} > 1 \text{ suy ra: } u_n > 1 \forall n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{u_{2012}} < 1.$$

Ta có phân tích sau: $u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{2010} \frac{1}{u_n + 1} = \sum_{n=1}^{2010} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{2012}} = 2 - \frac{1}{u_{2012}} \in (1, 2).$$

Vậy $1 < \frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{2011} + 1} < 2.$

BÀI TẬP VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1.26. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$

Giải

Ta có: $\arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \arctan \frac{(k+1) - k}{1 + (k+1)k} = \arctan(k+1) - \arctan k$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \sum_{k=0}^n (\arctan(k+1) - \arctan k) = \arctan(n+1) - \arctan 1 = \arctan(n+1).$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

1.27. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\cos\left(\pi n \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + n + 1}\right) + \sin\left(\pi n \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + n + 1}\right) \right].$

Giải

Đặt $u_n = \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + n + 1}.$

Ta có: $\cos(\pi n u_n) = \cos[-\pi n u_n + (n+1)n\pi] = \cos \pi n(n+1 - u_n)$

$$= \cos \left[\pi n \frac{(n+1)^3 - u_n^3}{(n+1)^2 + (n+1)u_n + u_n^2} \right] = \cos \left[\frac{2\pi n^2}{(n+1)^2 + (n+1)u_n + u_n^2} \right]$$

$$= \cos \left[\frac{2\pi}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{u_n}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{u_n}{n}\right)^2} \right].$$

Suy ra: $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n u_n) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$

Biến đổi tương tự, ta cũng tìm được : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n u_n) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\cos\left(\pi n \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + n + 1}\right) + \sin\left(\pi n \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + n + 1}\right) \right] = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

1.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 23}{(k+4)!}$.

Giải

Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 23}{(k+4)!}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - 1}{(k+4)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+4)!} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{8!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+4)!} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+4)!} \right)$$

$$= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{41}{24}.$$

1.29. Cho a, b là hai số thực dương. Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$.

Giải

Ta có : $\frac{1}{n} \ln \sqrt[n]{ab} = \frac{1}{2} \ln \sqrt[n]{ab} \leq \ln \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} = \ln \left[\frac{1}{2} (\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{1}{2} (\sqrt[n]{b} - 1) + 1 \right]$

$$< \frac{1}{2} \left[(\sqrt[n]{a} - 1) + (\sqrt[n]{b} - 1) \right] \quad (*)$$

Từ (*) nhân các vế cho n, ta được:

$$\ln \sqrt[n]{ab} \leq \ln \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \leq \frac{1}{2} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{b}} \rightarrow \ln \sqrt{ab}.$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}.$

1.30. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện: $0 \leq u_{n+m} \leq u_n + u_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \inf \left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Giải

Đặt $A = \left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ và $k = \inf A$.

Theo tính chất của $\inf$: $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}^* : k \leq \frac{u_m}{m} < k + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, chia n cho m ta được: $n = qm + r$, $q \in \mathbb{N}^*, 0 \leq r \leq m-1$.

Không mất tính tổng quát có thể xem $u_0 = 0$.

Ta có:

$$u_n = u_{qm+r} \leq qu_m + r \Rightarrow k \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{qu_m + r}{qm + r} = \frac{u_m}{m} \cdot \frac{qm}{qm+1} + \frac{u_r}{n} < k + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{u_r}{n}$$

$0 \leq r \leq m-1$ nên u_r bị chặn. Do đó $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N_0$ thì:

$$0 \leq \frac{u_r}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đó suy ra: $0 \leq \frac{u_n}{n} < k + \varepsilon \quad \forall n > N_0$.

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \inf \left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1.31. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \prod_{k=1}^n \sin \frac{k}{n\sqrt{n}}$.

Giải

+ Bằng cách sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số, ta dễ dàng chứng minh

được bất đẳng thức: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}, \quad \forall x > 0$

Vận dụng kết quả đó vào bài toán này, ta có đánh giá như sau:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3} \right) < \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \prod_{k=1}^n \sin \frac{k}{n\sqrt{n}} < \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6} \right)$$

+ Trước hết, ta tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3} \right)$?

Cũng sử dụng tính chất đơn điệu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x \quad \forall x > -1, x \neq 0.$$

Vì thế, ta có đánh giá: $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{-6n^3 + k^2} < \ln \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3}\right) < \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{-6n^3}$

Hay $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(-6n^3 + n^2)} < \ln \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3}\right) < \frac{n(n+1)(2n+1)}{-36n^3}$.

Áp dụng định lý kẹp ta suy ra được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3}\right) \right) = -\frac{1}{18} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3}\right) = e^{-\frac{1}{18}}.$$

+ Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6}\right) \leq e^{-\frac{1}{18}}.$

Thật vậy!

$$\begin{aligned} \ln \left(\prod_{k=1}^n 1 - \frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6} \right) &< \sum_{k=1}^n \left(-\frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6} \right) = \\ &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{36n^3} + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30.5!n^6} \end{aligned}$$

Suy ra: $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6}\right) \leq e^{-\frac{1}{18}}$

Vậy cũng theo định lý kẹp ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \prod_{k=1}^n \sin \frac{k}{n\sqrt{n}} = e^{-\frac{1}{18}}.$

1.32. Cho (u_n) là dãy các nghiệm liên tiếp của phương trình lượng giác

$\tan x = x$, $x > 0$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{4} \right)$?

Giải

Dễ thấy $n\pi < u_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$; $n = 1, 2, \dots \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Hơn nữa: $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - u_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tan u_n} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - u_n \right) = 0$ (do $y = \tan x$ là hàm liên tục)

Do đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n - \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - u_n \right) - \left(\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - u_{n+1} \right) \right] = 0$

Vậy từ tính liên tục của hàm số $y = \cos x$, ta suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.33. Cho dãy số thực dương (u_n) được xây dựng như sau:

$$\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_n = {}^{2011}\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} u_k} \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$ và hãy tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có: $u_{n+1}^{2011} = \sum_{k=1}^n u_k = u_n^{2011} + u_n > u_n^{2011}$ (do $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$).

Suy ra: $u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq 2$ hay dãy (u_n) tăng thực sự.

Mặt khác:

$$u_{n+1}^{2011} = u_n^{2011} + u_n = u_n(u_n^{2010} + 1) < u_{n+1}(u_n^{2010} + 1) \Rightarrow u_{n+1}^{2010} < u_n^{2010} + 1 \quad \forall n \geq 2$$

Chứng minh bằng quy nạp đơn giản ta được: $u_{n+1}^{2010} < u_2^{2010} + n - 1$. Suy ra: (u_n) bị chặn trên.

Do đó (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Hơn nữa } 0 < \left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)^{2010} < \left(\frac{u_2}{n+1}\right)^{2010} + \frac{n-1}{(n+1)^{2010}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

1.34. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (2\sqrt{6} - 5)u_n + \sqrt{27} - \sqrt{18} \quad , \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Giải

Nhân cả hai vế của (*) cho $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ta được:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})u_{n+1} = u_n^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n + 3$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2})(u_{n+1} - u_n) = u_n^2 - 2\sqrt{3}u_n + 3 = (u_n - \sqrt{3})^2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n) \text{ là dãy số tăng.}$$

$$\text{Hơn nữa } u_n \geq u_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Giả sử (u_n) bị chặn trên. Khi đó dãy (u_n) hội tụ. Đặt

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (L \geq \sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Chuyển giả thuyết bài toán qua giới hạn ta được:

$$L = (\sqrt{3} - \sqrt{2})L^2 + (2\sqrt{6} - 5)L + \sqrt{27} - \sqrt{18} \Leftrightarrow (L - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow L = \sqrt{3}$$

(Điều này vô lý).

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty.$$

Ta lại có:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(u_{k+1} - \sqrt{3}) = (u_k - \sqrt{3})(u_k + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{k+1} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(u_k - \sqrt{3})(u_k + \sqrt{2})} = \frac{1}{u_k - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_k + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_k + \sqrt{2}} = \frac{1}{u_k - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{k+1} - \sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{k+1} - \sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{u_1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$1.35. \text{ Cho dãy số } (u_n) \text{ xác định bởi: } \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{2011}{2010} \ln(u_n^2 + 2011^2) - 2011^2, n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Giải

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \frac{2011}{2010} \ln(x^2 + 2011^2) - 2011^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2011}{2010} \cdot \frac{2x}{x^2 + 2011^2} \leq \frac{2011}{2010} \cdot \frac{2x}{2 \cdot 2011|x|} = \frac{1}{2010} \frac{x}{|x|}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2010}, x \in \mathbb{R}$$

Đặt $g(x) = x - f(x)$

$g'(x) = 1 - f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra: $y = g(x)$ tăng thực sự trên $\mathbb{R}$ và đây là hàm liên tục.

Vì $g(-2011^2)g(0) < 0$ nên phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (-2011^2, 0)$.

Theo đề, ta có: $u_{n+1} = f(u_n)$.

+ Nếu $a = x_0$ thì $u_2 = f(c) = c$. Chứng minh bằng quy nạp ta được: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$.

+ Nếu $a \neq x_0$ thì $u_n \neq c \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ với mỗi n , $\exists c_n$ nằm giữa u_n và c

$$\text{Sao cho: } |u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| \leq \frac{1}{2010} |u_n - c|.$$

$$\text{Suy ra: } 0 < |u_n - c| \leq \frac{1}{2010} |u_{n-1} - c| \leq \dots \leq \frac{1}{2010^{n-1}} |u_1 - c| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Vậy (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c$.

1.36. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 < 0 \\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1, n \geq 1 \end{cases}$.

Hãy tính: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n$.

Giải

Chứng minh bằng quy nạp, ta được: $u_n < 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số, chứng minh được: $e^x - 1 > x \forall x < 0$.

Vì thế: $u_{n+1} = e^{u_n} - 1 > u_n \Rightarrow (u_n)$ tăng thực sự.

Vậy (u_n) là dãy hội tụ.

a) Đặt $a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ($a \leq 0$). Chuyển công thức đã cho qua giới hạn, ta được

$$a = e^a - 1 \Rightarrow a = 0.$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

b) Hãy lưu ý các bài toán nhỏ về giới hạn của hàm số :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2} \quad (\text{quy tắc L'Hospital})$$

Áp dụng định lý Stolz, trong bài toán tìm giới hạn của dãy số này

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{u_n} - \frac{1}{e^{u_n} - 1}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^{u_n} - 1 - u_n}{u_n(e^{u_n} - 1)}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{u_n} - 1 - u_n}{u_n^2}} = -2. \end{aligned}$$

1.37. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} u_1 \in (1, 2) \\ u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{u_n^2}{2}, n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Giải

Chứng minh bằng quy nạp ta được : $u_n \in (1, 2), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có :

$$u_{n+1} = \frac{3 - (u_n - 1)^2}{2}$$

$$\left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \left(3 - (u_n - 1)^2 \right) - \left(3 - (\sqrt{2} - 2) \right)^2 \right| = \frac{1}{2} \left| u_n - \sqrt{2} \right| \left| \sqrt{2} - (2 - u_n) \right|.$$

$$\text{Vì } 0 < 2 - u_n < \sqrt{2} \text{ nên } \left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \left| u_n - \sqrt{2} \right|.$$

$$\text{Suy ra : } 0 \leq \left| u_n - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \left| u_{n-1} - \sqrt{2} \right| < \dots < \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} \left| u_1 - \sqrt{2} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{2}.$$

1.38. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1, v_1 \in (0, 1) \\ u_{n+1} = u_1(1 - u_n - v_n) + u_n, n \geq 1 \\ v_{n+1} = v_1(1 - u_n - v_n) + v_n, n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hai dãy số này hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

Giải

Ta có:

$$u_{n+1} + v_{n+1} = (u_1 + v_1)(1 - (u_n + v_n)) + (u_n + v_n).$$

$$\text{Đặt } w_n = u_n + v_n, \text{ ta có: } w_{n+1} = w_1(1 - w_n) + w_n.$$

$$\text{Chứng minh quy nạp ta được: } w_n = 1 - (1 - w_1)^n.$$

$$\text{Ta cũng thu được: } u_n = \frac{u_1}{w_1} \left(1 - (1 - w_1)^n\right); \quad v_n = \frac{v_1}{w_1} \left(1 - (1 - w_1)^n\right).$$

$$\text{Vì } 0 < |1 - w_1| < 1 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{u_1}{u_1 + v_1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{v_1}{u_1 + v_1}.$$

1.39. Cho dãy số $(u_n), (v_n)$ được xác định như sau :

$$u_n = 1 + \frac{n(1+n)}{1+n^2} + \dots + \frac{n^n(1+n^n)}{1+n^{2n}}; \quad v_n = \left(\frac{u_n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n^2+n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Giải

$$\text{Để chứng minh } 1 \leq \frac{n^k(1+n^k)}{1+n^{2k}} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, k = 1, 2, \dots, n.$$

Từ công thức xác định dãy số (u_n) ta suy ra :

$$n+1 \leq u_n \leq 2n+1 < 2(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Do đó: } 1 \leq v_n < 2^{\frac{1}{n^2+n}} < 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1.$$

$$\textbf{1.40.} \text{ Cho dãy số } (u_n) \text{ xác định bởi: } u_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\prod_{j=0}^{2011} (i+j)} \right).$$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Giải

$$\text{Chứng minh quy nạp: } u_n = \frac{1}{2011} \left(\frac{1}{2011!} - \frac{n!}{(2011+n)!} \right), \quad n \geq 1.$$

+ Với $n=1$, ta có:

$$u_1 = \frac{1}{1 \cdot (1+1)(1+2) \dots (1+2011)} = \frac{1}{2011} \cdot \frac{2012-1}{2012!} = \frac{1}{2011} \left(\frac{1}{2011!} - \frac{1}{(2011+1)!} \right)$$

(Đúng với $n=1$).

+ Giả sử công thức đúng đến n . Cần chứng minh nó đúng đến $n+1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+2012)} \\ &= \frac{1}{2011} \left(\frac{1}{2011!} - \frac{n!}{(2011+n)!} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+2012)} \\ &= \frac{1}{2011 \cdot 2011!} - \frac{n!}{2011(2011+n)!} + \frac{n!}{(n+2012)!} \\ &= \frac{1}{2011 \cdot 2011!} - \frac{(n+1)!}{2011(2011+n+1)!} = \frac{1}{2011} \left(\frac{1}{2011!} - \frac{(n+1)!}{(2011+n+1)!} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2011 \cdot 2011!}.$$

1.41. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_n = \sqrt{\frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{2}{n^3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n^3}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Hãy tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Giải

Xét $x \in [k; k+1]$ ($k \in \mathbb{N}$). Suy ra: $\sqrt{k} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{k+1}$, $\forall x \in [k; k+1]$

Lấy tích phân: $\sqrt{k} < \int_k^{k+1} \sqrt{x} dx < \sqrt{k+1}$.

Suy ra: $\int_{j-1}^j \sqrt{x} dx < \sqrt{j} < \int_j^{j+1} \sqrt{x} dx$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Vì thế: $\sum_{j=1}^n \int_{j-1}^j \sqrt{x} dx < \sum_{j=1}^n \sqrt{j} < \sum_{j=1}^n \int_j^{j+1} \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \int_0^n \sqrt{x} dx < \sum_{j=1}^n \sqrt{j} < \int_1^{n+1} \sqrt{x} dx$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^3}} \int_0^n \sqrt{x} dx < \frac{1}{\sqrt{n^3}} \sum_{j=1}^n \sqrt{j} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} \int_1^{n+1} \sqrt{x} dx$$

$$\text{Hay } \frac{2}{3} < u_n < \frac{2}{3} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} - \frac{1}{\sqrt{n^3}} \right] \rightarrow \frac{2}{3} \quad (n \rightarrow +\infty). \quad \text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

1.42. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + 2011 \int_a^b |x - u_n|^{2012} dx, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Giải

Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2011 \int_a^b |x - u_n|^{2012} dx \geq 0 \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

Giả sử nó bị chặn trên. Khi đó nó hội tụ. Đặt $a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

Chuyển qua giới hạn ta được : $L = L + 2011 \int_a^b |x - L|^{2012} dx \Leftrightarrow \int_a^b |x - L|^{2012} dx = 0$,

mâu thuẫn.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

DÃY SỐ VÀ SỐ HỌC

1.43. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)u_n + 2 - \frac{3}{n}, n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy số đều là số nguyên.

Giải

$$u_1 = 1 = 1 + \frac{(1-1) \cdot 1 \cdot (1+4)}{6}$$

$$u_2 = 3 = 1 + \frac{(2-1) \cdot 2 \cdot (2+4)}{6}$$

$$\text{Dự đoán : } u_n = 1 + \frac{(n-1)n(n+4)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh quy nạp để kiểm tra tính đúng đắn của công thức này. Phần này đơn giản dành cho bạn đọc tự giải quyết.

$$\text{Dễ thấy : } (n-1)n(n+4) = (n-1)n(n+1) + 3n(n-1) : 6.$$

Vậy tất cả các số hạng của dãy đều là số nguyên.

1.44. Cho dãy số (u_n) xác định như sau :
$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ \det \begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} = n! , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy đều nguyên.

Giải

Từ công thức trên ta suy ra :
$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1}}{u_n} + \frac{n!}{u_n}.$$

Ta có :

$$u_3 = \frac{1.1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

$$u_4 = \frac{2.1}{1} + \frac{1}{1} = 3$$

$$u_5 = \frac{3.2}{1} + \frac{2}{1} = 4.2$$

$$u_6 = \frac{4.2.3}{2} + \frac{3.2}{2} = 4.3 + 1.3 = 5.3$$

$$u_7 = \frac{5.3.4.2}{3} + \frac{4.3.2}{3} = 5.4.2 + 4.2 = 6.4.2$$

$$u_8 = \frac{6.4.2.5.3}{4.2} + \frac{5.4.3.2}{4.2} = 6.5.3 + 5.3 = 7.5.3$$

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)...$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } u_{n+3} &= \frac{u_{n+2}u_{n+1} + n!}{u_n} = \frac{(n+1)(n-1)(n+3)...n(n-2)(n-4)... + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)...} \\ &= \frac{(n+1).n! + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)...} = \frac{(n+2).n!}{(n-1)(n-3)(n-5)...} = (n+2)n(n-2)(n-4)... \end{aligned}$$

Vậy tất cả các số hạng của dãy đều nguyên.

1.45. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :
$$u_n = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng : $u_1 + u_2 + ... + u_{40}$ là một số nguyên.

Giải

Đặt $v_n = \sqrt{2n-1}$, suy ra : $v_{n+1}^2 + v_n^2 = 4n$.

Ta có :

$$u_n = \frac{v_{n+1}^2 + v_n^2 + v_{n+1}v_n}{v_{n+1} + v_n} = \frac{(v_{n+1} - v_n)(v_{n+1}^2 + v_n^2 + v_{n+1}v_n)}{(v_{n+1} - v_n)(v_{n+1} + v_n)} = \frac{v_{n+1}^3 - v_n^3}{v_{n+1}^2 - v_n^2} = \frac{1}{2}(v_{n+1}^3 - v_n^3).$$

$$\begin{aligned} \text{Nhu vậy } u_1 + u_2 + \dots + u_{40} &= \frac{1}{2}(v_2^3 - v_1^3) + \frac{1}{2}(v_3^3 - v_2^3) + \dots + \frac{1}{2}(v_{41}^3 - v_{40}^3) \\ &= \frac{1}{2}(v_{41}^3 - v_1^3) = \frac{1}{2}(\sqrt{81^3} - 1) = 364. \end{aligned}$$

Vậy $u_1 + u_2 + \dots + u_{40}$ là một số nguyên.

1.46. Cho dãy số vô hạn (u_n) xác định như sau : $u_n = 3(n^2 + n) + 7$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Chúng minh rằng không có phần tử nào của dãy là lập phương của một số nguyên.

Giải

Giả sử tồn tại n để $u_n = a^3$, $a \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Ta có : } 3(n^2 + n) + 7 = a^3. \quad (*)$$

Vì $3(n^2 + n) = 3n(n+1)$ là một số chẵn nên a^3 là số lẻ, suy ra a là số lẻ, nghĩa là $a = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Thay } a = 2k + 1 \text{ vào } (*) \text{ ta thu được : } 3(n^2 + n + 2) = 8k^3 + 12k^2 + 6k. \quad (**)$$

$$\text{Vì } 3(n^2 + n + 2) : 3 \text{ nên } 8k^3 + 12k^2 + 6k : 3$$

Mà $12k^2 + 6k : 3 \Rightarrow 8k^3 : 3 \Rightarrow k^3 : 3 \Rightarrow k : 3$. Suy ra : $k = 3l$, $l \in \mathbb{N}$. Thay vào $(**)$ ta được : $3(n^2 + n + 2) = 8.27l^3 + 12.9l^2 + 6.3l$

$$\text{hay } n^2 + n + 2 = 6(12l^3 + 6l^2 + l) \quad (***)$$

Rõ ràng vế phải của $(***)$ chia hết cho 6. Ta kiểm tra và thấy rằng vế phải không chia hết cho 3. Điều này vô lý. Vậy không có phần tử nào của dãy số là lập phương của một số nguyên.

$$\text{1.47. Cho dãy số nguyên } (u_n) \text{ xác định bởi : } \begin{cases} u_1 = 4, u_2 = 22 \\ u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

Chúng minh rằng tồn tại các dãy số (x_n) , (y_n) sao cho : $u_n = \frac{y_n^2 + 7}{x_n - y_n}$, $n \geq 1$.

Giải

$$\text{Đặt } x_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}, y_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{2} \text{ với } x_1 = 3, y_1 = 1.$$

$$\text{Khi đó ta có các hệ thức : } \begin{cases} x_n = 3x_{n-1} + 4y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases}$$

Theo cách đặt ta có : $u_n = x_n + y_n$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh : $x_n + y_n = \frac{y_n^2 + 7}{x_n - y_n} \Leftrightarrow x_n^2 = 2y_n^2 + 7, n \geq 1$.

Chứng minh bằng quy nạp, ta thấy điều này luôn đúng.

Vậy bài toán đã được chứng minh.

C- BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.48. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ u_{n+1} = 24u_n^3 - 12\sqrt{6}u_n^2 + 15u_n - \sqrt{6}, n \geq 1 \end{cases}$$

Hãy tìm u_{2011} ?

1.49. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ xác định như sau:

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.50. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = \left| u_n - \frac{1}{2^n} \right| \end{cases}$. Hãy tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$?

1.51. Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{2011}$ các số nguyên dương thỏa : $\sum_{k=1}^{2011} \frac{1}{\sqrt{u_k}} = 2\sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng dãy số này có ít nhất hai số hạng bằng nhau.

1.52. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện: $|u_{m+n} - u_m - u_n| < \frac{1}{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng dãy (u_n) là một cấp số cộng.

1.53. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện: $|u_n - u_m| > \frac{1}{n} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*, n < m$

Chứng minh dãy (u_n) bị chặn.

1.54. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2011} \\ u_{n+1} = \sqrt{2011 + u_n} \end{cases}$.

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$?

1.55. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \sqrt{9u_n^2 + 11u_n + 3} \end{cases}$$

Tìm $m \in \mathbb{R}$ để dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n}{m^n}$ là hội tụ.

1.56. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k \cos^2 \left(\frac{2011}{2^k} \right)}$.

1.57. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{(2 + 2\cos\varphi)u_n + \cos^2\varphi}{(2 - 2\cos 2\varphi)u_n + 2 - \cos 2\varphi}, n \geq 1 \end{cases}$$

Xét dãy số (v_n) xác định bởi: $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2u_k + 1}$, $n \geq 1$.

Tìm các giá trị của φ sao cho dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$?

1.58. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 2011 \\ u_{n+1} = u_n \sin^2 \varphi + \frac{2011 \cos^2 \varphi}{u_n^{\tan^2 \varphi}} \end{cases}$$

ở đây $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ là góc cho trước. Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

1.59. Cho dãy số (u_n) , (v_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1} \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{1 - 4u_{n+1}^2} \end{cases}$$

Với $n \geq 1$, hãy tìm các giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

1.60. Cho hai dãy số (u_n) , (v_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

Với $n \geq 1$. Hãy tính các giới hạn sau: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{v_n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n}$.

1.61. Cho phương trình: $x^n - nx + 1 = 0$. Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm u_n, v_n sao cho $0 < u_n < 1 < v_n$. Tìm các giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

1.61. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{(4n+2)u_n + 1} \end{cases}$$

Hãy tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{2011}$.

1.62. Cho dãy số $(u_n) \subset \mathbb{R}^+$. Giả sử với mỗi $a > 0$ cho trước, tồn tại c sao cho

$$u_{n+1}^a + \frac{1}{u_n} < c \quad \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng nếu $c = (a+1)a^{-\frac{a}{a+1}}$ thì dãy (u_n) hội tụ. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

b) Khẳng định trên còn đúng không khi $c > (a+1)a^{-\frac{a}{a+1}}$.

1.63. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 8 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{arccot} u_k^2$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

1.64. Cho dãy số $(u_n), (v_n)$ thỏa mãn $v_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$; $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tăng.

và dãy số (w_n) xác định bởi: $w_n = \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{\sum_{k=0}^n v_k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng dãy số (w_n) là dãy tăng.

1.65. Chứng minh rằng hai dãy số $(u_n), (v_n)$ xác định bởi:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha k!}; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^{\alpha+1} \cdot n!}, \quad n \geq 1, \alpha \in \mathbb{Q}_+^* \text{ (hay } \mathbb{R}_+^*) \text{ cố định}$$

là hai dãy kề nhau.

CHƯƠNG 2 GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. GIỚI HẠN HÀM SỐ.

1. Các loại hàm số đặc biệt

Hàm số $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ được định nghĩa là:

- a) Hàm số tăng nếu $\forall a, b \in E, a < b, f(a) \leq f(b)$
- b) Hàm số tăng thực sự nếu $\forall a, b \in E, a < b, f(a) < f(b)$
- c) Hàm số giảm nếu $\forall a, b \in E, a < b, f(a) \geq f(b)$
- d) Hàm số giảm thực sự nếu $\forall a, b \in E, a < b, f(a) > f(b)$
- e) Hàm số đơn điệu nếu hàm này tăng hoặc giảm
- f) Hàm số đơn điệu thực sự nếu hàm này tăng thực sự hoặc giảm thực sự
- g) Bị chặn nếu $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M, \forall x \in E,$
- h) Bị chặn trên nếu $\exists \alpha \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha \forall x \in E,$
- i) Bị chặn dưới nếu $\exists \beta \in \mathbb{R} : f(x) \geq \beta \forall x \in E,$
- j) Hàm chẵn nếu $f(-x) = f(x) \forall x \in E$ (E là miền xác định đối xứng)
- k) Hàm lẻ nếu $f(-x) = -f(x) \forall x \in E$ (E là miền xác định đối xứng)
- l) Hàm tuần hoàn nếu $\exists T > 0 : x \in E \Rightarrow x + T \in E$ và $f(x + T) = f(x)$
- m) Hàm lồi $\Leftrightarrow \forall (a, b) \in E^2, \forall \lambda \in [0, 1]$ ta có:
$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$
- n) Hàm lõm $\Leftrightarrow -f$ là hàm lồi.

2. Giới hạn hàm số

2.1. Định nghĩa

Cho tập con $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ và x_0 được gọi là điểm tụ của tập E .

$L \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L (x \rightarrow x_0)$.

Nếu hàm số có giới hạn tại điểm x_0 thì giới hạn đó là duy nhất.

Nếu $\alpha(x)$ là hàm số xác định trên E và $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là đại lượng vô cùng bé (VCB) khi $x \rightarrow x_0$.

2.2. Giới hạn một phía

a) $L \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn bên trái của $f(x)$ tại x_0 , ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E: 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

b) $L \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn bên phải của $f(x)$ tại x_0 , ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

2.3. Một số tính chất

Giả sử tồn tại các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = K$

Khi đó:

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = LK$$

$$c) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K} \quad (K \neq 0)$$

$$d) f(x) \leq g(x) \text{ (trong lân cận của } x_0) \Rightarrow L \leq K$$

$$e) \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|.$$

+ Lưu ý rằng trong quá trình giải bài tập toán, ta thường xuyên sử dụng một số giới hạn quen thuộc dưới đây:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (0 < a \neq 1).$$

2.4. Định lý Kẹp

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = M$ và $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in E$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = M$.

2.5. Một số mở rộng

2.5.1. Giới hạn $+\infty$ hay $-\infty$.

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \alpha > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha$.
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \alpha > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\alpha$.

2.5.2. Giới hạn tại điểm $+\infty$ hay $-\infty$

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E : x > \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E : x < -\alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Suy luận tương tự, ta có thể định nghĩa các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3. Vô cùng bé-vô cùng lớn

3.1. Định nghĩa

Cho đại lượng $\alpha(x)$ xác định trên khoảng mở $(a; b)$, $x_0 \in [a; b]$.

Khi đó: $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) trên (a, b) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$; $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) trên (a, b) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |\alpha(x)| = +\infty$.

3.2. Tính chất của các phép toán

- a) Tổng của hai VCB là một VCB;
- b) Tích của một vô cùng bé và một đại lượng bị chặn là một VCB
- c) Tích hai vô VCL là một VCL
- d) Tổng của một VCL và một đại lượng bị chặn là một VCL
- e) $\alpha(x)$ là VCL thì $\frac{1}{\alpha(x)}$ là VCB
- f) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow f(x) = L + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

3.3. Phân loại VCB

Nếu $\alpha(x)$ là VCB và $\alpha(x) \neq 0$ thì $\frac{1}{\alpha(x)}$ là VCL, do đó ta chỉ cần phân loại VCB.

Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow x_0$, $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn $\beta(x)$, ký hiệu $\alpha(x) = O(\beta(x))$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Hai VCB $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ được gọi là cùng cấp nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L \neq 0$

$\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là tương đương, ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

4. Hàm liên tục

4.1. Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ xác định trong tập $E \subset \mathbb{R}$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Nếu x_0 là điểm tụ của tập $E \subset \mathbb{R}$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 nếu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in E$ thì $f(x)$ được gọi là liên tục trên E .

4.2. Liên tục một bên

a) Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục bên trái tại $x = x_0 \in E$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

b) Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục bên phải tại $x = x_0 \in E$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0 \in E \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

4.3. Hàm số gián đoạn

Hàm số $f(x)$ được gọi là gián đoạn tại điểm x_0 nếu nó không liên tục tại điểm đó.

Hàm số $f(x)$ được gọi là gián đoạn khử được tại x_0 nếu nó gián đoạn tại x_0 và tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Cũng lưu ý rằng trong một số tình huống nào đó, có thể xem hàm gián đoạn khử được tại x_0 là hàm liên tục tại x_0 .

Điểm $x_0 \in E$ được gọi là điểm gián đoạn loại một của $f(x)$ nếu:

- + $f(x)$ gián đoạn tại x_0
- + Tồn tại các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Nếu $f(x)$ gián đoạn tại x_0 nhưng không gián đoạn loại một tại điểm đó thì ta nói $f(x)$ gián đoạn loại hai tại x_0 ; còn x_0 là điểm gián đoạn loại hai.

4.4. Tính liên tục đối với các phép toán

$$f(x) \pm g(x) ; f(x)g(x) ; \frac{f(x)}{g(x)} \text{ với } g(x) \neq 0 ; \quad \lambda f(x) \text{ với } \lambda \in \mathbb{R}$$

4.5. Sự liên tục của hàm hợp

$g:(e,f) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục tại điểm $t_0 = f(x_0) \in (c,d)$ với $(c,d) \subset (e,f)$. Khi đó hàm hợp $g \circ f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g \circ f(x) = g(f(x))$ cũng liên tục tại x_0

4.5. Bổ đề Bolzano-Weierstrass.

trong $[a; b]$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì đó đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$. Nghĩa là tồn tại $c, d \in [a; b]$ sao cho $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ với mọi $x \in [a; b]$.

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại c thuộc (a, b) sao cho $f(c) = 0$.

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $f(a)=u$, $f(b)=v$ thì mọi w nằm giữa u và v đều tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(c)=w$.

Cho E là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ là một ánh xạ, ta ký hiệu

$$\begin{aligned}\hat{f} : E &\rightarrow f(E) \\ x &\mapsto f(x).\end{aligned}$$

a) $f(E)$ là một khoảng

c) $\hat{f}^{-1}$ đơn điệu thực sự cùng với f d) $\hat{f}^{-1}$ liên tục trên $f(E)$

c) $\hat{f}^{-1}$ đơn điệu thực sự cùng với f d) $\hat{f}^{-1}$ liên tục trên $f(E)$

Hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập E gọi là liên tục đều trên E nếu
 $0, \exists \delta > 0, \forall u, v \in E: |u-v| < \delta \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon.$

4.11. Định lý Cantor

Nếu hàm số f liên tục trên $[a; b]$ thì nó liên tục đều trên $[a; b]$.

4.12. Ánh xạ Lipchitz

4.12.1. Định nghĩa

Cho ánh xạ $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- Với k là số thực dương. Ta nói f là ánh xạ k -Lipschitz khi và chỉ khi với mọi $u, v \in E$, $|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|$.
- Ta nói f là ánh xạ Lipschitz khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{R}^+$ sao cho f là ánh xạ k -Lipschitz.
- Một ánh xạ $f : E \rightarrow E$ là một ánh xạ co khi và chỉ khi tồn tại $k \in [0; 1)$ sao cho f là ánh xạ k -Lipschitz.

4.12.2. Mệnh đề: Nếu $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ Lipschitz thì f liên tục đều.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

BÀI TẬP VỀ GIỚI HẠN HÀM SỐ

2.1. Tính giới hạn của hàm số $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 + 2 + 3 + \dots + \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil \right)$.

Giải

$$\text{Ta có: } x^2 \left(1 + 2 + 3 + \dots + \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil \right) = x^2 \frac{1 + \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil}{2} \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil.$$

Từ định nghĩa của hàm phần nguyên ta suy ra nếu $0 < |x| < 1$ thì

$$\frac{1 - |x|}{2} < x^2 \left(1 + 2 + 3 + \dots + \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil \right) \leq \frac{1 + |x|}{2}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - |x|}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + |x|}{2} = \frac{1}{2}$ nên áp dụng định lý Kẹp ta suy ra:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 + 2 + 3 + \dots + \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil \right) = \frac{1}{2}.$$

2.2. Giả sử $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu sao cho $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Chứng minh

rằng $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = 1 \quad \forall k > 0$.

Giải

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1} x)} \frac{f(2^{n-1} x)}{f(2^{n-2} x)} \cdots \frac{f(2x)}{f(x)} = 1.$$

Giả sử $f(x)$ tăng và $k \geq 1$. Ta thấy tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $2^n \leq k < 2^{n+1}$.

Theo tính đơn điệu của f , ta có: $f(2^n x) \leq f(kx) \leq f(2^{n+1} x)$. Từ đây suy ra

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = 1 \quad \forall k \geq 1.$$

Cũng suy luận như trên, trong trường hợp $0 < k < 1$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{f\left(\frac{u}{k}\right)} = 1.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = 1 \quad \forall k > 0.$$

2.3. Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Giải

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)\right| < \varepsilon$$

Bây giờ lấy $n \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $\frac{1}{n} < \delta$. Với $0 < t < \frac{1}{n+1}$, đặt $x = \frac{1-t}{n}$ thì

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{n} < \frac{1-t}{n} = x < \frac{1}{n}. \text{ Vì thế } n < \frac{1}{x} < n+1 \text{ hay } \left[\frac{1}{x}\right] = n.$$

$$\text{Suy ra: } x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) = x\left(\frac{1}{x} - n\right) = 1 - \frac{1-t}{n} = t.$$

$$\text{Tóm lại: với } 0 < t < \frac{1}{n+1} \text{ thì } |f(t)| = \left|f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Lưu ý rằng trong trường hợp $t < 0$, chúng ta cũng chứng minh tương tự.
 Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2.4. Cho biết $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$. Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)(f(x) - 1) = 2011 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = e^{2011}.$$

Giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{g(x) \ln f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(f(x)-1+1)}{f(x)-1} g(x)(f(x)-1)} = e^{2011}.$$

2.5. Chứng minh rằng nếu f bị chặn trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(ax) = bf(x)$ với $x \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$; $a, b > 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Giải

Hàm số f bị chặn trên $[0,1]$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho: $|f(x)| \leq M$.

Từ giả thiết bài toán, chứng minh quy nạp ta được:

$$f(a^n x) = b^n f(x) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{a^n}\right], n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Vì vậy } |f(x)| \leq \frac{M}{b^n}, x \in \left[0, \frac{1}{a^n}\right], n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Hơn nữa $f(ax) = bf(x) \Rightarrow f(0) = 0$. Kết hợp với (1) ta suy ra điều phải chứng minh.

2.6. Giả sử hàm $f : (-a; a) \setminus \{0\} \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$.

Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Giải

Với $f(x) > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ sao cho } 0 \leq f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \varepsilon \text{ với } 0 < |x| < \delta.$$

$$\text{Ta có: } 0 \leq f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq (f(x) - 1) + \left(\frac{1}{f(x)} - 1 \right) < \varepsilon \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (f(x)-1) \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) < \varepsilon \quad (2).$$

Bình phương hai vế của (1), ta được:

$$\begin{aligned} & (f(x)-1)^2 + \left(\frac{1}{f(x)}-1\right)^2 + 2(f(x)-1) \left(\frac{1}{f(x)}-1\right) < \varepsilon^2 \\ \Leftrightarrow & (f(x)-1)^2 + \left(\frac{1}{f(x)}-1\right)^2 - 2(f(x)-1) \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) < \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta suy ra: $(f(x)-1)^2 + \left(\frac{1}{f(x)}-1\right)^2 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$.

$$\Rightarrow (f(x)-1)^2 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

2.7. Hãy chỉ ra một ví dụ chứng tỏ rằng: $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f(2x)) = 0$ (*) không suy ra được f có giới hạn tại 0. Tập $(a - \varepsilon; a + \varepsilon) \setminus \{a\}$, ở đây $\varepsilon > 0$ được gọi là lân cận khuyết của điểm $a \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm φ sao cho bất đẳng thức $f(x) \geq \varphi(x)$ được thỏa mãn trong lân cận khuyết của 0 và $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$ thì từ (*) suy ra được: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Giải

Ví dụ

Xét $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{nếu } x = \frac{1}{2^n}, n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$

$$\varphi(x) \leq f(x) = (f(x) + f(2x)) - f(2x) \leq (f(x) + f(2x)) - \varphi(2x)$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f(2x) - \varphi(x)) = 0 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

2.8.

a) Cho ví dụ về hàm f thỏa mãn điều kiện $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) f(2x)) = 0$ nhưng $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ không tồn tại.

b) Tập $(-\varepsilon; \varepsilon) \setminus \{0\}$, ở đây $\varepsilon > 0$ được gọi là lân cận khuyết của điểm 0. Chứng minh rằng nếu trong một lân cận khuyết của 0, các bất đẳng thức $f(x) \geq |x|^{\frac{2011}{2012}}$ và $f(x) f(2x) \geq |x|$ được thỏa mãn thì $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Giải

$$\text{nếu } x = \frac{1}{2^n}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a) Xét $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{nếu } x = n \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$

b) $|x|^{\frac{2011}{2012}} \leq f(x) \leq \frac{|x|}{f(2x)} \leq \frac{|x|}{|2x|^{\frac{2011}{2012}}}$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2.9. Cho trước số thực α , giả sử $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(ax)}{x^\alpha} = g(a)$ với mỗi số dương a . Chứng minh rằng tồn tại c sao cho $g(a) = ca^\alpha$.

Giải

Ta có: $\frac{g(a)}{a^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(ax)}{a^\alpha x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} = g(1) \Rightarrow g(a) = g(1)a^\alpha$. Chọn $c = g(1)$ ta được $g(a) = ca^\alpha$.

2.10. Giả sử $f: (-a; a) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = L.$$

Giải

($\Rightarrow$) Giả sử $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$.

Khi đó $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right): |f(y) - L| < \varepsilon$ nếu $0 < |y| < \delta$ (*)

Đề ý rằng: Nếu $0 < |x| < \delta$ thì $0 < |y| = |\sin x| < |x| < \delta$. Vì thế theo (*) ta suy ra $|f(\sin x) - L| < \varepsilon$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = L$.

($\Leftarrow$) Giả sử $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = L$.

Khi đó $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $|f(\sin x) - L| < \varepsilon$ nếu $0 < |x| < \delta$ (**)

Nếu $0 < |y| < \sin \delta$ thì $0 < |x| = |\arcsin y| < \delta$. Theo (**) ta nhận được $|f(y) - L| = |f(\sin x) - L| < \varepsilon$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$.

BÀI TẬP XOAY QUANH TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

2.11. Khảo sát tính liên tục của các hàm số sau

$$a) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2011^n - 2 + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2} \quad (x \neq 0)$$

$$b) g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{(\cos 2011x)^{2n} + (\sin 2011x)^{2n}}$$

Giải

$$a) \text{ Ta có: } \sqrt[n]{2011^n - 2 + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2} = \sqrt[n]{2011^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}$$

Vì thế: $f(x) = \max\left\{2011, x^2, \frac{1}{x^2}\right\}$. Hàm số này liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Ta có: $g(x) = \max\{|\cos 2011x|, |\sin 2011x|\}$. Hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$.

2.12. Cho hàm số $f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$, $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chứng minh rằng f liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \\ n + (x - n)^n & \text{khi } x \in [n; n+1) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi $x \neq n$. Hơn nữa $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = f(n) = n$.

Vậy f liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

2.13. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^{2011}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{2011}(x) = x$ với

mọi $x \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng: $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

Ta chứng minh f là đơn ánh

Thật vậy!

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ta có:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^2(x_1) = f^2(x_2) \Rightarrow \dots \Rightarrow f^{2011}(x_1) = f^{2011}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Hơn nữa f liên tục nên f đơn điệu ngặt trên $\mathbb{R}$.

Nếu f giảm ngặt trên $\mathbb{R}$ thì f^2 tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Suy ra f^3 giảm thực sự trên $\mathbb{R}$. Tiếp tục như vậy ta sẽ thu được f^{2011} giảm ngặt trên $\mathbb{R}$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết $f^{2011}(x) = \underbrace{f_0 f_0 \dots f_0}_{2011} f(x) = x$.

Giả sử f tăng thực trên $\mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh phản chứng để giải quyết kết luận của bài toán. Giả sử $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq x_0$.

Không giảm tính tổng quát giả sử $\exists x_0 : f(x_0) > x_0$ thì $f^2(x_0) > f(x_0) > x_0 \Rightarrow f^3(x_0) > f^2(x_0) > f(x_0) > x_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow f^{2011}(x_0) > f(x_0) > x_0$. Điều này mâu thuẫn. Vậy $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2.14. Tìm giá trị của k sao cho tồn tại hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x)) = kx^9 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải

- Trường hợp: $k = 0$ thì hàm $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp: $k \neq 0$

+ f liên tục.

+ f là một đơn ánh. Thật vậy! $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow kx^9 = ky^9 \Rightarrow x^9 = y^9 \Rightarrow x = y.$$

Vì f liên tục và là đơn ánh nên f đơn điệu thực sự

• Nếu f tăng thực sự.

$$\text{Khi đó: } x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(f(x)) < f(f(y)) \Rightarrow f(f(x))$$

tăng thực sự.

• Nếu f giảm thực sự

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(f(x)) < f(f(y)) \Rightarrow f(f(x)) \text{ giảm thực sự.}$$

Vậy $f(f(x))$ là hàm tăng thực, vì thế $y = kx^9$ cũng là hàm tăng thực sự. Do đó $k > 0$.

Ngược lại với $k > 0$, ta luôn tìm được hàm $f(x) = \sqrt[9]{k}x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2.15. Tồn tại hay không hàm liên tục $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện:

$$(i) \quad f(2011) < f(2012) \quad (ii) \quad f(f(x)) = \frac{2010}{x}.$$

Giải

+ Trước hết ta chứng minh f là đơn ánh.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, ta có:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow \frac{2010}{x_1} = \frac{2010}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

+ f liên tục và đơn ánh suy ra f đơn điệu. Kết hợp với điều kiện (i) suy ra f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$. Khi đó $f(f(x)) = \frac{2010}{x}$ cũng là hàm đồng biến. Điều này vô lý

vì $y = \frac{2010}{x}$ là hàm nghịch biến.

Vậy không tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2.16. Giả sử hàm số f liên tục trên $[0; +\infty)$, $f(x) \geq 0 \forall x \geq 0$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2011}{2012}. \text{ Chứng minh rằng tồn tại } c \geq 0 \text{ sao cho } f(c) = c.$$

Giải

+ Nếu $f(0) = 0$ thì kết luận trên hoàn toàn đúng.

+ Nếu $f(0) > 0$

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - x$$

Vì f liên tục trên $[0; +\infty)$ nên g cũng liên tục trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0 \forall x \geq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2011}{2012} < 1 \Rightarrow \exists b > 0: \frac{f(b)}{b} < 1 \Leftrightarrow \exists b > 0: f(b) < b.$$

Khi đó: $g(b) = f(b) - b < 0$.

$$g(0)g(b) \leq 0 \Rightarrow \exists c \in [0; b] \subset [0; +\infty): g(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \geq 0: f(c) = c.$$

2.17. Cho f liên tục trên $[0; 2012]$. Chứng minh rằng tồn tại các số

$$x_1, x_2 \in [0; 2012], x_1 - x_2 = 1006 \text{ thỏa mãn: } f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(2012) - f(0)}{2}$$

Giải

$$\text{Xét hàm số: } F(x) = \frac{(x+1006) - f(x)}{1006} - \frac{f(2012) - f(0)}{2012}, x \in [0; 1006].$$

F liên tục trên $[0; 1006]$. Ta có:

$$F(0) = \frac{2f(1006) - f(2012) - f(0)}{2012}$$

$$F(1006) = -\frac{2f(1006) - f(2012) - f(0)}{2012}$$

$$F(0)F(1006) \leq 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [0;1006]: F(x_0) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in [0;1006]: f(x_0 + 1006) - f(x_0) = \frac{f(2012) - f(0)}{2}.$$

Đặt $x_2 = x_0 + 1006$, $x_1 = x_0$ ta có điều phải chứng minh.

2.18. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2011}) = f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_{2011})$$

với mọi bộ số thỏa mãn: $x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2011} = 0$.

Giải

Đặt $f(0) = b$, $g(x) = f(x) - b$. Do đó: $g(0) = f(0) - b = 0$

$$\text{và } g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{2011}) = g(y_1) + g(y_2) + \dots + g(y_{2011})$$

với mọi bộ số thỏa mãn: $x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2011} = 0$.

Trước hết cho $y_1 = y_2 = \dots = y_{2011} = 0$, $x_1 = x_2 = \dots = x_{2009} = 0$, $x_{2010} = x$, $x_{2011} = -x$

ta được: $g(-x) = -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Tiếp theo cho

$y_1 = y_2 = \dots = y_{2011} = 0$, $x_1 = x_2 = \dots = x_{2008} = 0$, $x_{2009} = x$, $x_{2010} = y$, $x_{2011} = -x - y$ ta được:

$$g(x) + g(y) + g(-x - y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Đây là phương trình hàm Cauchy, do đó: $g(x) = ax$, $a = g(1)$.

Vậy $f(x) = ax + b$, $a, b = \text{const}$.

2.19. Với $n \in \mathbb{N}$, gọi $f \in C([0; n])$ sao cho $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1, x_2 trong khoảng $[0; n]$ thỏa mãn $x_2 - x_1 = 1$ và $f(x_2) = f(x_1)$.

Giải

Xét $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in [0; n-1]$

$$g(0) + g(1) + \dots + g(n-1)$$

$$= f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \dots + f(n) - f(n-1) = f(n) - f(0) = 0$$

+ Nếu $g(k) = 0$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.

+ Nếu $\exists k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}: g(k) \neq 0$. Không mất tính tổng quát giả sử

$$g(k) > 0 \text{ thì lúc đó luôn tìm được } h \neq k, h \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ sao cho } g(h) < 0.$$

Khi đó tồn tại $x_0 \in [0; n-1]$ sao cho $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0 + 1) = f(x_0)$.

Vậy có thể lấy $x_2 = x_0 + 1$, $x_1 = x_0$.

2.20. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tuần hoàn với chu kỳ 4022. Chứng minh rằng tồn tại c thuộc $\mathbb{R}$ sao cho: $f(c + 2011) = f(c)$.

Giải

Xét hàm số: $g(x) = f(x + 2011) - f(x)$

Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\mathbb{R}$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$g(x + 2011) = f(x + 4022) - f(x + 2011) = f(x) - f(x + 2011) = -g(x)$$

$$\Rightarrow g(x)g(x + 2011) = -(g(x))^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lấy bất kì $u \in \mathbb{R}$ thì $g(u)g(u + 2011) \leq 0$. Do đó

$$\exists x_0 \in (u; u + 2011) \subset \mathbb{R} : g(x_0) = 0.$$

Như vậy bài toán đã được chứng minh xong.

2.21. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục sao cho $|f(x) - f(y)| \geq \sqrt{2011}|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Chứng minh f là song ánh.

Giải

+ Trước hết ta chứng f là đơn ánh.

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 0 = |f(x_1) - f(x_2)| \geq \sqrt{2011}|x_1 - x_2| \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

+ f đơn ánh và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên f là hàm đơn điệu

Giả sử f là hàm đơn điệu tăng. Khi đó

$$f(x) - f(0) \geq \sqrt{2011}(x - 0) = \sqrt{2011}x \quad \forall x > 0$$

$$f(x) - f(0) \leq \sqrt{2011}(x - 0) = \sqrt{2011}x \quad \forall x < 0$$

Chuyển qua giới hạn ta được: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nghĩa là

$\text{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Suy ra f là toàn ánh. Vậy f là song ánh.

Với f là hàm đơn điệu giảm thì cũng chứng minh được như thế.

2.22. Cho $f, g : [0, 1] \rightarrow [0; +\infty)$ là các hàm số liên tục thoả mãn:

$$\sup_{x \in [0, 1]} f(x) = \sup_{x \in [0, 1]} g(x).$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, 1] : (f(c))^2 + 2011f(c) = (g(c))^2 + 2011g(c)$.

Giải

Từ tính liên tục của hàm f, g ta suy ra tồn tại $a, b \in [0, 1]$ sao cho

$$f(a) = g(b) = \sup_{x \in [0, 1]} f(x) = \sup_{x \in [0, 1]} g(x) = M$$

Xét hàm số: $h(x) = f(x) - g(x)$

Vì f, g là các hàm liên tục trên $[0, 1]$ nên h cũng là hàm liên tục trên $[0, 1]$.

$$h(a) = f(a) - g(a) = M - g(a) \geq 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - M \leq 0$$

Suy ra

$$\exists c \in [0, 1] : f(c) = g(c) \Leftrightarrow \exists c \in [0, 1] : (f(c))^2 + 2011f(c) = (g(c))^2 + 2011g(c)$$

2.23. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(0) = 1$ và $f(2x) - f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

Phương trình hàm trên được viết lại như sau:

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

Từ đó ta cũng suy ra:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$$

$$f\left(\frac{x}{4}\right) - f\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{x}{8},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{x}{2^n}$$

Cộng vế theo vế tất cả các phương trình hàm trên ta thu được:

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Khi $n \rightarrow \infty$ thì $f(x) - f(0) = x \Leftrightarrow f(x) = x + 1$.

Với $f(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thử lại thấy đúng.

Thử lại thấy đúng.

2.24. Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhận giá trị khác dấu. Chứng minh rằng tồn tại cấp số cộng a, b, c ($a < b < c$) sao cho $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Giải

Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ và nhận giá trị khác dấu nên có tồn tại $\delta > 0$ đủ bé và hai số x_1, x_2 sao cho :

$$f(x) < 0 \text{ khi } x = x_1 - \delta, \quad x = x_1, \quad x = x_1 + \delta$$

$$f(x) > 0 \text{ khi } x = x_2 - \delta, \quad x = x_2, \quad x = x_2 + \delta$$

Xét hàm số:

$$g(t) = f(x_1 - \delta + t(x_2 - x_1)) + f(x_1 + t(x_2 - x_1)) + f(x_1 + \delta + t(x_2 - x_1))$$

$$g(0) < 0, \quad g(1) > 0$$

$$\text{Do đó } \exists x_0 \in (0;1): g(x_0) = 0$$

Hay

$$\exists x_0 \in (0;1): f(x_1 - \delta + x_0(x_2 - x_1)) + f(x_1 + x_0(x_2 - x_1)) + f(x_1 + \delta + x_0(x_2 - x_1)) = 0$$

$$\text{Đặt } a = x_1 - \delta + x_0(x_2 - x_1), b = x_1 + x_0(x_2 - x_1), c = x_1 + \delta + x_0(x_2 - x_1)$$

Dễ thấy $a < b < c$ và $b - a = c - b$. Vậy bài toán đã chứng minh xong.

2.25. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn

$$\forall x \in [0,1], 0 < f(x) < g(x). \text{ Cho } (u_n) \text{ là một dãy bất kỳ của đoạn } [0,1] \text{ Với}$$

$$\text{mỗi } n \in \mathbb{N}, \text{ ta đặt } w_n = \left(\frac{f(u_n)}{g(u_n)} \right)^n. \text{ Chứng minh rằng } (w_n) \text{ là dãy số hội tụ và}$$

tìm giới hạn của nó.

Giải

$$\text{Đặt } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, h \text{ liên tục trên } [0;1] \text{ và } h([0;1]) \subset (0;1)$$

Từ tính liên tục của hàm f ta suy ra $h([0;1]) = [u;v]$ với $0 < u < v < 1$

$$\text{Do đó } u \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq v. \text{ Với mọi } n \in \mathbb{N} \text{ ta suy ra được}$$

$$u \leq \frac{f(u_n)}{g(u_n)} \leq v \Rightarrow u^n \leq w_n \leq v^n. \text{ Vì } u, v \in (0;1) \text{ nên}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = \lim_{n \rightarrow \infty} v^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$$

2.26. Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Chứng minh rằng nếu } f \text{ là hàm lẻ}$$

$$\text{thì } f(x) = Cx \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} [f(x+h) - f(x-h)] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} [f(x+y+h) - f(x+y-h)] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} [f(x+y+h) + f(x-y-h) + f(x+y-h) - f(x-y-h)] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} [f(x+y+h) + f(x-y-h) + f(x+y-h) + f(y-(x-h))] \\ &= f(x) + f(y). \text{ Suy ra: } f(x) = Cx, C = \text{const} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.27. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho
 $f(x) = f(x + 2011) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình
 $f(x) = x + 2011$ có nghiệm thực.

Giải

Vì f là hàm liên tục và tuần hoàn với chu kỳ $T = 2011$ nên f bị chặn.

Đặt $g(x) = x + 2011 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Rõ ràng g liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hơn nữa $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

Do đó theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho
 $g(c) = 0$ hay phương trình $f(x) = x + 2011$ có nghiệm thực..

2.28. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Giả sử tồn tại 2011
số $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ sao cho $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{2011}) = 2011$.

Chứng minh rằng tồn tại 2011 số $b_1, b_2, \dots, b_{2011}$ sao cho $b_k > a_k$, $k = 1, 2, \dots, 2011$
và $f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_{2011}) = 2012$.

Giải

Đặt $g(x) = f(a_1 + x) + f(a_2 + x) + \dots + f(a_{2011} + x) - 2012$, $x \in \mathbb{R}$.

g là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $g(0) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Do đó tồn tại

$c > 0$ sao cho: $g(c) = 0$. Đặt $b_k = a_k + c$, $k = 1, 2, \dots, 2011$.

Từ đây ta có: $b_k > a_k$, $k = 1, 2, \dots, 2011$ và $f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_{2011}) = 2012$.

2.29. Cho $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hai hàm số bị chặn và $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số xác định
bởi: $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + xg(t)|$. Chứng minh rằng tồn tại $M > 0$ sao

cho: $|h(x) - h(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0, 1]$ ta có:

$$[f(t) + xg(t)] - [f(t) + yg(t)] = (x - y)g(t) \leq M|x - y| \quad \text{với } M = \sup_{t \in [0, 1]} |g(t)|$$

$$\text{hay } f(t) + xg(t) \leq f(t) + yg(t) + M|x - y| \quad \forall t \in [0, 1].$$

Lấy supremum hai vế ta được:

$$h(x) \leq h(y) + M|x - y| \Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2.30. Cho $f(x)$ liên tục đều trên $[0, +\infty)$ và thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + n) = 0 \quad \forall x \geq 0$.

Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Giải

Vì f liên tục đều trên $[0, +\infty)$ nên

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [0, 1]: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Chọn ra m điểm x_k , $k = 1, 2, \dots, m$ sao cho: $0 = x_1 < \dots < x_m = 1$ và $|x_{k-1} - x_k| < \delta$ với $k = 1, 2, \dots, m$.

Từ giả thiết bài toán suy ra: $\exists n_k : \forall n > n_k, |f(x_k + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Do đó với $n > N_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ thì $|f(x_k + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Khi đó $\forall x > N_0$, đặt $n = [x]$ thì $x - n \in [0, 1)$. Tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ để $|x - (x_k + n)| = |(x - n) - x_k| < \delta$. Suy ra:

$$0 \leq |f(x)| \leq |f(x) - f(x_k + n)| + |f(x_k + n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

C-MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

2.31. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \sin \sqrt{x} + \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right)^x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^4} \right) e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x^2} + x e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^4} \right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

2.32. Cho $b_1, b_2, \dots, b_{2011} \in \mathbb{R}^+$. Hãy chứng minh rằng:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{b_1^x + b_2^x + \dots + b_{2011}^x}{2011} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[2011]{b_1 b_2 \dots b_{2011}}.$$

2.33. Cho $a \in (0; 1)$ và $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn các tính chất sau:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(ax)}{x} = 0.$$

Chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

2.34. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thoả mãn

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 0. \text{ Chứng minh rằng: } f \text{ là một hàm hằng.}$$

2.35. Giả sử f liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Cho } g(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{t : f(t) < x\}.$$

- Chứng minh rằng g liên tục trái.
- g có liên tục hay không?

2.36. Nghiên cứu tại mọi điểm sự liên tục của các hàm số sau:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \cos x, & x \in \mathbb{Q} \\ \sin x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

b) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a+b} & \text{khi } x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*, \text{UCLN}(a,b)=1 \\ 0 & \text{khi } \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+ \end{cases}.$$

2.37. Cho f liên tục trên $[a; b]$. Chứng minh tồn tại $c \in [a; b]$ sao cho:

$$2011f(a) + 2012f(b) - 4023f(c) = 0.$$

2.38. Cho f liên tục trên $[0; 1]$ và thoả $f(0) = f(1)$. Chứng minh phương trình

$$\text{sau đây có nghiệm: } f(x) = f\left(\frac{1+2011x}{2011}\right).$$

2.39. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ có tính chất sau: Với bất kỳ cặp số cộng m, n, p, q ta có:

$$|f(m) - f(q)| \geq 2011|f(n) - f(p)|. \text{ Chứng minh } f(x) = 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

2.40. Cho $f(x)$ là hàm số xác định và giới nội trên $[a, b]$. Chứng minh rằng các hàm số: $g(x) = \inf_{t \in [a, x]} f(t)$; $h(x) = \sup_{t \in [x, b]} f(t)$ liên tục trái trên $[a, b]$.

2.41. Cho $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ là một hàm liên tục.

a) Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$.

b) Điều khẳng định trên còn đúng nữa không nếu thay $[0, +\infty)$ bởi $(0, +\infty)$.

2.42. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ với tính chất: $\forall \varepsilon > 0$ tập $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \varepsilon\}$ là hữu hạn.

a) Chứng minh rằng với mỗi khoảng mở $(a, b) \subset \mathbb{R}$, phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm trong (a, b) .

b) Chứng minh rằng f liên tục tại mọi điểm c thỏa mãn $f(c) = 0$.

2.43. Cho f liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^i f\left(\frac{i}{n}\right) = 0$.

2.44. Cho f liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) = 0$.

2.45. Chứng minh rằng tập các điểm gián đoạn của hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ không quá đếm được.

2.46. Cho hàm f liên tục trên $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tồn tại x_i, y_i sao cho $f(x_i) = f(y_i)$, ở đây $x_i - y_i = i$ hoặc $x_i - y_i = n - i$. Hỏi với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, có tồn tại x_i, y_i sao cho $f(x_i) = f(y_i)$, ở đây $x_i - y_i = i$.

2.47. Cho $f \in C([0, n])$ sao cho $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f(y)$ có ít nhất n nghiệm với $x - y \in \mathbb{N}$.

2.48. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa tính chất giá trị trung gian và $f^{-1}(\{u\})$ đóng $\forall u \in \mathbb{Q}$ thì f liên tục.

2.49. Cho $f : (\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và bị chặn. Chứng minh rằng với T cho

trước tồn tại dãy số (u_n) sao cho:
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f(u_n + T) - f(u_n)) = 0 \end{cases}$$

2.50. Cho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục nhận mỗi giá trị của nó hữu hạn lần và $f(0) \neq f(1)$. Chứng minh rằng f nhận một trong các giá trị của nó một số lẻ lần.

2.51. Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, tăng sao cho g xác định bởi: $g(x) = f(x) - x$ tuần hoàn với chu kỳ 1.

a) Chứng minh rằng nếu $\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(0)}{n}$ thì tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho

$$g(c) = \lambda(f).$$

b) Chứng minh rằng f có điểm bất động trên $[0, 1]$ khi và chỉ khi $\lambda(f) = 0$.

2.52. Chứng minh rằng mọi song ánh $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ có vô hạn điểm gián đoạn.

2.53. Cho $f : E \rightarrow E$ liên tục với $E \subset \mathbb{R}$ là tập compact. Hơn nữa giả sử $c \in E$ sao cho mọi điểm giới hạn của dãy lặp $(f^n(c))$ là điểm cố định của f . Chứng minh rằng dãy $(f^n(c))$ hội tụ.

2.54. Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(2011x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2.55. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f(x + \eta) - 2f(x) + f(x - \eta) = 0.$$

a) Chứng minh rằng nếu f là hàm số chẵn thì f là hàm hằng.

b) Chứng minh rằng $f(x) = \lambda x + \mu$, $\lambda, \mu = \text{const}$.

CHƯƠNG 3

ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a; b)$, x_0 là một điểm thuộc khoảng đó.

Ký hiệu $\Delta x = x - x_0$, $x \in (a; b)$ là số gia của đối số tại điểm x_0 .

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ là số gia của hàm số tương ứng với số gia Δx của đối số. Xét tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 . Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 thường được ký hiệu là: $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.

2. Một số lưu ý.

a) $f'(x_0)$ bằng hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm $(x_0; f(x_0))$.

b) $f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

c) $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi khả vi tại đó, tức là tồn tại hằng số C để số gia Δy được viết dưới dạng

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

Hơn nữa khi đó $C = f'(x_0)$.

$df = f'(x_0) \Delta x = f'(x_0) dx$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = x_0$ tương ứng với số gia Δx của đối số x .

3. Đạo hàm một phía. Điều kiện để tồn tại giới hạn hàm số tại một điểm

Các giới hạn một phía $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tương ứng là đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 và lần lượt được ký hiệu là: $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$.

$f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

4. Các tính chất thông dụng

Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $(a;b)$, khả vi tại $x_0 \in (a;b)$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó

a) $f(x) \pm g(x)$ khả vi tại x_0 và $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) $\lambda f(x)$ khả vi tại x_0 và $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

c) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ khả vi tại x_0 và

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ khả vi tại x_0 và

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

5. Đạo hàm của hàm hợp

Giả sử $g:(a;b) \rightarrow (c;d)$ khả vi tại $x_0 \in (a;b)$. Hơn nữa $(c;d) \subset (e;f)$ và $h:(e;f) \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại $g(x_0)$. Khi đó $h \circ g:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại x_0 và $(h \circ g)'(x_0) = h'(g(x_0))g'(x_0)$.

6. Đạo hàm của hàm ngược

Cho $x_0 \in I = (a;b)$, $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu thực sự, liên tục trên $(a;b)$, khả vi tại x_0 , $f'(x_0) \neq 0$. Khi đó hàm ngược $f^{-1}:f(I) \rightarrow (a;b)$ khả vi tại $f(x_0)$ và $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

7. Đạo hàm cấp cao.

7.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$. Nếu $f(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in (a,b)$ thì $f(x)$ cũng có đạo hàm trên (a,b) .

Khi đó $f'(x)$ có đạo hàm trên (a,b) thì ta gọi $(f'(x))'$ là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ ký hiệu là $f''(x)$.

Đạo hàm cấp n của $f(x)$ được ký hiệu là $f^{(n)}(x)$. Theo định nghĩa ta có:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$$

Quy ước: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

7.2. Các công thức tính

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm cấp n trên (a, b) .

Khi đó:

(i) $f(x) + g(x)$ có đạo hàm cấp n trên (a, b) và

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$$

(ii) $\lambda f(x)$ có đạo hàm cấp n trên (a, b) và

$$(\lambda f(x))^{(n)} = \lambda f^{(n)}(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(iii) $f(x)g(x)$ có đạo hàm cấp n trên (a, b) và

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \quad (\text{Công thức Leibniz})$$

(iv) $\frac{f(x)}{g(x)}$ có đạo hàm cấp n trên (a, b) ($g(x) \neq 0 \forall x$).

II. ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

1. Định lý Fermat

Cho $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 và khả vi tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

2. Định lý Rolle

Giả sử $f(x)$ xác định và liên tục trên $[a; b]$ hữu hạn, khả vi trên $(a; b)$ và $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

3. Định lý Lagrange

Cho $f(x)$ xác định và liên tục trên $[a; b]$, khả vi trên $(a; b)$.

Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

4. Định lý Cauchy

Cho $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, khả vi trên khoảng $(a; b)$, ngoài ra $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a; b)$.

Khi đó tồn tại điểm $c \in (a; b)$ sao cho:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

5. Định lý Darboux

Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a;b)$ và $\alpha, \beta \in (a;b)$. Khi đó $f'(x)$ nhận mọi giá trị trung gian giữa $f'(\alpha)$ và $f'(\beta)$.

III. KHAI TRIỂN TAYLOR VÀ QUY TẮC L'HOSPITAL

1. Khai triển Taylor

a) Nếu hàm số $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp $n-1$ trên $(a;b)$ và có đạo hàm cấp n tại điểm $x_0 \in (a;b)$ thì với h đủ bé ta có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Đây là công thức Taylor với phần dư Peano

b) Nếu f khả vi liên tục tới cấp n trên $[a;b]$, khả vi cấp $n+1$ trên $(a;b)$ thì

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$$

(với c ở giữa x và x_0)

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(với $0 < \theta < 1$)

2. Quy tắc L'Hospital

Giả sử f, g là hai hàm số xác định và có đạo hàm hữu hạn trên $(a;b) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a;b)$.

$$\text{Nếu thỏa } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (L \in \mathbb{R} \text{ hay } L = \pm \infty)$$

$$\text{thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Khi áp dụng những giả thiết thích hợp, quy tắc này cũng đúng cho giới hạn một phía, giới hạn ở vô cùng và giới hạn có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

IV. Sự biến thiên của hàm số

1. Tính đơn điệu của hàm khả vi

Điểm x_0 được gọi là điểm cô lập của hàm $f(x)$ nếu $f(x_0) = 0$ nhưng tồn tại $\delta > 0$ để $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) \neq 0$.

Định lý: Cho hàm $f(x)$ xác định và khả vi trên (a, b) . Khi đó nếu $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) và $f'(x)$ chỉ có các không điểm cô lập trên khoảng (a, b) thì $f(x)$ đồng biến (nghịch biến).

2. Cực trị của hàm khả vi

Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trên (a, b) . Theo định lý Fermat hàm chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm có $f'(x) = 0$ hoặc tại đó không có đạo hàm. Điểm như vậy gọi là điểm nghi ngờ (có cực trị), nếu $f'(x_0) = 0$ thì x_0 gọi là điểm dừng.

2.1. Định lý

Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trên (a, b) , khả vi trên (a, b) có thể trừ ra điểm $x_0 \in (a, b)$ là một điểm nghi ngờ. Khi đó nếu x biến thiên qua x_0 mà: $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì x_0 gọi là điểm cực tiểu; $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì x_0 là điểm cực đại; $f'(x)$ không đổi dấu thì x_0 không phải là điểm cực trị.

2.2. Định lý

Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi đến cấp $n + 1$ trên (a, b) tại $x_0 \in (a, b)$ có

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0), f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Khi đó: nếu n lẻ thì x_0 không là điểm cực trị; n chẵn và $f^{(n)}(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu; n chẵn và $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

3. Tính lồi lõm của hàm khả vi

+ Nếu $f(x)$ lồi trên (a, b) thì liên tục trên đó.

+ Nếu $f(x)$ lồi trên (a, b) thì khả vi trái và khả vi phải tại mọi điểm thuộc (a, b) . Hơn nữa, $\forall \lambda, \mu, \eta \in (a, b): \lambda < \mu < \eta$ ta có:

$$\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \leq f'_-(\mu) \leq f'_+(\mu) \leq \frac{f(\eta) - f(\mu)}{\eta - \mu}.$$

+ Cho f khả vi trên (a, b) . Khi đó f lồi $\Leftrightarrow f'$ tăng trên (a, b) .

Hệ quả Cho hàm $f(x)$ khả vi 2 lần trên (a, b) . Khi đó $f(x)$ lồi khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0$ với mọi x thuộc (a, b) .

Lưu ý Những kết quả về tính lồi của hàm khả vi được suy ra từ những kết quả từ tính lồi của hàm khả vi.

Giới thiệu về bất đẳng thức Jensen

Cho $f(x)$ lồi trên (a, b) . Khi đó:

$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall x_k \in (a, b) ; \forall \lambda_k > 0 \quad k = \overline{1, n} ; \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ ta có:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Nói riêng, với $u, v \in (a, b)$, ta có: $f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{f(u) + f(v)}{2}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

BÀI TẬP XOAY QUANH ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM VÀ SỰ KHẢ VI

3.1. Cho hàm số: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2011)$. Hãy tính $f'(1)$.

Giải

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2011)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)(x-3)\dots(x-2011) = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \dots (-2010) = 2010! \end{aligned}$$

3.2. Chứng minh rằng nếu $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ với $x \in \mathbb{R}$ thì $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$.

Giải

Đặt $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$ ta có:

$$\begin{aligned} |a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| &= |f'(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \leq 1. \end{aligned}$$

3.3. Giả sử $f(0) = 0$ và f khả vi tại điểm 0. Hãy tính

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{x}{2011}\right) \right] \text{ với } k \text{ là một số nguyên dương}$$

cho trước.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{x}{2011}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0)}{\frac{x}{2} - 0} + \frac{1}{3} \cdot \frac{f\left(\frac{x}{3}\right) - f(0)}{\frac{x}{3} - 0} + \dots + \frac{1}{2011} \cdot \frac{f\left(\frac{x}{2011}\right) - f(0)}{\frac{x}{2011} - 0} \right] \\ &= f'(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{f'(0)}{3} + \dots + \frac{f'(0)}{2011} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2011} \right) f'(0). \end{aligned}$$

3.4. Cho f là hàm khả vi tại a và xét hai dãy (x_n) và (y_n) cùng hội tụ về a sao

cho $x_n < a < y_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a)$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 0 &\leq \left| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} - f'(a) \right| = \left| \frac{f(x_n) - f(y_n) - x_n f'(a) + y_n f'(a)}{x_n - y_n} \right| \\ &= \left| \frac{f(x_n) - f(y_n) - f(a) + f(a) + a f'(a) - a f'(a) - x_n f'(a) + y_n f'(a)}{x_n - y_n} \right| \\ &= \left| \frac{f(x_n) - f(a) - f'(a)(x_n - a)}{x_n - y_n} - \frac{f(y_n) - f(a) - f'(a)(y_n - a)}{x_n - y_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x_n) - f(a) - f'(a)(x_n - a)}{x_n - y_n} \right| + \left| \frac{f(y_n) - f(a) - f'(a)(y_n - a)}{x_n - y_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x_n) - f(a) - f'(a)(x_n - a)}{x_n - a} \right| + \left| \frac{f(y_n) - f(a) - f'(a)(y_n - a)}{y_n - a} \right| \\ &= \left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} - f'(a) \right| + \left| \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} - f'(a) \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a).$$

3.5. Giả sử $f(x) = \begin{cases} x^{2011} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

và hàm $g(x)$ khả vi tại $x = 0$. Chứng minh rằng $g(f(x))$ có đạo hàm bằng 0 tại $x = 0$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left. \frac{d}{dx} g(f(x)) \right|_{x=0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(h)) - g(f(0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g\left(h^{2011} \sin \frac{1}{h}\right) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g\left(h^{2011} \sin \frac{1}{h}\right) - g(0)}{h^{2011} \sin \frac{1}{h} - 0} \cdot h^{2011} \sin \frac{1}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g\left(h^{2011} \sin \frac{1}{h}\right) - g(0)}{h^{2011} \sin \frac{1}{h} - 0} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} h^{2011} \sin \frac{1}{h} \right) \end{aligned}$$

Vì $0 \leq \left| h^{2011} \sin \frac{1}{h} \right| \leq |h^{2011}| \rightarrow 0 \ (h \rightarrow 0)$ nên $\lim_{h \rightarrow 0} h^{2011} \sin \frac{1}{h} = 0$.

$$\text{Do đó: } \left. \frac{d}{dx} g(f(x)) \right|_{x=0} = [g'(0)] \cdot 0 = 0$$

3.6. Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2011$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh

$$\text{rằng: } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1+2011n}{n}\right) - f(2011) \right] = f'(2011).$$

Giải

Vì f có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2011$ nên theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2011 + \Delta x) - f(2011)}{\Delta x} = f'(2011)$$

Xét riêng: Nếu lấy $\Delta x = \frac{1}{n}$, ta có $\Delta x \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1+2011n}{n}\right) - f(2011) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(2011 + \frac{1}{n}\right) - f(2011)}{\frac{1}{n}} = f'(2011)$$

3.7. Cho f khả vi trên $[a; b]$ và thoả mãn:

$$\text{a) } f(a) = f(b) = 0 \quad \text{b) } f'(a) = f'(a^+) > 0, \quad f'(b) = f'(b^-) > 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$ và $f'(c) \leq 0$.

Giải

Từ giả thiết suy ra f bằng 0 tại ít nhất một điểm trong khoảng $(a; b)$.

Đặt $c = \inf \{x \in (a; b) : f(x) = 0\}$, ta có $f(c) = 0$.

Vì $f'(a) > 0$ nên $f(x) > 0 \forall x \in (a; c)$. Hơn nữa $f'(c)$ tồn tại nên

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h)}{h} \leq 0.$$

3.8. Giả sử f có đạo hàm trên một khoảng chứa $[0, 1]$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (0; 1) : f(x) \leq f(x_0) \forall x \in [0; 1]$.

Giải

f có đạo hàm trên một khoảng chứa $[0, 1]$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in [0; 1] : f(x) \leq f(x_0) = \max_{x \in [0, 1]} f(x).$$

Ta sẽ chứng minh: $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$.

Thật vậy!

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) > 0 \Rightarrow \exists h \in (0; 1) : \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0 \forall x \in (0; h]$$

$\Rightarrow f(x) > f(0) \forall x \in (0; h] \Rightarrow f(0)$ không phải là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[0, 1] \Rightarrow x_0 \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) < 0 \Rightarrow \exists k \in (0; 1) : \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < 0 \forall x \in [k; 1)$$

$\Rightarrow f(x) < f(1) \forall x \in [k; 1) \Rightarrow f(1)$ không phải là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[k; 1) \Rightarrow x_0 \neq 1$.

3.9. Cho một hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(0) = 0$, $f(x) \geq |\sin x| \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng đạo hàm của f tại 0 không tồn tại.

Giải

Giả sử $f'(0)$ tồn tại. $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \frac{\sin x}{x} \Rightarrow f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $f'(0^-) < -1$

Điều này chứng tỏ $f'(0)$ không tồn tại.

BÀI TẬP VỀ ĐẠO HÀM CẤP CAO

3.10. Chứng minh rằng: $f(x) = \arctan x$ thỏa mãn phương trình:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0 \text{ với } x \in \mathbb{R} \text{ và } n \geq 2.$$

Giải

$$f(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)f'(x) = 1 \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) suy ra: $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}, n \geq 2)$$

+ Mệnh đề đúng trong trường hợp $n = 2$.

+ Giả sử mệnh đề đúng đến $n = k$

$$\text{tức là: } (1+x^2)f^{(k)}(x) + 2(k-1)xf^{(k-1)}(x) + (k-2)(k-1)f^{(k-2)}(x) = 0 \quad (*)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (*) ta được

$$2xf^{(k)}(x) + (1+x^2)f^{(k+1)}(x) + 2(k-1)f^{(k-1)}(x)$$

$$+ 2(k-1)xf^{(k)}(x) + (k-2)(k-1)f^{(k-1)}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+x^2)f^{(k+1)}(x) + 2kxf^{(k)}(x) + (k-1)kf^{(k-1)}(x) = 0$$

3.11. Cho f là hàm khả vi đến cấp n trên $(0; +\infty)$. Chứng minh rằng với $x > 0$,

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$$

Giải

+ Mệnh đề đúng trong trường hợp $n = 1$.

+ Giả sử mệnh đề đúng trong trường hợp $n \leq k$, tức là:

$$\frac{1}{x^{k+1}}f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^k \left(x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}$$

+ Ta sẽ chứng minh mệnh đề trên đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy!

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \left(x^k f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k+1)} &= (-1)^k \left(\left(x^k f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\right)^{(k)} = (-1)^{k+1} \left(kx^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{k-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)} \\ &= (-1)^{k+1} k \left(x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)} - (-1)^{k+1} \left(x^{k-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{k}{x^{k+1}} f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right) - (-1)^{k-1} \left(x^{k-2} f' \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{(k)}.$$

$$\text{Lại có: } (-1)^{k-1} \left(x^{k-2} f' \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{(k)} = (-1)^{k-1} \left(\left(x^{k-2} f' \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{(k-1)} \right)'$$

Theo giả thiết quy nạp với trường hợp $n = k - 1$ ta được:

$$\frac{1}{x^k} f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{k-1} \left(x^{k-2} f' \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{(k-1)}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } (-1)^{k+1} \left(x^k f \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{(k+1)} = \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vậy bài toán đã được chứng minh xong

3.12. Cho f khả vi trên $(a; b)$ sao cho với $x \in (a; b)$ ta có: $f'(x) = g(f(x))$, trong đó $g \in C^\infty(a; b)$. Chứng minh $f \in C^\infty(a; b)$.

Giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = g(f(x)) \Rightarrow f''(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(f(x))g(f(x))$$

$$f'''(x) = g'(f(x))(g(f(x)))^2 + (g'(f(x)))^2 g(f(x))$$

Do đó f'' , f''' đều liên tục trên $(a; b)$.

Chứng minh bằng quy nạp ta được $f^{(n)}$ ($n \geq 3$) đều là tổng các đạo hàm $g^{(k)}(f)$ với $k = \overline{0; n-1}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TẬP VỀ ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

3.14. Cho $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ là một hàm khả vi có đạo hàm liên tục và không âm. Chứng minh tồn tại $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 \leq 1$.

Giải

Xét hàm số:

$$g: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \mapsto \arctan f(x)$$

g là hàm liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Nếu $f(x) \neq \pm 1$ thì g khả vi tại mọi x và

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}.$$

Nếu tồn tại $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\begin{cases} f(x_0) = 1 \\ f(x_0) = -1 \end{cases}$ thì x_0 là cực trị địa phương của

hàm f nên theo định lý Fermat ta suy ra được $f'(x_0) = 0$. Vì thế ta có:

$$(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 = 1.$$

Nếu $f(x) \neq \pm 1 \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì áp dụng định lý Lagrange cho hàm g trên

đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ta có :

$$\exists x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) : g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f'(x_0)}{\sqrt{1-(f(x_0))^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

$$\text{Dễ thấy: } 0 \leq \frac{f'(x_0)}{\sqrt{1-(f(x_0))^2}} \pi \leq \pi.$$

Vậy ta chứng minh được $(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 \leq 1$.

3.15. Cho f là một hàm thực khả vi đến cấp $n+1$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mỗi số thực a, b , $a < b$ thỏa mãn $\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a$

tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f^{(n+1)}(c) = f(c)$. **Giải**

Với a, b là số thực, $a < b$ ta có

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a$$

$$\Leftrightarrow (f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a))e^{-a} = (f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b))e^{-b}$$

Xét hàm số: $g(x) = (f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x))e^{-x}$

Ta có $g(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ và $g(a) = g(b)$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a; b) : g'(c) = 0$.

Mà $g'(x) = e^{-x} (f^{(n+1)}(x) - f(x))$.

Do đó: $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

3.16. Cho hàm số: $f \in C^2([0,2])$ và $f(0) = 2010$, $f(1) = 2011$, $f(2) = 2012$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0;2)$ sao cho $f''(c) = 0$.

Giải

+ Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số f trên $[0;1]$, $[1;2]$

$$\exists a \in (0;1): f'(a) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2011 - 2010}{1 - 0} = 1$$

$$\exists b \in (1;2): f'(b) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2012 - 2011}{2 - 1} = 1$$

+ Vì f' khả vi trên $[0;2]$ và $f'(a) = f'(b)$ nên theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0;2): f''(c) = 0$.

3.17. Giả sử rằng f và g là các hàm khả vi trên $[a;b]$; trong đó $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho:

$$\frac{\det \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{pmatrix}}{g(b) - g(a)} = \frac{\det \begin{pmatrix} f(c) & g(c) \\ f'(c) & g'(c) \end{pmatrix}}{g'(c)}.$$

Giải

Xét hai hàm số: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $k(x) = \frac{1}{g(x)}$ khả vi trên $[a;b]$.

Áp dụng định lý Cauchy ta có:

$$\exists c \in (a;b): \frac{h(b) - h(a)}{k(b) - k(a)} = \frac{h'(c)}{k'(c)}$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in (a;b): \frac{\frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{\frac{1}{g(b)} - \frac{1}{g(a)}} = \frac{\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}}{-\frac{g'(c)}{(g(c))^2}}$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in (a;b): \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(c)g'(c) - f'(c)g(c)}{g'(c)}$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in (a;b): \frac{\det \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{pmatrix}}{g(b) - g(a)} = \frac{\det \begin{pmatrix} f(c) & g(c) \\ f'(c) & g'(c) \end{pmatrix}}{g'(c)}.$$

3.18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; a]$, khả vi trên $(0; a)$ sao cho $f(a) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0; a)$ sao cho: $f'(c) = f(c) \left(2011 - \frac{1}{c} \right)$

Giải

Xét hàm số: $g(x) = xf(x)e^{-2011x}$

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0; a]$, khả vi trên $(0; a)$ nên $g(x)$ cũng liên tục trên $[0; a]$, khả vi trên $(0; a)$. Hơn nữa $g(0) = g(a) = 0$.

Áp dụng định lý Rolle ta có: tồn tại $c \in (0; a)$: $g'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } g'(x) &= f(x)e^{-2011x} + xe^{-2011x} [f'(x) - 2011f(x)] \\ &= e^{-2011x} [xf'(x) + (1 - 2011x)f(x)] \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } e^{-2011c} [cf'(c) + (1 - 2011c)f(c)] = 0 \Leftrightarrow f'(c) = f(c) \left(2011 - \frac{1}{c} \right).$$

BÀI TẬP VỀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

Dưới đây là một số bài tập về ứng dụng của đạo hàm vào một số bài toán cụ thể như: chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình, tính đơn điệu, cực trị, bất đẳng thức, hàm số lồi-lõm

3.19. Giả sử f khả vi liên tục trên $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$|f(x)| \leq \frac{1}{x} \quad \forall x \geq 1$. Chứng minh phương trình $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ có nghiệm lớn hơn 1

Giải

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$$

$$f \text{ khả vi liên tục trên } (1; +\infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \Rightarrow \exists x_0 \in (1; +\infty): g'(x_0) = 0 \text{ hay } f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy phương trình $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ có nghiệm lớn hơn 1.

3.20. Chứng minh phương trình:

$2010\sin 3x + 2011\cos 2x + 2012\cos x + \sin x = 0$ có nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Giải

Xét hàm số: $f(x) = -\frac{2010}{3}\cos 3x + \frac{2011}{2}\sin 2x + 2012\sin x - \cos x$

Hàm số f liên tục trên $[0; 2\pi]$, khả vi trên $(0; 2\pi)$.

Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (0; 2\pi)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = \frac{2011 + 2012 - (2011 + 2012)}{2\pi} = 0$$

3.21. Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 thỏa mãn: $f(0) = 1, f'(0) = 0$ và

$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty)$. Chứng minh rằng:

$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}, \quad \forall x \in [0; +\infty)$.

Giải

Ta có:

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) - 3(f'(x) - 2f(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty)$$

Đặt $g(x) = f'(x) - 2f(x), x \in [0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } g'(x) - 3g(x) \geq 0, x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow (e^{-3x}g(x))' \geq 0, x \in [0; +\infty)$$

$$\Rightarrow e^{-3x}g(x) \text{ tăng trên } [0; +\infty) \quad e^{-3x}g(x) \geq -2 \Rightarrow e^{-2x}g(x) \geq -2e^x$$

$$\Rightarrow (e^{-2x}f(x))' \geq -2e^x, x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow (e^{-2x}f(x) + 2e^x)' \geq 0, x \in [0; +\infty)$$

$$\Rightarrow e^{-2x}f(x) + 2e^x \text{ tăng trên } [0; +\infty)$$

$$\Rightarrow e^{-2x}f(x) + 2e^x \geq e^0 f(0) + 2e^0 = 3, [0; +\infty)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}, \quad \forall x \in [0; +\infty).$$

3.22 Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi cấp hai với đạo hàm cấp 2 dương. Chứng minh rằng: $f(x + f'(x)) \geq f(x)$ với mọi số thực x .

Giải

+ Nếu $f'(x) = 0$ thì $f(x + f'(x)) = f(x)$ với mọi x : hiển nhiên.

+ Nếu $f'(x) < 0$ thì áp dụng định lý Lagrange trên đoạn $[x + f'(x); x]$ ta được: $f(x) - f(x + f'(x)) = f'(c)(-f'(x)), c \in (x + f'(x); x)$.

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'$ là hàm tăng $\Rightarrow f'(c) < f'(x) < 0$. Vì vậy
 $f(x) - f(x + f'(x)) < 0$.

+ Nếu $f'(x) > 0$ thì chứng minh tương tự như trường hợp $f'(x) < 0$ ta cũng thu được $f(x) - f(x + f'(x)) < 0$.

3.23. Cho $x \geq 2$, chứng minh $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1$.

Giải

Xét hàm số: $f : [2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t \cos \frac{\pi}{t}$.

Áp dụng định lý Lagrange trên đoạn $[x; x+1]$ đối với hàm $f(t)$

tồn tại $u \in [x; x+1]$: $f'(u) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x)$

Cần chứng minh $f'(u) = \cos \frac{\pi}{u} + \frac{\pi}{u} \sin \frac{\pi}{u} > 1 \quad \forall u \in [2; +\infty)$.

$f''(u) = -\frac{\pi^2}{u^3} \cos \frac{\pi}{u} < 0 \quad \forall u \in [2; +\infty) \Rightarrow f'$ nghịch biến trên $[2; +\infty)$

$f'(u) > \lim_{u \rightarrow \infty} f'(u) = 1$.

Vậy $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1 \quad \forall x \in [2; +\infty)$.

3.24. Giả sử $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$ sao cho $\lim_{x \rightarrow a^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ và
 $f'(x) + f^2(x) \geq -1 \quad \forall x \in (a; b)$. Chứng minh rằng $b - a \geq \pi$. Cho ví dụ để
 $b - a = \pi$.

Giải

Ta có: $f'(x) + f^2(x) \geq -1 \quad \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} + 1 \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$

$\Leftrightarrow (\arctan f(x) + x)' \geq 0 \quad \forall x \in (a; b) \Rightarrow \arctan f(x) + x$ tăng trên $(a; b)$

Chuyển qua giới hạn ta được: $\frac{\pi}{2} + a \leq -\frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b - a \geq \pi$.

Ví dụ: $y = \cot x$, $a = 0$, $b = \pi$.

3.25. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi đến cấp hai sao cho ta có thể tìm được hàm
 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ để cho $f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm bị chặn.

Giải

Ta có: $f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = -2xg(x)(f'(x))^2.$$

Xét hàm số $F(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2 \Rightarrow F'(x) = -2xg(x)(f'(x))^2$

$F'(x) \geq 0$ với $x < 0$ và $F'(x) \leq 0$ với $x > 0$.

3.26. Cho $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi hai lần sao cho với mọi $x \in [0,1]$, $f''(x) \leq 1$.

Chứng minh rằng: $f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leq \frac{1}{4}$.

Giải

Xét ánh xạ sau:

$$g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) + \frac{x(1-x)}{2}$$

$g'(x) = f'(x) + \frac{1-2x}{2} \Rightarrow g''(x) = f''(x) - 1 \leq 0 \Rightarrow g(x)$ là hàm lõm.

Từ đó: $g\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$.

Do đó: $f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) \Leftrightarrow f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leq \frac{1}{4}$.

3.27. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi hai lần, lồi sao cho $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^{\frac{x}{2011}} f(e^{-x}).$$

là hàm lồi.

Giải

Vì f khả hai lần trên $\mathbb{R}$ nên g cũng là hàm khả vi hai lần trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = \frac{1}{2011} e^{\frac{x}{2011}} f(e^{-x}) - e^{\frac{2010x}{2011}} f'(e^{-x})$

$$g''(x) = \frac{1}{2011} \left[\frac{1}{2011} e^{\frac{x}{2011}} f(e^{-x}) - e^{\frac{2010x}{2011}} f'(e^{-x}) \right] + \frac{2010}{2011} e^{\frac{2010x}{2011}} f'(e^{-x}) + e^{\frac{4021x}{2011}} f''(e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2011^2} e^{\frac{x}{2011}} f(e^{-x}) + \frac{2009}{2011} e^{\frac{2010x}{2011}} f'(e^{-x}) + e^{\frac{4021x}{2011}} f''(e^{-x}) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(do f lồi và $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

BÀI TẬP VỀ KHAI TRIỂN TAYLOR

3.28. Cho $f(x)$ khả vi 2 lần thoả $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{x \in [0;1]} f(x) = -1$.

Chứng minh rằng: $\max_{x \in [0;1]} f''(x) \geq 8$.

Giải

f liên tục trên $[0;1] \Rightarrow \exists a \in [0;1]: f(a) = \min_{x \in [0;1]} f(x) = -1$. Suy ra được $f'(a) = 0$, $a \in (0;1)$.

Khai triển Taylor tại a : $f(x) = -1 + \frac{f''(a + \theta(x-a))}{2}(x-a)^2$, $0 < \theta < 1$.

+ Với $x=0$, ta có: $0 = -1 + \frac{f''(c_1)}{2}a^2$, $0 < c_1 < a$

+ Với $x=1$, ta có: $0 = -1 + \frac{f''(c_2)}{2}(1-a)^2$, $a < c_2 < 1$.

Do đó: $f''(c_1) = \frac{2}{a^2} \geq 8$ nếu $a \leq \frac{1}{2}$; $f''(c_2) = \frac{2}{(1-a)^2} \geq 8$ nếu $a \geq \frac{1}{2}$.

Vậy $\max_{x \in [0;1]} f''(x) \geq 8$.

3.29. Giả sử f khả vi liên tục đến cấp hai trên $(0; +\infty)$ thoả mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf''(x) = 0$. Chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$.

Giải

Với $x > 0$ ta có: $f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(c)$ với $c \in (x; x+1)$

Do đó: $xf'(x) = \frac{x}{x+1}(x+1)f(x+1) - xf(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{c}cf''(c)$.

Suy ra: $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$.

3.30. Cho f khả vi trên $[a; b]$ và giả sử rằng $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng nếu f'' tồn tại trong $(a; b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho:

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

Giải

Ta có: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(u)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$; $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(v)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

với $u \in \left(a; \frac{a+b}{2}\right), v \in \left(\frac{a+b}{2}; b\right)$.

Do đó: $|f(b) - f(a)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{1}{2} |f''(v) - f''(u)| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \max\{|f''(v)|, |f''(u)|\}$.

Đặt $|f''(c)| = \max\{|f''(v)|, |f''(u)|\}$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3.31. Cho f là hàm liên tục khả vi cấp hai trên $(-1;1)$ và $f(0) = 0$. Hãy tính giới

hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(jx)$.

Giải

Theo công thức Taylor, ta có:

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(jx) = \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} \left(f'(0)jx + \frac{1}{2} f''(cjx) j^2 x^2 \right) = f'(0)x \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] \left(\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] + 1 \right)}{2} + \zeta(x)$$

với $\zeta(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f''(cjx) j^2 x^2$.

Vì f'' bị chặn trong lân cận của 0 nên $\sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} j^2 = \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] \left(\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] + 1 \right) \left(2 \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] + 1 \right)}{6}$

Dễ thấy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \zeta(x) = 0$. Từ đó suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(jx) = \frac{f'(0)}{2}$.

3.32. Giả sử $f(x)$ là hàm chẵn, khả vi hai lần và $f''(0) \neq 0$. Chứng minh rằng $x = 0$ là điểm cực trị.

Giải

$f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(0) = 0$.

Theo khai triển Taylor, ta có: $f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2)$.

+ Nếu $f''(0) > 0$ thì $\frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2) > 0$ với x đủ bé suy ra $x = 0$ là điểm cực tiểu.

+ Tương tự nếu $f''(0) < 0$ thì suy ra $x = 0$ là điểm cực đại.

BÀI TẬP VỀ ÁP DỤNG QUY TẮC L'HOSPITAL

3.33. $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 liên tục thoả mãn:

$|f''(x) + 2xf'(x) + (x^2 + 1)f(x)| \leq 2011$ với mọi x . Chứng minh rằng:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Giải

Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} f(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} (f'(x) + xf(x))}{xe^{\frac{x^2}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{x^2}{2}} (f'(x) + xf(x)) \right)'}{\left(xe^{\frac{x^2}{2}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} (f''(x) + 2xf'(x) + (x^2 + 1)f(x))}{e^{\frac{x^2}{2}} (x^2 + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x) + 2xf'(x) + (x^2 + 1)f(x)}{x^2 + 1} = 0. \end{aligned}$$

3.34 . Cho f khả vi trên $(0; +\infty)$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2011f(x) + f'(x)) = 2012$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2012}{2011}$.

b) Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2011f(x) + 2\sqrt{x}f'(x)) = 2012$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2012}{2011}$.

Giải

Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta có:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2011x} f(x)}{e^{2011x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2011x} f(x))'}{(e^{2011x})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2011x} (2011f(x) + f'(x))}{2011e^{2011x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2011} (2011f(x) + f'(x)) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2011} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2011 f(x) + f'(x)) = \frac{2012}{2011}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2011\sqrt{x}} f(x)}{e^{2011\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2011\sqrt{x}} f(x))'}{(e^{2011\sqrt{x}})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2011\sqrt{x}} \left(\frac{2011}{2\sqrt{x}} f(x) + f'(x) \right)}{\frac{2011}{2\sqrt{x}} e^{2011\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2011} (2011 f(x) + 2\sqrt{x} f'(x)) = \frac{1}{2011} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2011 f(x) + 2\sqrt{x} f'(x)) = \frac{2012}{2011}. \end{aligned}$$

3.35. Giả sử f khả vi đến cấp 3 trên $(0; +\infty)$ sao cho

$f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)f''(x)}{(f''(x))^2} = a \text{ thì } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{1}{2-a}.$$

Giải

Sử dụng quy tắc L'Hospital ta được:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{f'(x)}{xf''(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(x - \frac{f'(x)}{f''(x)} \right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)f''(x)}{(f''(x))^2} = a.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} = 1 - a$. Từ giả thiết bài toán suy ra: $a < 1$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{1-a} \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Theo công thức Taylor, ta có:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(c)\frac{h^2}{2}, \quad h > 0 \Rightarrow f(x+h) > f(x) + f'(x)h.$$

Cho $h \rightarrow \infty$ ta được $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Lại áp dụng quy tắc L'Hospital ta được:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x)} = \frac{2-a}{1-a}.$$

Kết hợp với (*) ta được:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1-a}{2-a} = \frac{1}{2-a}.$$

3.36. Chứng minh rằng với f khả vi liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(0)=1, f'(0)=0 \text{ và } f''(0)=-1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{2011}{\sqrt{x}}\right) \right)^x = e^{-\left(\frac{2011}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{2011}{\sqrt{x}}\right) \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(f\left(\frac{2011}{\sqrt{x}}\right) \right)}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln f\left(\frac{2011}{\sqrt{x}}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(f(2011\sqrt{t}))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2011f'(2011\sqrt{t})}{2\sqrt{t} \cdot f(2011\sqrt{t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2011^2 f''(2011\sqrt{t})}{2f(2011\sqrt{t}) + 2 \cdot 2011\sqrt{t} \cdot f'(2011\sqrt{t})} = -\frac{2011^2}{2} = -\left(\frac{2011}{\sqrt{2}}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{2011}{\sqrt{x}}\right) \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(f\left(\frac{2011}{\sqrt{x}}\right) \right)} = e^{-\left(\frac{2011}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

SỬ DỤNG ĐẠO HÀM TRONG VIỆC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

3.37. Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{2011} \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

Giải

Từ giả thiết ta suy ra:

$$0 \leq \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq |y - x|^{2010} \Rightarrow f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0 \Rightarrow f(x) = C = \text{const}.$$

3.38. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f'(x)f''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải

Đặt $g(x) = (f'(x))^2$

$$g'(x) = 2f'(x)f''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(x) = C = \text{const} \Rightarrow f'(x) = \text{const} \Rightarrow f(x) = ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.39. Tìm hàm $f(x) \geq 0$ và khả vi trên $\mathbb{R}^+$ đồng thời thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\sqrt{\frac{x^n + y^n}{2}}\right) = \sqrt{\frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải

Đạo hàm 2 vế của đẳng thức đã cho lần lượt theo biến x , biến y ta được:

$$f'\left(\sqrt{\frac{x^n + y^n}{2}}\right) \cdot \frac{nx^{n-1}}{4\sqrt{\frac{x^n + y^n}{2}}} = \frac{f(x)f'(x)}{2\sqrt{\frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}}}$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{x^n + y^n}{2}}\right) \cdot \frac{ny^{n-1}}{4\sqrt{\frac{x^n + y^n}{2}}} = \frac{f(y)f'(y)}{2\sqrt{\frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}}}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = \frac{f(y)f'(y)}{y^{n-1}} \Rightarrow \frac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = C \Rightarrow f(x) = \frac{2}{n}\sqrt{Cx^n} \quad (C > 0).$$

Thử lại thấy đúng.

3.40. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện:

$$f(x) = f''(x) \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Giải

Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

$$f(x) = f''(x) \Leftrightarrow [f(x) - f'(x)] + [f'(x) - f''(x)] = 0 \Leftrightarrow [e^x(f(x) - f'(x))]' = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f'(x) = Ce^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))' = -C.e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}f(x) = \frac{C}{2}.e^{-2x} + B$$

$$\text{Đặt } A = \frac{C}{2}, \text{ ta suy ra: } f(x) = Ae^{-x} + Be^x, \quad A, B: \text{const.}$$

Vậy $f(x) = Ae^{-x} + Be^x$, $A, B: \text{const}$ là hàm số cần tìm.

C-MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

3.41. Xem xét tính khả vi của hàm số sau $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$.

3.42. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ không khả vi tại các

điểm $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ nhưng khả vi tại 0 là điểm giới hạn của dãy (x_n) .

3.43. Cho f khả vi tại x_0 . Hãy tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)e^x - f(x_0)}{f(x)\cos x - f(x_0)}$, $x_0 = 0$, $f'(0) \neq 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(x_0 + \frac{k}{n^2}\right) - nf(x_0) \right)$

3.44. Cho $f_{2n} = \ln(1 + x^{2n})$, $n \in \mathbb{N}$. Hãy chứng minh rằng: $f_{2n}^{(2n)}(-1) = 0$.

3.45. Xét $b_0, b_1, \dots, b_{2011} \in \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$b_0 + 2b_1 + \frac{2^2 b_2}{3} + \dots + \frac{2^{2010} b_{2010}}{2011} + \frac{2^{2011} b_{2011}}{2012} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình: $b_{2011} \ln^{2011} x + \dots + b_2 \ln^2 x + b_1 \ln x + b_0 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(1; e^2)$.

3.46. Cho các hàm số φ, ϕ, ψ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$.

Xét $\Phi(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi(x) & \phi(x) & \psi(x) \\ \varphi(a) & \phi(a) & \psi(a) \\ \varphi(b) & \phi(b) & \psi(b) \end{pmatrix}$.

Chứng minh rằng tồn tại c sao cho $\Phi'(c) = 0$.

3.47. Cho f, g là các hàm số khả vi liên tục đến cấp n tại một lân cận của điểm a thoả mãn: $f(a) = g(a) = \lambda$, $f'(a) = g'(a)$, ..., $f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a)$ và

$f^{(n)}(a) \neq g^{(n)}(a)$. Tính $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - e^{g(x)}}{f(x) - g(x)}$.

3.48. Cho $\lambda \geq 1$. Ta ký hiệu $f(\lambda)$ là một nghiệm thực của phương trình:

$x(1 + \ln x) = \lambda$. Chứng minh rằng: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda / \ln \lambda} = 1$.

3.49. Hãy chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$, $x \in (0; e)$

b) $\frac{2}{\pi}x + \frac{x}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2) \leq \sin x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $e^x - \sum_{k=0}^{2011} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{2011}(e^x - 1)$, $x \in (0; +\infty)$.

d) $\prod_{k=1}^{2011} a_k \leq \left(\frac{3}{e}\right)^{2011} e^{\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{2011} a_k}$ ($a_k \geq 0$, $k = \overline{1, 2011}$).

e) $\sum_{k=0}^{2011} (k - 2011x)^2 C_{2011}^k x^k (1-x)^{2011-k} \leq \frac{2011}{4}$.

f) $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln \frac{b}{a}} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $a, b > 0$, $a \neq b$.

3.50. Chứng minh rằng nếu các đạo hàm $f''(x)$, $f'''(x)$ tồn tại thì

a) $f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x))}{(\Delta x)^2}$.

b) $f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x))}{(\Delta x)^2}$.

c) $f'''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x))}{(\Delta x)^3}$.

3.51. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi đến cấp $n + 1$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho :

a) $f(x) = f(0) + xf'(x) - \frac{x^2}{2} f''(x) + \dots +$
 $+ (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(cx)$.

b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x^2}{1+x} f'(x) + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(1+x)^n} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} +$
 $+ (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(1+x)^{n+1}} \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{x + cx^2}{1+x}\right)}{(n+1)!}$, $x \neq -1$.

6.52. Cho $Q(x)$ là một đa thức bậc n . Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=0}^n \frac{Q^{(i)}(0)}{(i+1)!} x^{i+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{Q^{(i)}(x)}{(i+1)!} x^{i+1}.$$

6.53. Cho I, J là hai khoảng mở và $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow J$ là các hàm khả vi vô hạn trên J, I . Chứng minh rằng:

$$(f_0 g)^{(n)}(t) = \sum \frac{n!}{\prod_{j=1}^n k_j!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!} \right)^{k_n}$$

Trong đó $k = \sum_{j=1}^n k_j$ và lấy tổng trên các giá trị k_j sao cho: $\sum_{j=1}^n j k_j = n$.

6.54. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi đến cấp $2n+1$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho:

$$f(x) = f(0) + \frac{2}{1!} f' \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \frac{x}{2} + \frac{2}{3!} f''' \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots + \frac{2}{(2n-1)!} f^{(2n-1)} \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{2n-1} + \frac{2}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\theta x) \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+1}.$$

6.55. Giả sử $f: [-t, t] \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi cấp hai trên $[-t, t]$ và đặt

$$K_i = \sup_{x \in [-t, t]} f^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, 2. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$a) |f'(x)| \leq \frac{K_0}{t} + (x^2 + t^2) \frac{K_2}{2t} \quad \forall x \in [-t, t].$$

$$b) K_1 \leq 2\sqrt{K_0 K_2} \text{ với } t \geq \sqrt{\frac{K_0}{K_2}}.$$

6.56. Cho f khả vi đến cấp hai trên $\mathbb{R}$, đặt $K_i = \sup_{x \in (0, +\infty)} f^{(i)}(x) < +\infty$

với $k = 1, 2, \dots, j$ ($j \geq 2$). Chứng minh rằng:

$$K_i \leq 2^{\frac{i(j-i)}{2}} K_0^{1-\frac{i}{j}} K_2^{\frac{i}{j}}, \quad i = 1, 2, \dots, j-1.$$

6.57. Giả sử f khả vi liên tục đến cấp n trên $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta^n} \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} C_n^k f(x_0 + k\eta) \right).$$

6.58. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a, b])$ và f' tồn tại trên (a, b) thì

$$\inf_{x \in (a,b)} f'_-(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \sup_{x \in (a,b)} f'_-(x).$$

6.59. Giả sử rằng hàm f lõm và tăng thực sự trên (a, b) với $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Chứng minh rằng nếu $f(x) \in (a, x)$ với $x \in (a, b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f'_+(x) = 1$ thì

$$\forall x, y \in (a, b) \text{ ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+1}(y) - f^n(y)} = 1 \text{ ở đây } f^n = \underbrace{f_0 f_0 \dots f_0}_n.$$

6.60. Giả sử $f \in C^2([a, b])$, $f(a)f(b) < 0$ và f', f'' đổi dấu trên $[a, b]$.

Chứng minh rằng: $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, $n \in \mathbb{N}$ trong đó đặt $u_0 = b$ nếu f', f''

cùng dấu; $u_0 = a$ nếu f', f'' trái dấu sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất của phương trình: $f(x) = 0$ trên (a, b) .

CHƯƠNG 4

TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

1. Định nghĩa

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trong (a, b) . Khi đó hàm $F(x)$ xác định trong khoảng (a, b) được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trong khoảng đó nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Tập hợp mọi nguyên hàm của hàm $f(x)$ trong khoảng (a, b) được gọi là tích phân không xác định của hàm $f(x)$ trong khoảng đó và được ký hiệu là: $\int f(x)dx$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trong (a, b) thì $\int f(x)dx = F(x) + C$ với C là một hằng số bất kỳ.

2. Các quy tắc cơ bản để tính tích phân.

2.1. Phương pháp đưa vào biến mới.

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$ với $u = \eta(x)$.

2.2. Quy tắc đổi biến.

Trong việc tính tích phân $\int f(x)dx$ ta có thể thực hiện phép đổi biến $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm khả vi liên tục và có hàm ngược $t = \psi(x)$ trong khoảng (α, β) nào đó.

Khi đó: $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = G(t) + C \Rightarrow \int f(x)dx = G(\psi(x)) + C$.

2.3. Quy tắc tích phân từng phần

Cho $u(x), v(x)$ là các hàm số khả vi. Khi đó ta có: $\int u dv = uv - \int v du$.

3. Các tính chất

3.1. Nếu $f(x)$ là hàm số có nguyên hàm thì

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x) \quad ; \quad d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

3.2. Nếu $F(x)$ có đạo hàm thì : $\int d(F(x)) = F(x) + C$.

3.3. Phép cộng: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên hàm thì

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

3.4. Phép trừ: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên hàm thì:

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

3.5. Phép nhân với một hằng số thực khác 0: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

II. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Định nghĩa và điều kiện khả tích

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$. Chia đoạn $[a, b]$ thành các đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$) bởi các điểm chia tùy ý:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (*)$$

Khi đó tổng $\sigma(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ trong đó $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ được gọi là tổng tích phân của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ ứng với cách chia như ở (*) và cách chọn các điểm ξ_i .

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sigma(f, \xi) = \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ thì ta nói $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ và giới hạn đó được ký hiệu là:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

1.2. Điều kiện khả tích

Với mỗi cách chia đoạn $[a, b]$ bởi các điểm chia (*) ta ký hiệu:

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$\text{và đặt } \underline{S}_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad \bar{S}_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\omega_i = M_i - m_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Khi đó:

$$f \text{ khả tích trên đoạn } [a, b] \Leftrightarrow \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0 \Leftrightarrow \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \underline{S}_n = \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \bar{S}_n.$$

1.3. Lưu ý

Các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, các hàm bị chặn, có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên đoạn $[a, b]$ và các hàm đơn điệu bị chặn trên đoạn $[a, b]$ đều khả tích trên đoạn đó.

2. Công thức tính tích phân xác định

2.1. Công thức Newton- Leibniz

Nếu hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn đó thì: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

2.2. Công thức tích phân từng phần

Nếu $f(x)$, $g(x)$ là các hàm liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

2.3. Quy tắc đổi biến số

Giả thiết rằng:

- (i) Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$.
- (ii) Hàm $\varphi(t)$ xác định và liên tục trên đoạn $[c, d]$, có đạo hàm $\varphi'(t)$ liên tục trên đoạn đó sao cho $a = \varphi(c)$, $b = \varphi(d)$.
- (iii) Hàm hợp $f(\varphi(t))$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, d]$.

Khi đó: $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

2.4. Tích phân với cận trên biến thiên

Giả sử $f(x)$ là hàm xác định trên $[a, b]$.

Ký hiệu $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \leq x \leq b$.

- a) Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì $F(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$.
- b) Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $F(x)$ khả vi trên đoạn đó và $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$.

3. Mối liên hệ giữa nguyên hàm và tích phân xác định

Giả sử f là một hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi đó với mỗi $x \in [a, b]$ ta xác định được hàm số: $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì f khả tích trên $[a, b]$ và khi đó F là một nguyên hàm của f trên $[a, b]$, nghĩa là với mỗi $x \in [a, b]$, ta có:

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Nếu f là hàm liên tục trên $[a, b]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ là những hàm khả vi trên $[a, b]$ và nhận giá trị thuộc đoạn $[a, b]$. Khi đó với mỗi $x \in [a, b]$, ta có:

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt \right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

4. Một số tính chất quan trọng.

4.1. Hệ thức Chasles

Hàm $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ khi và chỉ khi nó khả tích trên mỗi đoạn con bất kỳ. Khi đó $\forall c \in [a, b]$, ta có: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Chúng ta có thể mở rộng vấn đề này như sau: Cho $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ và $f(x)$ là hàm khả tích trên đoạn lớn nhất với các đầu mút trên. Khi đó ta có: $\int_{a_0}^{a_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$.

4.2. Tính chất đại số.

Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm khả tích trên $[a, b]$, còn $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Khi đó $\lambda f(x) + \mu g(x)$ cũng khả tích trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

4.3. Tính khả tích của hàm hợp

Cho $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$, $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích. Khi đó $g \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là hàm khả tích.

4.4. Hệ quả

Nếu $f(x), g(x)$ là các hàm khả tích trên $[a, b]$ thì các hàm sau đây:
 $h(x) = f(x)g(x)$, $|f(x)|$ cũng khả tích trên $[a, b]$.

5. Định lý giá trị trung bình của tích phân

5.1. Định nghĩa

$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ được gọi là giá trị trung bình của hàm f trên đoạn $[a, b]$.

5.2. Mệnh đề

Nếu f khả tích trên đoạn $[a, b]$ và $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ thì tồn tại một số $\mu \in [m, M]$ sao cho $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

5.3. Hệ quả

Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

5.4. Định lý trung bình thứ I

Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$, $g(x)$ không đổi dấu trong khoảng (a, b) . Ký hiệu $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ thì tồn tại

$$\mu \in [m, M] \text{ sao cho } \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Hơn nữa, nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

5.5. Định lý trung bình thứ II

a) Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ và $g(x)$ là hàm đơn điệu trong khoảng (a, b) thì:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0) \int_a^\xi f(x)dx + g(b-0) \int_\xi^b f(x)dx \text{ trong đó } a \leq \xi \leq b.$$

b) Hơn nữa, nếu $g(x)$ là hàm đơn điệu giảm, không âm trong khoảng (a, b) thì

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0) \int_a^\xi f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b)$$

c) Nếu $g(x)$ là hàm đơn điệu tăng, không âm trong khoảng (a, b) thì

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-0) \int_\xi^b f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

6. Các định lý và các tính chất về bất đẳng thức

6.1. Mệnh đề 1

Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6.2. Mệnh đề 2

Nếu f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

6.3. Mệnh đề 3

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a, b]$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ và $f(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

6.4. Mệnh đề 4

Nếu f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ và $f(x), g(x)$ không đồng nhất với nhau trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

6.5. Mệnh đề 5

Nếu f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ và $f(x)$ không đồng nhất với m hoặc M thì $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$.

6.6. Mệnh đề 6

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

6.7. Mệnh đề 7

Nếu f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì $\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|dx$.

6.8. Mệnh đề 8 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

Cho f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

6.9. Mệnh đề 9 (Bất đẳng thức Minkowski)

Cho $p > 1$ và f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

6.10. Mệnh đề 10 (Bất đẳng thức Holder)

Cho $p, q > 1$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$.

$$\text{Khi đó: } \int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

III. TÍCH PHÂN SUY RỘNG TRÊN KHOẢNG VÔ HẠN

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ khả tích trên mọi đoạn $[a, A]$ ($A > a$).

Biểu thức: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$ (1) được gọi là tích phân suy rộng

(loại 1) của hàm $f(x)$ trong khoảng $[a, +\infty)$.

Nếu giới hạn (1) tồn tại và hữu hạn thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ. Nếu giới hạn (1) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là phân kỳ.

Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ được định nghĩa tương tự.

Nếu $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[B, A] \subset (-\infty, +\infty)$ thì biểu thức $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x)dx$ (2)

được gọi là tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ trong khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Nếu giới hạn (2) tồn tại hữu hạn thì tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ; trong trường hợp ngược lại ta nói tích phân này phân kỳ.

Cho a là số thực bất kỳ. Nếu cả hai tích phân $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ thì $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Nếu tích phân suy rộng trên các khoảng $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ của hàm $f(x)$ hội tụ thì ta nói $f(x)$ khả tích trên các khoảng tương ứng.

2. Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy

Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A_0, \forall A', A > A_0: \left| \int_{A'}^A f(x)dx \right| < \varepsilon$.

3. Các dấu hiệu so sánh

a) Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là các hàm khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$ ($A > a$) sao cho: $0 \leq f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a, +\infty)$.

Khi đó: nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ.

b) Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ xác định và không âm trong khoảng $[a, +\infty)$, khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$ ($A > a$) sao cho tồn tại giới hạn :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty.$$

Khi đó các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

c) Giả sử $f(x)$ có dạng : $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$)

Khi đó :

Nếu $\alpha > 1$ và $\varphi(x)$ là hàm không âm và bị chặn trên :

$0 \leq \varphi(x) \leq M \quad \forall x \in [a, +\infty)$ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\alpha \leq 1$, còn $\varphi(x)$ là hàm không âm và bị chặn dưới :

$0 < m \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

4. Các định lý Abel và Dirichlet

4.1. Định lý Abel

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ xác định trong khoảng $[a, +\infty)$. Giả sử rằng :

Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ ;

Hàm $g(x)$ đơn điệu và bị chặn trong $[a, +\infty)$: $|g(x)| \leq L \quad \forall x \in [a, +\infty)$, L là hằng số.

Khi đó : $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

4.2. Định lý Dirichlet

Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trong khoảng $[a, +\infty)$. Giả sử rằng :

a) $f(x)$ khả tích trên đoạn hữu hạn $[a, A]$ ($A > a$) sao cho :

$$\left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K \quad \forall A \geq a, \quad K \text{ là hằng số.}$$

b) Hàm $g(x)$ đơn điệu dần về 0 khi $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Khi đó : $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ hội tụ.

5. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Cho hàm $f(x)$ xác định trong khoảng $[a, +\infty)$.

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ cũng hội tụ. Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối.

Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ nhưng tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ được gọi là bán hội tụ hay hội tụ không tuyệt đối.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

BÀI TẬP VỀ ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Ở dạng bài tập này độc giả cần chú ý nhiều hơn đến các bài toán vận dụng tích phân xác định để tính giới hạn của dãy số. Thực tế có rất nhiều bài toán dãy số mà chỉ sử dụng những kiến thức trong nội bộ dãy số thì không thể giải quyết được hoặc nếu giải quyết được thì tốn kém nhiều thời gian và công sức. Vì vậy chúng ta cần linh hoạt trong công việc làm xuất hiện “tổng tích phân” trong bài toán giới hạn dãy số. Đây là một trong những dạng toán hay thường xuyên có mặt trong các đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc ở câu về giới hạn dãy số.

4.1. Cho f là hàm liên tục, dương trên đoạn $[0,1]$. Chứng minh rằng:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}.$$

Giải

$$\text{Ta có: } \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\frac{1}{n} \ln \left(f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right) \right)} = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right)}.$$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right)$ là tổng tích phân của hàm $g(x) = \ln f(x)$ trên đoạn $[0,1]$ ứng với cách chia đoạn $[0,1]$ thành n phần bằng nhau và chọn

$$\xi_i = x_i = \frac{1}{n} \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Vì f là hàm liên tục, dương trên đoạn $[0,1]$ nên $g(x)$ là hàm xác định, liên tục trên đoạn đó. Do đó: $\int_0^1 \ln f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right)$.

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}.$$

4.2. Chứng minh rằng giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{2} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n+1}}{n} \right) > 0$

Giải

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \in (0, \pi] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}.$$

Rõ ràng $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[0, \pi]$ và dương trên $[0, \pi)$. Nhưng vậy $f(x)$ khả tích Riemann và $\int_0^\pi f(x) dx > 0$.

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{2} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n+1}}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n+1}}{\frac{i\pi}{n+1}} = \int_0^\pi f(x) dx > 0.$$

4.3. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n + \frac{2}{3}} + \frac{1}{n + \frac{8}{3}} + \dots + \frac{1}{n + \frac{6n-4}{3}} \right)$.

Giải

$$\text{Đặt } \frac{1}{n + \frac{2}{3}} + \frac{1}{n + \frac{8}{3}} + \dots + \frac{1}{n + \frac{6n-4}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{6i-4}{3n}}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x}$ liên tục trên $[0, 2]$ nên khả tích trên đoạn này.

Chia $[0, 2]$ bởi các điểm chia $x_i = \frac{2i}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)

Chọn $\xi_i = \frac{2}{3}x_{i-1} + \frac{1}{3}x_i = \frac{6i-4}{3n} \in [x_{i-1}, x_i]$

Dễ thấy

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n + \frac{2}{3}} + \frac{1}{n + \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{n + \frac{6n-4}{3}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{dx}{1+x} = \ln \sqrt{3} \end{aligned}$$

4.4. Chứng minh rằng nếu f khả vi liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

Giải

Trước hết, chúng ta có:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) &= n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \right) \\ &= n \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right) dx = n \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i(x)) \left(\frac{i}{n} - x \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } m_i = \inf_{x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} f'(x) \quad ; \quad M_i = \sup_{x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} f'(x)$$

$$\text{Do đó: } m_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(\frac{i}{n} - x \right) dx \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i(x)) \left(\frac{i}{n} - x \right) dx \leq M_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(\frac{i}{n} - x \right) dx$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n m_i \leq n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i(x)) \left(\frac{i}{n} - x \right) dx \leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n M_i$$

Hơn nữa, f' là một hàm liên tục nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

BÀI TẬP VỀ SỰ KHẢ TÍCH CỦA HÀM SỐ

4.5. Chứng minh rằng $f(x) = [x]$ khả tích trên $[0, 2011]$ và tính $\int_0^{2011} [x] dx$.

Giải

Rõ ràng $f(x) = [x]$ bị chặn trên $[0, 2011]$ và 2011 điểm gián đoạn: $1, 2, \dots, 2011$

Ta có: $\int_0^{2011} [x] dx = \sum_{i=0}^{2011} \int_i^{i+1} [x] dx = \sum_{i=0}^{2010} i = 2021055$.

4.6. Giả sử $f(x)$ khả tích trên đoạn $[0, 1]$ và $\int_0^1 f(x) dx > 0$. Chứng minh rằng tồn tại đoạn $[a, b] \subset [0, 1]$ mà trong đoạn đó $f(x) > 0$.

Giải

Chia đều đoạn $[0, 1]$ bởi n điểm chia $x_0 = 0, x_n = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ta lập được tổng tích phân $\sigma_n(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{1}{n}$.

Vì $f(x)$ khả tích trên đoạn $[0, 1]$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, \xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$.

Giả sử trên mỗi đoạn con $[a, b] \subset [0, 1]$, hàm $f(x)$ có chứa những điểm x làm cho $f(x) \leq 0$. Khi đó ta dễ dàng suy ra được $f(\xi_i) \leq 0$. Do đó:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, \xi) = \int_0^1 f(x) dx \leq 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy ta có được

điều phải chứng minh cho bài toán này.

4.7. Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$.

a) Nếu $|f(x)|$ là hàm khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì hàm $f(x)$ có khả tích trên đoạn đó hay không?

b) Nếu $f^{2012}(x)$ là hàm khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì hàm $f(x)$ có khả tích trên đoạn đó hay không?

Giải

Chưa hẳn là $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$! Xét ví dụ sau đây:

Cho $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ -1 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Hàm này không khả tích trên mọi đoạn

$[a, b]$. Thế nhưng $|f(x)|, f^{2012}(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$.

Ta có:

$$a) \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b 1 dx = b - a$$

$$b) \int_a^b f^{2012}(x) dx = \int_a^b 1 dx = b - a.$$

$$4.8. \text{ Cho } f(x) = \begin{cases} \left(\frac{p}{n}\right)^2 & ; x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right), p = \overline{0, n-1} \\ 1 & ; x = 1 \end{cases} ; x \in [0, 1] \text{ và } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $f(x)$ khả tích trên $[0, 1]$ và tính $\int_0^1 f(x) dx$.

Giải

Hàm $f(x)$ bị chặn và gián đoạn tại các điểm $x_k = \frac{k}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Do đó $f(x)$ khả tích trên $[0, 1]$.

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \sum_{p=0}^{n-1} \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) dx = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{p^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^3} \sum_{p=0}^{n-1} p^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

BÀI TẬP XOAY QUANH CÁC ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

4.9. Cho f là một hàm liên tục trên $[a; b]$ và $\int_a^b f(x) dx = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a; b): \int_a^c f(x) dx = f(c)$.

Giải

Xét hàm: $g(x) = e^{-x} \int_a^x f(t) dt$

g liên tục trên $[a; b]$, khả vi trên $(a; b)$

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a; b): g'(c) = 0$.

Mà $g'(x) = e^{-x} \left(f(x) - \int_a^x f(t) dt \right)$, vì thế $f(c) = \int_a^c f(t) dt = \int_a^c f(x) dx$.

4.10. Giả sử $f, g \in C([a; b])$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$g(c) \int_a^b f(x) dx = f(c) \int_a^b f(x) dx.$$

Giải

$$\text{Xét } F(x) = \int_a^x f(t)dt, G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

$$\text{Suy ra: } F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$$

Áp dụng định lý Cauchy ta có:

$$\exists c \in (a; b): \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Leftrightarrow \exists c \in (a; b): \frac{\int_a^b f(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in (a; b): g(c) \int_a^b f(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

4.11. Giả sử $f, g \in C([a; b])$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$g(c) \int_a^c f(x)dx = f(c) \int_c^b f(x)dx.$$

Giải

$$\text{Xét hàm: } F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt$$

F liên tục trên $[a; b]$, khả vi trên $(a; b)$ và $F(a) = F(b)$.

Vì thế theo định lý Rolle ta có: $\exists c \in (a; b): F'(c) = 0$

$$\text{Mà } F'(x) = f(x) \int_x^b g(t)dt - g(x) \int_a^x f(t)dt$$

$$\text{Do đó: } \exists c \in (a; b): g(c) \int_a^c f(x)dx = f(c) \int_c^b f(x)dx.$$

4.12. Cho $f \in C^2([0; 1])$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho:

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{6} f''(c).$$

Giải

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(x-1) = (x-1)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)dx$$

$$= f(0) - \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f''(x)dx.$$

Áp dụng định lý giá trị trung bình của tích phân:

tồn tại $c \in (0;1): \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f''(x) dx = \frac{1}{2} f''(c) \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{6} f''(c).$

Do đó tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho: $\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{6} f''(c).$

4.13. Cho f liên tục trên $[a; b]$. Đặt $c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Chứng minh rằng:

$$\int_a^b |f(x) - c|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - t|^2 dx \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Giải

Xét $g(t) = \int_a^b |x - t|^2 dt = (b-a)t^2 - 2 \left(\int_a^b f(x) dx \right) t + \int_a^b f^2(x) dx.$

$g(t)$ là tam thức bậc hai theo t , $g(t)$ đạt cực tiểu tại $t_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = c.$

Vậy $\int_a^b |f(x) - c|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - t|^2 dx \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

BÀI TẬP VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

4.14. Chứng minh rằng nếu f khả tích Riemann trên $[a; b]$ thì

$$\left(\int_a^b f(x) \sin x dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \cos x dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz, ta được:

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b f(x) \sin x dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \cos x dx \right)^2 \leq \\ & \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b \sin^2 x dx + \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b \cos^2 x dx = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx \end{aligned}$$

4.15. Chứng minh rằng nếu f dương và khả tích Riemann trên $[a; b]$ thì

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

Hơn nữa nếu $0 < m \leq f(x) \leq M$ thì $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (b-a)^2$.

Giải

+ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có:

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

+ Vì $0 < m \leq f(x) \leq M$ nên $\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} \leq 0, a \leq x \leq b$

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} dx &\leq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx - (m+M) \int_a^b dx + mM \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx + mM \int_a^b \frac{dx}{f(x)} &\leq (m+M)(b-a) \Leftrightarrow mM \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq (m+M)(b-a) - \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } mM \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq (m+M)(b-a) \int_a^b f(x) dx - \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$$

Xét hàm số: $y = g(t) = -t^2 + kt$.

Hàm số đạt cực đại tại $t = \frac{k}{2}$ với giá trị cực đại là $\frac{k^2}{4}$.

Với $k = (m+M)(b-a)$, $t = \int_a^b f(x) dx$ ta có:

$$(m+M)(b-a) \int_a^b f(x) dx - \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(m+M)^2 (b-a)^2}{4}.$$

$$\text{Do đó: } mM \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2 (b-a)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2 (b-a)^2}{4mM}.$$

4.16. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ là một hàm liên tục khả vi. Chứng minh rằng:

$$\left| \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

Giải

Đặt $M = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.

Khi đó $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [0;1]$. Nhân $f(x) \geq 0$

vào từng vế của bất đẳng thức này ta được :

$$-Mf(x) \leq f(x)f'(x) \leq Mf(x), \quad x \in [0;1]$$

$$\text{Suy ra: } -M \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x f(t)f'(t)dt \leq M \int_0^x f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow -M \int_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{2} f^2(0) \leq M \int_0^x f(t)dt. \text{ Đến đây ta tiếp tục nhân}$$

$f(x) \geq 0$ vào từng vế của bất đẳng thức này để được:

$$-Mf(x) \int_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{2} f^3(x) - \frac{1}{2} f^2(0)f(x) \leq Mf(x) \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0;1].$$

Lấy tích phân 2 vế trên $[0;1]$ của bất đẳng thức này:

$$-M \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)dx \leq M \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)dx \right| \leq M \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2$$

$$\text{hay } \left| \int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

$$4.17. \text{ Tìm } K = \min_{f \in \mathcal{P}} \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx, \text{ ở đây } \mathcal{P} = \left\{ f \in C([0,1]) : \int_0^1 f(x)dx = 1 \right\}.$$

Giải Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$1 = \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x^2+1} f(x) \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = K \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Suy ra: } K = \min_{f \in \mathcal{P}} \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \geq \frac{4}{\pi}.$$

$$4.18. \text{ Cho } M = \left\{ f \in C([0;1]) : \int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 1 \right\}.$$

$$\text{Tìm } \min_{f \in M} \int_0^\pi f^2(x) dx.$$

Giải

Cho $f_0(x) = \frac{2}{\pi}(\sin x + \cos x)$.

+ Rõ ràng $f_0 \in M$.

+ Đối với hàm bất kỳ $f \in M$, $\int_0^{\pi} [f(x) - f_0(x)]^2 dx \geq 0$.

Suy ra: $\int_0^{\pi} f^2(x) dx \geq 2 \int_0^{\pi} f(x) f_0(x) dx - \int_0^{\pi} f_0^2(x) dx = \frac{8}{\pi} - \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi} = \int_0^{\pi} f_0^2(x) dx$.

Vậy cực tiểu đạt được khi $f = f_0$.

4.19. Chứng minh rằng: $\int_0^1 x^{2011} \sqrt{1-x} dx \leq \frac{1}{2012\sqrt{2013}}$.

Giải

Ta có: $\int_0^1 \sqrt{x^{2011}} \cdot \sqrt{x^{2011}(1-x)} dx \leq \left(\int_0^1 x^{2011} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 x^{2011}(1-x) dx \right)^{\frac{1}{2}} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2012}} \left(\int_0^1 x^{2011} dx - \int_0^1 x^{2012} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2012}} \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2012\sqrt{2013}}.$

4.20. Tìm giá trị lớn nhất của $S = \frac{\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^{2011}}{\int_0^1 f^{2011}(x) dx}$ với f liên tục, dương trên

$[0;1]$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\int_0^2 f(x) \cdot 1 dx \leq \left(\int_0^2 |f(x)|^{2011} dx \right)^{\frac{1}{2011}} \left(\int_0^2 1^{\frac{2011}{2010}} dx \right)^{\frac{2010}{2011}} = \sqrt[2011]{2^{2010}} \left(\int_0^2 |f(x)|^{2011} dx \right)^{\frac{1}{2011}}$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^2 f(x) dx \right)^{2011} \leq 2^{2010} \int_0^2 f^{2011}(x) dx \Rightarrow S = \frac{\left(\int_0^2 f(x) dx \right)^{2011}}{\int_0^2 f^{2011}(x) dx} \leq 2.$$

Vậy $\max S = 2^{2010}$.

4.21. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a,b])$ là dương và lõm trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx > \frac{1}{2}(b-a) \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Giải

f liên tục trên $[0;1]$ nên $\exists c \in [a, b]: f(c) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= (c-a) \int_0^1 f[(1-x)a + xc] dx + (b-c) \int_0^1 f[(1-x)c + xb] dx \\ &> (c-a) \int_0^1 [(1-x)f(a) + xf(c)] dx + (b-c) \int_0^1 [(1-x)f(c) + xf(b)] dx = \\ &= (c-a) \frac{f(a) + f(c)}{2} + (b-c) \frac{f(b) + f(c)}{2} > \frac{1}{2}(b-a)f(c). \end{aligned}$$

Do đó chúng ta có điều phải chứng minh.

$$4.22. \text{ Cho } \mathcal{P} = \left\{ f \in \mathcal{R}([0,1]): \int_0^1 f(x) dx = 3, \int_0^1 xf(x) dx = 2 \right\}.$$

Tìm $\min_{f \in \mathcal{P}} \int_0^1 f^2(x) dx$. Cho ví dụ về một hàm số thoả mãn những yêu cầu như thế.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} (2 + 3t)^2 &= \left(\int_0^1 f(x)(x+t) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 (x+t)^2 dx \\ \Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx &\geq \frac{3(2+3t)^2}{3t^2 + 3t + 1} = \varphi(t) \Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \geq \max_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t). \end{aligned}$$

Khảo sát hàm $\varphi(t)$, dựa vào bảng biến thiên ta dễ dàng suy ta được

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = 12. \text{ Vậy } \min_{f \in \mathcal{P}} \int_0^1 f^2(x) dx = 12.$$

Chẳng hạn ta xét hàm $f(x) = 6x$.

4.23. Cho $f, g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ là hai hàm liên tục, không âm. Giả sử

$$f(x) \leq 2011 + \int_0^x f(t)g(t) dt \quad \forall x > 0. \text{ Chứng minh rằng}$$

$$f(x) \leq 2011e^{\int_0^x g(t) dt} \quad \forall x > 0.$$

Giải

$$\text{Ta sẽ chứng minh } 2011 + \int_0^x f(t)g(t) dt \leq 2011e^{\int_0^x g(t) dt}$$

Thật vậy!

$$\begin{aligned}
 2011 + \int_0^x f(t)g(t)dt &\leq 2011e^{\int_0^x g(t)dt} \\
 \Leftrightarrow \ln \left[2011 + \int_0^x f(t)g(t)dt \right] - \ln 2011 &\leq \int_0^x g(t)dt \\
 \Leftrightarrow \int_0^x \frac{f(u)g(u)}{2011 + \int_0^u f(t)g(t)dt} du &\leq \int_0^x g(u)du. \text{ Điều này hoàn toàn đúng vì nó} \\
 &\text{được suy ra từ giả thiết của bài toán.}
 \end{aligned}$$

BÀI TẬP VỀ GIỚI HẠN CỦA TÍCH PHÂN

4.24. Giả sử $f \in C([0, +\infty))$ và đặt $x_n = \int_0^1 f(n+x)dx$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Hãy tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx)dx \text{ biết } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2011.$$

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x+k)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n} = 2011 \quad (\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2011).
 \end{aligned}$$

4.25. Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x))dx$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (f(x+h) - f(x))dx &= \int_{a+h}^{b+h} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \\
 &= \int_{a+h}^b f(x)dx + \int_b^{b+h} f(x)dx - \int_a^{a+h} f(x)dx - \int_{a+h}^b f(x)dx \\
 &= \int_{a+h}^a f(x)dx + \int_b^{b+h} f(x)dx = -hf(a+\theta h) + hf(b+\theta'h) \quad , \quad \theta, \theta' \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx = f(b) - f(a).$$

4.26. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{xdx}{x^5 + 1} \right).$

Giải

Ta có đánh giá sau: $n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{(x+1)^4} < n^3 \int_n^{2n} \frac{xdx}{x^5 + 1} < n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{x^4}.$

Đễ dàng chứng minh được: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{(x+1)^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{x^4} \right) = \frac{7}{24}.$

Theo định lý kẹp suy ra: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{xdx}{x^5 + 1} \right) = \frac{7}{24}.$

4.27. Cho f là một hàm liên tục trên $[0;1]$. Tìm . Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx.$

Giải

Cho $0 < \varepsilon < 1$. Khi đó ta có: $\int_0^1 f(x^n) dx = \int_0^{1-\varepsilon} f(x^n) dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f(x^n) dx.$

+ Theo định lý giá trị trung bình của tích phân tồn tại

$c \in [0; 1-\varepsilon]: \int_0^{1-\varepsilon} f(x^n) dx = f(c^n)(1-\varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1-\varepsilon} f(x^n) dx = f(0)(1-\varepsilon).$

+ Đặt $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, ta có: $\left| \int_{1-\varepsilon}^1 f(x^n) dx \right| \leq \int_{1-\varepsilon}^1 |f(x^n)| dx \leq M\varepsilon.$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0).$

4.28. Tính $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-k \sin t} dt.$

Giải

Bằng phương pháp hàm số, chúng ta dễ dàng chứng minh được:

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Khi đó ta có: $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-k \sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-k \frac{2}{\pi} t} dt = \frac{\pi}{2k} \left(1 - \frac{1}{e^k} \right) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$

Vậy $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-k \sin t} dt = 0$.

4.29. Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2011}} \int_0^{x^{2010}} \sin \sqrt[2010]{t} dt$.

Giải

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2011}} \int_0^{x^{2010}} \sin \sqrt[2010]{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^{2010}} \sin \sqrt[2010]{t} dt}{x^{2011}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2010 x^{2009} \sin x}{2011 x^{2010}} = \frac{2010}{2011} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

4.30. Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln x} \int_0^x \frac{2010}{\sqrt[2011]{t^{2011} + 2012}} dt \right)$.

Giải

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \int_0^x \frac{2010}{\sqrt[2011]{t^{2011} + 2012}} dt \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{2010}{\sqrt[2011]{t^{2011} + 2012}} dt}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2010 x}{\sqrt[2011]{x^{2011} + 2012}} = 2010.$$

4.31. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2nx}}{1 + e^{2x}} dx$

Giải

Ta có: $e^{2x} \geq 1 \forall x \in [0, 1] \Rightarrow 2e^{2x} \geq 1 + e^{2x} \geq 2 \Rightarrow \frac{e^{-2nx}}{2e^{2x}} \leq \frac{e^{-2nx}}{1 + e^{2x}} \leq \frac{e^{-2nx}}{2}$
 $\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-2nx}}{2e^{2x}} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-2nx}}{1 + e^{2x}} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-2nx}}{2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - e^{-2n-2}}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{e^{-2nx}}{1 + e^{2x}} dx \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - e^{-2n}}{n}$

Đến đây ta sử dụng định lý kẹp và dễ dàng suy ra được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2nx}}{1 + e^{2x}} dx = 0$.

4.32. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx$.

Giải

Đặt $I_n = \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx$.

Ta có: $I_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos^n x d(\sin nx) = \cos^n x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx d(\cos^n x)$
 $= \int_0^{\pi} \sin nx \sin x \cos^{n-1} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x] \cos^{n-1} x dx$

$$= \frac{1}{2} I_{n-1} - \frac{1}{2} \cos^{n-1} x [\cos nx \cos x - \sin nx \sin x] dx$$

$$= \frac{1}{2} I_{n-1} - \frac{1}{2} (I_n - I_n) = \frac{1}{2} I_{n-1} = \frac{1}{2^2} I_{n-2} = \frac{1}{2^n} I_0 = \frac{\pi}{2^n}.$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx = \pi$.

MỘT SỐ BÀI TẬP TÍNH TOÁN CÁC DẠNG TÍCH PHÂN

4.33. Tính $I_n = \int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}} dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Giải

Đặt $f_n(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \Rightarrow f'_n(x) = 1+x+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

Ta có: $I_n = \int \frac{n!(f_n(x) - f'_n(x))}{f_n(x)} dx = n! \int \left(1 - \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} \right) dx = n!x - n! \ln f_n(x) + C$

$$= n!x - n! \ln \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \right) + C$$

4.34. Tính $I = \int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{b}{x}}}{x} dx$.

Giải

Đặt $t = \frac{ab}{x} \Rightarrow dt = -\frac{ab}{x^2} dx \Rightarrow dx = -\frac{ab}{t^2} dt$.

Đổi cận $x=a \Rightarrow t=b, x=b \Rightarrow t=a$.

Ta có: $I = \int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{b}{x}}}{x} dx = \int_b^a \frac{e^{\frac{b}{t}} - e^{\frac{t}{a}}}{\frac{ab}{t}} \cdot \frac{-ab}{t^2} dt = - \int_a^b \frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{\frac{b}{t}}}{t} dt = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$.

4.35. Tính tích phân $I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$.

Giải

Đặt $x = 6 - t$, ta thu được: $I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)} + \sqrt{\ln(9-t)}} dt$.

Suy ra: $2I = \int_2^4 dx \Rightarrow I = 1$.

4.36. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$.

Giải

Ta có: $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_1^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$
 $= J + K$.

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$

+ Để tính J, ta đổi biến $x = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt$.

Thay vào và biến đổi đơn giản cho đến khi được kết quả như sau:

$J = \frac{1}{2} \int_2^{\frac{5}{2}} \left(-1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}} - t + \sqrt{t^2 - 4}\right) e^t dt$.

+ Để tính K, ta đổi biến $x = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}$ và thực hiện tính toán như đã tính toán để tìm J, ta thu được kết quả

$K = \frac{1}{2} \int_2^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}} + t + \sqrt{t^2 - 4}\right) e^t dt$.

+ Từ đó suy ra: $I = J + K = \int_2^{\frac{5}{2}} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}} + \sqrt{t^2 - 4}\right) e^t dt$.

+ Đến đây thì bài toán hết sức đơn giản, ta sử dụng tích phân từng phần và tính toán, thu gọn được kết quả cuối cùng $I = \frac{3}{2} e^2 \sqrt{e}$.

4.37. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2 \left(\sqrt[2011]{\cos x} \right) + \sin^2 \left(\sqrt[2011]{\sin x} \right) \right] dx$.

Giải

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, ta thu được tích phân sau đây:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2 \left({}^{2011}\sqrt{\sin t} \right) + \sin^2 \left({}^{2011}\sqrt{\cos t} \right) \right] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2 \left({}^{2011}\sqrt{\sin x} \right) + \sin^2 \left({}^{2011}\sqrt{\cos x} \right) \right] dx.$$

Suy ra: $2I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}.$

4.38. Cho m, n là các số nguyên dương và $a < b$, hãy tính $\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^n}{n!} dx.$

Vận dụng công thức vừa tính để tính $\int_0^1 (1-x^2)^n dx.$

Giải

Dùng công thức tích phân từng phần ta được:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^n}{n!} dx &= \int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} d \left(\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} dx = \int_a^b \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} dx. \end{aligned}$$

Dùng công thức tích phân từng phần nhiều lần ta được:

$$\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^n}{n!} dx = \int_a^b \frac{(x-a)^{n+m}}{(n+m)!} dx = \frac{(x-a)^{n+m+1}}{(n+m+1)!} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^{n+m+1}}{(n+m+1)!}.$$

Áp dụng vào bài toán cụ thể như sau:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x)^n (x-(-1))^n dx = \frac{1}{2} (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...(2n+1)}.$$

MỘT SỐ BÀI TẬP LIÊN HỆ GIỮA ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

4.38. Tồn tại hay không hàm khả vi liên tục f thỏa mãn điều kiện

$$|f(x)| < 2, f(x)f'(x) \geq \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}?$$

Giải

Không tồn tại.

$$\text{Ta có: } f^2(x) - f^2(0) = \int_0^x [f^2(t)]' dt = \int_0^x 2f(t)f'(t) dt \geq 2 \int_0^x \sin t dt = 2(1 - \cos x)$$

$$\text{Suy ra: } f^2(\pi) \geq f^2(0) + 2(1 - \cos \pi) \geq 4.$$

4.39. Cho số thực $a \in [0;1]$. Xác định tất cả các hàm liên tục không âm trên $[0;1]$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\text{a) } \int_0^1 f(x) dx = 1 \quad \text{b) } \int_0^1 xf(x) dx = a \quad \text{c) } \int_0^1 x^2 f(x) dx = a^2.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski ta có:

$$\left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 = \left(\int_0^1 x\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \cdot \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Mà theo giả thiết: } \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 = \int_0^1 x^2 f(x) dx \cdot \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Do } f \text{ liên tục trên } [0;1] \text{ nên } x\sqrt{f(x)} = \lambda\sqrt{f(x)} \quad \lambda \geq 0, \forall x \in [0;1]$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = 0 \quad \forall x \in [0;1]. \text{ Điều này mâu thuẫn với giả thiết: } \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Vậy không tồn tại hàm f thỏa mãn bài toán.

4.40. Cho f là hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn $0 < 3xf(x) < 1$

$$\forall x \in (0; +\infty).$$

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \int_0^x t^3 f(t) dt - 3 \left(\int_0^x tf(t) dt \right)^3$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Giải

$$\text{Ta có: } g'(x) = x^3 f(x) - 9xf(x) \left(\int_0^x tf(t) dt \right)^2 = xf(x) \left[x^2 - \left(\int_0^x 3tf(t) dt \right)^2 \right]$$

$$\text{Lại có: } 0 < \int_0^x 3tf(t) dt < \int_0^x 1 dt = x \Rightarrow \left(\int_0^x 3tf(t) dt \right)^2 < x^2 \Rightarrow x^2 - \left(\int_0^x 3tf(t) dt \right)^2 > 0$$

$$\text{Kết hợp với } xf(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty), \text{ ta suy ra: } g'(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Vậy $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

4.41. Cho $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi và thoả mãn $f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$.

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và bé thua $1 + \frac{\pi}{4}$.

Giải

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} > 0 \quad \forall x \in [0; +\infty)$$

$f(x)$ đồng biến $\Rightarrow f(x) > f(1) = 1 \quad \forall x > 1$.

$$\text{Từ đó ta có: } f(x) = 1 + \int_1^x f'(t) dt < \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = 1 + \arctan t \Big|_1^x < 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Vậy tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và bé thua $1 + \frac{\pi}{4}$.

4.42. Cho f là một hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ thoả mãn $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) + \int_0^x f(t) dt \right)$

có giới hạn hữu hạn. Chứng minh $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Giải

$$\text{Đặt } F(x) = \int_0^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x).$$

$$\text{Khi đó giả sử } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) + \int_0^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (F'(x) + F(x)) = L$$

Áp dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x F(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x F(x))'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x (F'(x) + F(x))}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (F'(x) + F(x)) = L$$

$$\text{Suy ra: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F'(x) = 0.$$

4.43. Hàm f xác định, khả vi trên $(0; +\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm $f'(x) + \lambda f(x)$ không giảm khi và chỉ khi $f'(x)e^{\lambda x}$ không giảm.

Giải

$$\text{Đặt } h(x) = f'(x) + \lambda f(x) \quad ; \quad g(x) = f'(x)e^{\lambda x}.$$

$$\text{Suy ra: } e^{\lambda x} h(x) = (e^{\lambda x} f(x))' \quad ; \quad e^{-\lambda x} g(x) = f'(x).$$

Khi đó:

$$g(x) = e^{\lambda x} f'(x) = h(x) - \lambda e^{\lambda x} f(x) = h(x) - \lambda \int_0^x (e^{\lambda t} f(t))' dt - \lambda f(0)$$

$$= h(x) - \lambda \int_0^x e^{\lambda t} h(t) dt - \lambda f(0).$$

$$h(x) = f'(x) + \lambda f(x) = e^{-\lambda x} g(x) + \lambda \int_0^x f'(t) dt + \lambda f(0)$$

$$= e^{-\lambda x} g(x) + \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} g(t) dt + \lambda f(0).$$

($\Rightarrow$) Giả sử $h(x)$ không giảm

Khi đó với $b > a$ ta có:

$$g(b) - g(a) = (e^{\lambda b} h(b) - e^{\lambda a} h(a)) - \lambda \int_a^b e^{\lambda t} h(t) dt \quad (1)$$

Theo định lý trung bình của tích phân tồn tại

$$c \in (a; b): \int_a^b e^{\lambda t} h(t) dt = h(c) \int_a^b e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} h(c) (e^{\lambda b} - e^{\lambda a}) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= e^{\lambda b} h(b) - e^{\lambda a} h(a) - e^{\lambda b} h(c) + e^{\lambda a} h(c) \\ &= e^{\lambda b} (h(b) - h(c)) + e^{\lambda a} (h(c) - h(a)) \geq 0 \quad \text{với } b > c > a. \end{aligned}$$

Do đó $g(x)$ không giảm.

($\Leftarrow$) Giả sử $g(x)$ không giảm

Khi đó với $b > a$ ta có:

$$h(b) - h(a) = (e^{-\lambda b} g(b) - e^{-\lambda a} g(a)) + \lambda \int_a^b e^{-\lambda t} g(t) dt \quad (3)$$

Theo định lý trung bình của tích phân tồn tại

$$c \in (a; b): \int_a^b e^{-\lambda t} g(t) dt = g(c) \int_a^b e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} g(c) (e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}) \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được:

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= e^{-\lambda b} g(b) - e^{-\lambda a} g(a) - e^{-\lambda b} g(c) + e^{-\lambda a} g(c) \\ &= e^{-\lambda b} (g(b) - g(c)) + e^{-\lambda a} (g(c) - g(a)) \geq 0 \quad \text{với } b > c > a. \end{aligned}$$

Do đó $h(x)$ không giảm.

Vậy bài toán đã chứng minh xong.

4.44. Chứng minh rằng nếu hàm $f(x)$ khả vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$ thì hàm

$\frac{f(x) - f(0)}{x}$ được định nghĩa thêm để liên tục tại $x = 0$ cũng khả vi vô hạn lần.

Giải

Với $x \neq 0$ ta có:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^1 f'(ux) x du \Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} = \int_0^1 f'(ux) du$$

Vì $\int_0^1 f'(ux) du$ khả vi vô hạn lần với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ được định nghĩa thêm để liên tục tại $x = 0$ khả vi vô hạn lần.

4.45. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f^2(x) = \int_0^x (f^2(t) + f'^2(t)) dt + 2011 \quad (1).$$

Giải

Vì hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f^2(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lấy đạo hàm 2 vế của (1), ta được:

$$2f(x)f'(x) = f^2(x) + f'^2(x) \Rightarrow (f'(x) - f(x))^2 = 0 \Rightarrow f'(x) = f(x) \\ \Rightarrow f(x) = Ce^x \quad (2).$$

Từ (1) suy ra: $f^2(0) = 2011 \Rightarrow f(0) = \pm\sqrt{2011}$.

Cho $x = 0$, từ (2) $\Rightarrow f(0) = C = \pm\sqrt{2011}$.

Vậy $f(x) = \pm\sqrt{2011}e^x$.

MỘT SỐ BÀI TẬP VỀ TÍCH PHÂN SUY RỘNG

4.46. Cho $a, b > 0$. Chứng minh: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{a}{b}$.

Giải

Ta có:
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \int_a^b e^{-xt} dt dx = \int_a^b \int_0^{+\infty} e^{-xt} dx dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln b - \ln a = \ln \frac{a}{b}$$

4.47. Cho hàm số f không âm và liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$.

Chứng minh rằng: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n xf(x) dx = 0$.

Giải

$$\text{Đặt } F(x) = \int_0^x f(t) dx \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = f(x) \geq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

$F'(x) \geq 0 \Rightarrow F(x)$ là hàm tăng.

Bằng phương pháp tích phân từng phần, ta được:

$$\frac{1}{n} \int_0^n x f(x) dx = \frac{1}{n} \int_0^n x d(F(x)) = F(n) - \frac{1}{n} \int_0^n F(x) dx.$$

Ta đã biết: $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \int_0^n f(x) dx < +\infty$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$.

Ta có đánh giá sau đây:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F(i) \leq \frac{1}{n} \int_0^n F(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(i) \quad (\text{Chứng minh hết sức đơn giản})$$

Áp dụng định lý Kẹp, ta đã chứng minh được $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$.

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n x f(x) dx = 0.$$

4.48. Giả sử f, g là các hàm số dương trên $[a, +\infty)$ và $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ phân kỳ.

Chứng minh rằng một trong các tích phân sau đây phân kỳ.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $f(t) + \frac{1}{f(t)} \geq 2$.

$$\text{Từ đó suy ra: } f(t)g(t) + \frac{g(t)}{f(t)} \geq 2g(t) \Rightarrow \int_a^x f(t)g(t) dt + \int_a^x \frac{g(t)}{f(t)} dt \geq 2 \int_a^x g(t) dt$$

Cho $x \rightarrow +\infty$ ta có điều cần phải chứng minh.

$$\text{4.49. Tính } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}}.$$

Giải

Tích phân $\int_a^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt$ hội tụ với $a > 0$ cố định bất kỳ, còn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right) = +\infty$.

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}} = 0.$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{-1} e^{-x}}{-x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1.$$

4.50. Chứng minh rằng: các ánh xạ $f: x \mapsto -e^{-x} \ln x$; $g: x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ khả tích

$$\text{trên } (0,1] \text{ và } \int_0^1 -e^{-x} \ln x dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

Giải

Các ánh xạ f, g liên tục, không âm và $\sqrt{x} f(x) = -e^{-x} \sqrt{x} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$,

$$g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 \text{ suy ra nó khả tích trên } (0,1].$$

Với $\varepsilon \in (0,1]$, thực hiện tích phân từng phần:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 -e^{-x} \ln x dx &= e^{-x} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-x}}{x} dx = -e^{-\varepsilon} \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \\ &= (1-e^{-\varepsilon}) \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\int_0^1 -e^{-x} \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 -e^{-x} \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left((1-e^{-\varepsilon}) \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx \right) = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

4.51. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2-1}}$.

Giải

Với $n \in \mathbb{N}^*$, xét ánh xạ $\varphi_n: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x^n \sqrt{x^2-1}} \text{ liên tục, không âm và } \varphi_n(x) \sim \frac{1}{x^{n+1}} \quad (x \rightarrow +\infty), \text{ do đó } \varphi_n$$

khả tích trên $[2, +\infty)$.

Với $n \geq 2$, ánh xạ $x \mapsto \frac{1}{x^n \sqrt{3}}$ khả tích trên $[2, +\infty)$ và:

$$\forall x \in [2, +\infty), 0 \leq \frac{1}{x^n \sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{x^n \sqrt{3}}$$

Suy ra: $0 \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - 1}} \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^n \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}(n-1)2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - 1}} = 0.$

4.52. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-s^2} ds.$

Giải

Hàm số $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi: $f(s) = e^{-s^2}$ liên tục không âm

Và $s^2 f(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$, do đó f khả tích trên $[0, +\infty)$.

$\forall x > 0$, ta có:

$$0 < e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-s^2} ds = \int_x^{+\infty} e^{x^2 - s^2} ds = \int_{t=s-x}^{+\infty} e^{-2xt - t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-2xt} dt = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-s^2} ds = 0.$

4.53. Với các giá trị nào của n , tích phân $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ hội tụ? Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$?

Giải

+ Rõ ràng $n \leq 0$, tích phân I_n phân kỳ.

+ Với $n > 0$, ta có: $\frac{1}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^n}$ ($n \rightarrow +\infty$).

Từ đây, ta thấy rằng I_n hội tụ với $n > 1$.

+ Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$?

Ta có: $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$

$$0 < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = 0.$$

$$\text{Lại có: } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1.$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = 1.$$

4.54. Chứng minh rằng với mọi $s > 0$, ta đều có: $\int_s^{+\infty} e^{-x^2} dx < \left(\int_0^s \frac{e^{-x^2}}{x} dx \right)'.$

Giải

Với mọi $x > s$, ta có: $sx < x^2 \Rightarrow e^{-sx} > e^{-x^2}$ (1)

Vì $x \mapsto e^{-sx}$, $x \mapsto e^{-x^2}$ là hai hàm số liên tục, dương trên $[0, +\infty)$ nên hai tích

phân $\int_s^{+\infty} e^{-x^2} dx$, $\int_s^{+\infty} e^{-sx} dx$ đều tồn tại.

Từ (1) suy ra: $\int_s^{+\infty} e^{-x^2} dx < \int_s^{+\infty} e^{-sx} dx = \frac{e^{-s^2}}{s} = \left(\int_0^s \frac{e^{-x^2}}{x} dx \right)'.$

4.55. Giả sử φ là một hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$ và tích phân

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \text{ hội tụ } \forall a > 0 \text{ và hai số dương } b, c \text{ sao cho } b < c.$$

a) Chứng minh rằng tích phân $\int_0^a \frac{\varphi(bx) - \varphi(cx)}{x} dx$ hội tụ và tính giá trị của nó.

b) Chứng minh rằng tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\varphi(bx) - \varphi(cx)}{x} dx$ hội tụ và giá trị của

nó bằng $\ln\left(\frac{b}{c}\right)^{\varphi(0)} + \int_{ca}^{ba} \frac{\varphi(s)}{s} ds$. Từ đó suy ra sự hội tụ và giá trị của tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(bx) - \varphi(cx)}{x} dx.$$

Giải

Đặt $t = bx$, $\forall d \geq a$ ta có: $\int_a^d \frac{\varphi(bx)}{x} dx = \int_{ba}^{bd} \frac{\varphi(s)}{s} ds$.

Do đó: $\int_a^{+\infty} \frac{\varphi(bx)}{x} dx = \int_{ba}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds = I(ba)$.

Tương tự như trên, ta cũng chứng minh được: $\int_a^{+\infty} \frac{\varphi(cx)}{x} dx = I(ca)$.

Vậy $\int_0^a \frac{\varphi(bx) - \varphi(cx)}{x} dx = I(ba) - I(ca) = \int_{ba}^{ca} \frac{\varphi(s)}{s} ds$ (đpcm).

b) Đặt $u = bx$, $u = cx$. Với mọi $\omega \in (0, a)$ ta có:

$$\int_{\omega}^a \frac{\varphi(bx) - \varphi(cx)}{x} dx = \int_{b\omega}^{ba} \frac{f(s)}{s} ds - \int_{c\omega}^{ca} \frac{\varphi(s)}{s} ds = \int_{ca}^{ba} \frac{f(s)}{s} ds + \int_{b\omega}^{c\omega} \frac{\varphi(s)}{s} ds.$$

Áp dụng định lý giá trị trung bình của tích phân tồn tại $\xi \in (b\omega, c\omega)$ sao cho

$$\int_{b\omega}^{c\omega} \frac{\varphi(s)}{s} ds = \varphi(\xi) \ln \frac{c}{b} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \varphi(0) \ln \frac{c}{b} = \left(\ln \frac{c}{b} \right)^{\varphi(0)}.$$

Do đó $\int_0^a \frac{\varphi(bx) - \varphi(cx)}{x} dx = \ln \left(\frac{b}{c} \right)^{\varphi(0)} + \int_{ca}^{ba} \frac{f(s)}{s} ds$.

Suy ra: $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(bx) - \varphi(cx)}{x} dx = \ln \left(\frac{c}{b} \right)^{\varphi(0)}$.

C-MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

4.56. Cho f là một hàm số có đạo hàm cấp hai trên $[0,1]$ và f'' bị chặn và khả tích Riemann. Chứng minh rằng:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \right) = \frac{f'(1) - f'(0)}{24}.$$

4.57. Cho f là một hàm liên tục trên $[0,1]$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x) dx}{\int_0^1 x^n e^{x^2} dx}$

4.58. Cho f là một hàm liên tục trên $[0,1]$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} \int_0^1 f(x) \sin^{2n}(2\pi x) dx \right)$

4.59. Cho f là một hàm liên tục trên $[0,1]$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f(x) \sin^{2n}(2\pi x) dx}{\int_0^1 e^{x^2} \sin^{2n}(2\pi x) dx}$

4.60. Giả sử f và g là hai hàm số dương, liên tục trên $[a;b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $\frac{f(c)}{\int_a^c f(x) dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x) dx} = 1$.

4.61. Cho $f \in C^1([0;1])$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho:

$$\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(c).$$

4.62. Giả sử $f \in C([a;b])$, $a > 0$ và $\int_a^b f(x) dx = 0$. Chứng minh tồn tại

$c \in (a;b)$ sao cho $\int_a^c f(x) dx = cf(c)$.

4.63. Chứng minh rằng phương trình: $\int_0^x e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{4022}}{4022!} \right) dt = 2011$ luôn có nghiệm trong trong khoảng $(2011; 4022)$.

4.64. Chứng minh $e^{\int_0^1 \frac{x^{2012} - x^{2011}}{\ln x} dx} = \frac{2013}{2012}$.

4.65. Có tồn tại hay không một hàm số f khả vi liên tục trên $[0,2]$ và thỏa mãn

$$f(0) = f(2) = 1, |f'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0,2], \quad \left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1 ?$$

4.66. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và có $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Chứng minh rằng $\int_a^b f(x) dx \geq (b-a) \left[f(c) + \frac{a+b-2c}{2} f'(c) \right] \quad \forall c \in (a,b)$

4.67. Giả sử hàm số $f(x)$ cùng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0,1]$.

Chứng minh rằng: $\int_0^1 |f(x)| dx \leq \left\{ \left| \int_0^1 f(x) dx \right|; \int_0^1 |f'(x)| dx \right\}$.

4.68. Cho $\mathcal{S} = \{f \in C^2([0,1]) : f(0) = f(1) = 0, f'(0) = a\}$. Tìm $\min_{f \in \mathcal{S}} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$.

4.69. Giả sử $f \in C^1([0;1])$ và $f'(0) \neq 0$. Với $x \in (0;1]$, cho $\theta(x)$ thỏa mãn

$$\int_0^x f(t)dt = f(\theta(x))x. \text{ Tìm } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\theta(x)}{x}.$$

4.70. Cho hàm số $f(x)$ khả vi hai lần trên $[0, +\infty)$. Biết rằng $f(x) > 0, f'(x) > 0$

và $\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \leq 2 \quad \forall x \in [0, +\infty)$. Chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^2} = 0$.

4.71. Chứng minh rằng: $\int_0^\pi x^{2011} e^{2x} dx > \frac{2}{2013} \pi^{2013} + \frac{1}{1007} \pi^{2014}$.

4.72. Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $\left| \int_0^\pi e^{x^2} \sin nx dx \right| \leq \frac{2}{n} e^{\pi^2}$.

4.73. Giả sử rằng: $m + n = 14$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $I(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $I(m, n)$.

4.74. Cho f là hàm số liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn:

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \dots, 2010 \\ 1, & k = 2011 \end{cases} \text{ . Chứng minh rằng tồn tại } c \in [0,1] \text{ sao}$$

cho: $|f(c)| \geq 1006.2^{2012}$.

4.75. Cho $f \in C_{[a,b]}$; $x_k \in [a,b]$; $\mu_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, 2011$). Chứng minh

rằng tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho: $\sum_{k=1}^{2011} \mu_k \int_c^{x_k} f(x) dx = 0$.

4.76. Cho $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^4}$, $x \in \mathbb{R}$. Hãy tính $\int_0^{+\infty} F(t) dt$.

4.77. Tìm m để tích phân sau hội tụ: $I = \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{\sqrt{x+m}} - \sqrt{x} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} \right) dx$.

4.78. Cho $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi và thỏa mãn hai điều kiện:

a) $f'(x) = 3(2f(2x) - f(x))$, $x > 0$ b) $|f(x)| \leq e^{-\sqrt{x}}$, $x \geq 0$. Hãy biểu diễn

$u_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$ qua u_0 và chứng minh dãy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(u_n \cdot \frac{3^n}{n!} \right) < +\infty$.

CHƯƠNG 5 ĐA THỨC VỚI MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

Cho $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

1. Giới hạn

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_0 > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_0 < 0 \end{cases}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } (a_0 > 0, n = 2k, k \in \mathbb{N}) \text{ hay } (a_0 < 0, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}) \\ -\infty & \text{khi } (a_0 > 0, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}) \text{ hay } (a_0 < 0, n = 2k, k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

2. Liên tục

a) Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

b) Nếu có hai số $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì đa thức $f(x)$ có ít nhất một nghiệm $x = x_0 \in \mathbb{R}$ nằm giữa hai số này.

II. ĐẠO HÀM

Cho $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

a) Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $f^{(n)}(x) = a_0n!$.

b) $\deg f = n$ thì $\deg f^{(k)}(x) = n - k$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

c) x_0 được gọi là nghiệm bội k của $f \in \mathbb{R}[x]$ khi:

$$\begin{cases} f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) \\ f^{(k)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Hệ quả: Nếu $f(x)$ có nghiệm bội $k > 1$ thì $f(x)$ có nghiệm bội $k-1$.

d) Xét đa thức bậc 3

(i) Nếu $f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f'(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ thì $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm.

(ii) Nếu phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì đồ thị hàm số có hai cực trị.

+ Với $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm

+ Với $y_{CD} \cdot y_{CT} = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm
(1 nghiệm đơn, 1 nghiệm kép)

+ Với $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm phân biệt

e) Các định lý giá trị trung bình, khai triển Taylor, Quy tắc L'Hospital đều có thể sử dụng được đối với đa thức (bạn đọc xem lại vấn đề này trong lý thuyết về ĐẠO HÀM).

III. NGUYÊN HÀM

Cho $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

có nguyên hàm là: $F(x) = \int f(x) dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \dots + a_n x + C$
(C là hằng số tùy ý).

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

5.1. Liệu có tồn tại hay không hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ thỏa:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải

Dễ thấy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

Giả sử tồn tại hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ thỏa yêu cầu bài toán thì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Suy ra: $\deg f > \deg g$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xg(x)} = \begin{cases} \infty \\ \frac{a_0}{b_0} \end{cases} \quad (*)$

(a_0, b_0 lần lượt là hệ số của ẩn x bậc cao nhất của $f(x), g(x)$)

Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = 0 \quad (**)$ hoàn toàn không khó khăn.

(*) và (**) mâu thuẫn nhau.

Vậy không tồn tại hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

5.2. Với $f(x)$ là đa thức bậc n và các số $a < b$ nào đó thỏa mãn các bất đẳng thức: $f(a) < 0, -f'(a) \leq 0, f''(a) \leq 0, \dots, (-1)^n f^{(n)}(a) \leq 0$

$$f(b) > 0, -f'(b) \geq 0, f''(b) \geq 0, \dots, (-1)^n f^{(n)}(b) \geq 0.$$

Chứng minh rằng tất cả các nghiệm thực của đa thức $f(x)$ đều thuộc khoảng (a, b) .

Giải

Áp dụng khai triển Taylor, ta có:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{-f'(a)}{1!}(a-x) + \frac{f''(a)}{2!}(a-x)^2 + \dots + \frac{(-1)^n f^{(n)}(a)}{n!}(a-x)^n$$

Nếu $x \leq a$ thì $f(x) < 0$. Suy ra $f(x)$ không có nghiệm $x \leq a$.

$$f(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

Nếu $x \geq b$ thì $f(x) > 0$. Suy ra $f(x)$ không có nghiệm $x \geq b$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

5.3. Cho $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2011} \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{2011}}{2012} = a_0 + a_1 + \frac{a_2 2^2}{3} + \dots + \frac{a_{2011} 2^{2011}}{2012} = 0.$$

Chứng minh phương trình: $a_1 + 2a_2x + \dots + 2011a_{2011}x^{2010} = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0, 2)$.

Giải

$$\text{Xét đa thức: } f(x) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \dots + \frac{1}{2012}a_{2011}x^{2012}$$

Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Dựa vào giả thiết bài toán ta dễ dàng chứng minh được: $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

Áp dụng định lý Rolle tồn tại $a \in (0, 1)$, $b \in (1, 2)$ sao cho $f'(a) = f'(b) = 0$.

Lại áp dụng định lý Rolle : tồn tại $c \in (a, b) \subset (0, 2)$ sao cho $f''(c) = 0$.

$$\text{Mà } f''(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + 2011a_{2011}x^{2010}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

5.4. Cho đa thức $f(x)$ có 3 nghiệm $a < b < c$ và $x^2 + mx + n = 0$ có nghiệm.

Chứng minh rằng phương trình: $f''(x) + mP'(x) + nP(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (a, c) .

Giải

Gọi t, s là nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có nghiệm.

$$\text{Theo định lý Viet ta có: } \begin{cases} t + s = -m \\ ts = n \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f''(x) + mP'(x) + nP(x) &= f''(x) - (t+s)P'(x) + tsP(x) \\ &= [f''(x) - tf'(x)] - s[f'(x) - tf(x)]. \end{aligned}$$

$$\text{Xét } g(x) = e^{-tx}f(x) \text{ có } g(a) = g(b) = g(c) = 0.$$

Theo định lý Rolle thì tồn tại $\alpha \in (a, b)$, $\beta \in (b, c)$ sao cho $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$.

$$\text{Suy ra: } f'(\alpha) - tf(\alpha) = f'(\beta) - tf(\beta) = 0.$$

Xét $h(x) = e^{-sx} [f'(x) - tf(x)]$ có $h(\alpha) = h(\beta) = 0$.

Theo định lý Rolle tồn tại $\gamma \in (\alpha, \beta) \subset (a, c)$ sao cho $h'(\gamma) = 0$.

Vậy $f''(x) + mP'(x) + nP(x) = 0$ có nghiệm thuộc (a, c) .

5.5. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ chia hết cho đa thức $(x-1)^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Ta có: $f'(x) = n(n+2)x^{n+1} - (n+1)(n+2)x^n + n+2$

$$f''(x) = n(n+1)(n+2)(x^n - x^{n-1}).$$

$$f'''(x) = n(n+1)(n+2)(nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2})$$

Dễ thấy $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ và $f'''(1) = n(n+1)(n+2) \neq 0$.

Vậy $x_0 = 1$ là nghiệm bội 3 của đa thức $f(x)$.

Vậy đa thức $f(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ chia hết cho đa thức $(x-1)^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5.6. Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho với mỗi đa thức bậc hai $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 1]$ nghiệm đúng bất đẳng thức $f'(0) \leq m$.

Giải

Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đa thức bậc hai tùy ý.

Dựa vào giả thiết ta có:

$$|f(0)| = |c| \leq 1; \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \right| \leq 1; |f(1)| = |a + b + c| \leq 1.$$

$$\text{Từ các bất đẳng thức này ta suy ra: } \begin{cases} -3c \leq 3 \\ 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right) \leq 4 \\ -(a + b + c) \leq 1 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức này ta được:

$$f'(0) = b = -3c + 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right) - (a + b + c) \leq 3 + 4 + 1 = 8.$$

Vậy 8 là một trong các giá trị có thể có của m . Chứng minh $m = 8$ là giá trị nhỏ nhất của m .

Thật vậy! Đa thức $f(x) = -8x^2 + 8x - 1$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 1]$

Bởi vì:

$$f(x) - 1 = -2(2x - 1)^2 \leq 0 \forall x \in [0, 1] \text{ và } f(x) + 1 = 8x(1 - x) \geq 0 \forall x \in [0, 1].$$

Suy ra: $f'(0) = 8$. Vậy giá trị nhỏ nhất của m bằng 8.

5.7. Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{P([x])}$, ở đây $P(x)$ là đa thức với hệ số dương.

Giải

Vì P là đa thức với hệ số dương, với $x > 1$ ta có:

$$\frac{P(x)-1}{P(x)} \leq \frac{P(x)}{P([x])} \leq \frac{P(x)}{P(x-1)}. \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)-1}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{P(x-1)} = 1 \text{ nên}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{P([x])} = 1.$$

5.8. Cho đa thức $Q(x) = 2x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.

$$\text{Đặt } I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{Q(x)} dx, J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{Q(x)} dx, K = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{Q(x)} dx.$$

Chứng minh rằng: $I = K > J$.

Giải

+ Đa thức $Q(x)$ được viết lại như sau:

$$Q(x) = 2(x^6 + 1) + 4(x^5 + x) + 3(x^4 + x^2) + 5x^3.$$

+ Rõ ràng các tích phân trên hội tụ.

$$+ \text{Đặt } x = \frac{1}{t}, \text{ ta được: } I = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t^2} dt}{2\left(\frac{1}{t^6} + 1\right) + 4\left(\frac{1}{t^5} + \frac{1}{t}\right) + 3\left(\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2}\right) + 5\frac{1}{t^3}}$$

+ Ta thu gọn biểu thức dưới dấu tích phân I sẽ thu được $I = K$.

$$+ \text{Lại có: } 2(I - J) = I + K - 2J = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{Q(x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x(x-1)^2}{Q(x)} dx > 0 \Rightarrow I > J.$$

Vậy $I = K > J$.

5.9. Cho $f(x) = x^4 + 2010x^3 + 2011x^2 + 2012x + 2013$ và biết rằng $f(x) > 0$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + f^{(4)}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải

Vì $g(x)$ là đa thức bậc 4 nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$. Do đó tồn tại

$$x_0 \in \mathbb{R} : g(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x). \text{ Từ đây suy ra: } g'(x_0) = 0.$$

Vì $g'(x) = g(x) - f(x)$ nên $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = f(x_0) > 0$.

Mà $g(x) \geq g(x_0)$ nên $g(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

5.10. Cho $P(x)$ là một đa thức có bậc $n > 3$ và $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$ là các số thực. Chứng minh rằng: $P'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)P'\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \neq 0$.

Giải

Ta có: $\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}$, $x \neq x_i$, $i=1, 2, \dots, n$.

+ Nếu $P'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 0$ thì:

$$0 = \frac{1}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3} + \frac{1}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_4} + \dots + \frac{1}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_n} < 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

(Vô lý)

+ Nếu $P'\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) = 0$ thì:

$$0 = \frac{1}{\frac{x_{n-1} + x_n}{2} - x_1} + \frac{1}{\frac{x_{n-1} + x_n}{2} - x_2} + \dots + \frac{1}{\frac{x_{n-1} + x_n}{2} - x_{n-2}} > 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

(Vô lý)

5.11. Cho $P(x)$ là đa thức khác 0, $\deg P < 2010$ và không có thừa số chung với $x^3 - x$.

Giả sử $\left(\frac{P(x)}{x^3 - x}\right)^{2010} = \frac{Q(x)}{R(x)}$, trong đó $Q(x), R(x)$ là những đa thức nào đó.

Chứng minh rằng $\deg Q(x) \geq 4020$.

Giải

Do $P(x)$ và $x^3 - x$ không có thừa số chung nên: $P(x) = (x^3 - x)q(x) + r(x)$ trong đó $q(x), r(x)$ là các đa thức với $\deg q(x) < 2007$, $\deg r(x) < 3$.

Ta có: $\frac{P(x)}{x^3 - x} = q(x) + \frac{r(x)}{x^3 - x}$.

Bao giờ cũng chọn được các số A, B, C sao cho $\frac{r(x)}{x^3 - x} \equiv -\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$

Do $P(x)$ và $x^3 - x$ không có thừa số chung khác hằng số nên suy ra $r(x)$ và $x^3 - x$ cũng vậy. Do đó $ABC \neq 0$.

Ta có: $\left(\frac{r(x)}{x^3 - x}\right)^{(2010)} = 2010! \left[\frac{A}{(x-1)^{2011}} + \frac{B}{x^{2011}} + \frac{C}{(x+1)^{2011}} \right]$

Suy ra:

$$\left(\frac{r(x)}{x^3 - x}\right)^{2010} = 2010! \frac{Ax^{2011}(x+1)^{2011} + B(x-1)^{2011}(x+1)^{2011} + C(x-1)^{2011}x^{2011}}{(x^3 - x)^{2011}}$$

Khai triển tử số, ta nhận được biểu thức dạng

$$Q(x) \equiv (A+B+C)x^{4022} + 2011(A-C)x^{2021} + 2011(1005A - B + 1005C)x^{4020} + \dots$$

Giả sử $\deg Q(x) < 4022$. Khi đó:
$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-C=0 \\ 1005A-B+1005C=0 \end{cases} \Leftrightarrow A=B=C=0$$

Điều này mâu thuẫn với $ABC \neq 0$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

5.12. Cho đa thức $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ với $a < b < c$.

Chứng minh rằng: $\frac{P''(a)}{P'(a)} + \frac{P''(b)}{P'(b)} + \frac{P''(c)}{P'(c)} = 0$.

Giải

Ta có: $P'(x) = P(x) \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \right)$ (1)

Do $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ nên theo định lý Rolle tồn tại d, e sao cho $a < d_1 < b < d_2 < c$ và $P'(d_1) = P'(d_2) = 0$ (2)

Lại có: $P''(x) = P'(x) \left(\frac{1}{x-d_1} + \frac{1}{x-d_2} \right)$ (3)

Từ (1) và (2), ta suy ra:
$$\begin{cases} P'(d_1) = P(d_1) \left(\frac{1}{d_1-a} + \frac{1}{d_1-b} + \frac{1}{d_1-c} \right) = 0 \\ P'(d_2) = P(d_2) \left(\frac{1}{d_2-a} + \frac{1}{d_2-b} + \frac{1}{d_2-c} \right) = 0 \end{cases}$$

Do $P(d_1) \neq 0, P(d_2) \neq 0$ nên ta có được:

$$\begin{cases} \frac{1}{d_1-a} + \frac{1}{d_1-b} + \frac{1}{d_1-c} = 0 \\ \frac{1}{d_2-a} + \frac{1}{d_2-b} + \frac{1}{d_2-c} = 0 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\frac{P''(a)}{P'(a)} + \frac{P''(b)}{P'(b)} + \frac{P''(c)}{P'(c)} = \frac{1}{d_1-a} + \frac{1}{d_2-a} + \frac{1}{d_1-b} + \frac{1}{d_2-b} + \frac{1}{d_1-c} + \frac{1}{d_2-c} = 0.$$

5.13. Chứng minh rằng mỗi đa thức bất kỳ đều có thể biểu diễn được dưới dạng hiệu của hai đa thức đồng biến.

Giải

Giả sử $P(x)$ là đa thức bất kỳ. Khi đó $P'(x)$ cũng là một đa thức.

Ta có phân tích sau đây:

$$P'(x) = \frac{1}{2} [P'^2(s) + P'(s) + 1] - \frac{1}{2} [P'^2(s) - P'(s) + 1].$$

Vì $P'^2(x) \pm P'(x) + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_0^x [P'^2(s) + P'(s) + 1] ds + \frac{1}{2} P(0)$$

$$R(x) = \frac{1}{2} \int_0^x [P'^2(s) - P'(s) + 1] ds - \frac{1}{2} P(0)$$

là hai đa thức đồng biến. Hơn nữa $P(x) = R(x) - Q(x)$.

Vậy ta đã hoàn thành việc chứng minh kết luận này.

5.14. Tìm đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện: $P(0) = 0$, $P(x^2 + 1) = P^2(x) + 1$.

Giải

Xây dựng dãy số (x_n) như sau: $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

Chứng minh quy nạp: (x_n) tăng thực sự và có vô số số hạng phân biệt.

Ta có: $P(x_n^2 + 1) = P^2(x_n) + 1 \Rightarrow P(x_n) = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Xét đa thức $Q(x) = P(x) - x$.

$$Q(x_n) = P(x_n) - x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó $Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = x$. Thử lại thấy đa thức $P(x) = x$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $P(x) = x$ là đa thức cần tìm.

5.15. Cho P và Q là hai đa thức dương trên $\mathbb{R}^+$. Tìm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2011}} \int_0^x \frac{P(s)}{Q(s)} ds$.

Giải

Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2011}} \int_0^x \frac{P(s)}{Q(s)} ds = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{P(x)}{Q(x)}}{2011x^{2010}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln P(x) - \ln Q(x)}{2011x^{2010}} = 0.$$

5.16. Cho P(x) là một đa thức bậc $n \geq 1$ với hệ số thực và có n nghiệm thực. Chứng minh rằng: $(n-1)P'^2(x) \geq nP(x)P''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Giải

+ Nếu $n = 1$ thì khẳng định trên luôn đúng.

+ Nếu $n \geq 2$, gọi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các nghiệm của đa thức P(x).

Khi đó với $x = \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$ thì khẳng định trên hiển nhiên đúng.

Bây giờ, giả sử $x \neq \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$ ta có :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \quad ; \quad \frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{2}{(x - \lambda_k)(x - \lambda_l)}.$$

Do đó :

$$\begin{aligned} (n-1) \left(\frac{P'(x)}{P(x)} \right)^2 - n \frac{P''(x)}{P(x)} &= (n-1) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \right)^2 - n \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{2}{(x - \lambda_k)(x - \lambda_l)} \\ &= (n-1) \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x - \lambda_k} \right)^2 + 2 \left(\sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{1}{(x - \lambda_k)(x - \lambda_l)} \right) \right] - n \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{2}{(x - \lambda_k)(x - \lambda_l)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n-1}{(x - \lambda_k)^2} + 2(n-1) \left(\sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{1}{(x - \lambda_k)(x - \lambda_l)} \right) - n \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{2}{(x - \lambda_k)(x - \lambda_l)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n-1}{(x - \lambda_k)^2} - \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{2}{(x - \lambda_k)(x - \lambda_l)} = \sum_{1 \leq k < l \leq n} \left(\frac{1}{x - \lambda_k} - \frac{1}{x - \lambda_l} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (n-1) \left(\frac{P'(x)}{P(x)} \right)^2 - n \frac{P''(x)}{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow (n-1)P'^2(x) \geq nP(x)P''(x).$$

5.17. Cho P(x) là đa thức bậc n với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt khác 0. Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức $x^2P''(x) + 3xP'(x) + P(x)$ là thực và phân biệt.

Giải

Đặt $Q(x) = xP(x)$.

Vì các nghiệm của $P(x)$ là thực phân biệt khác 0 nên các nghiệm của $Q(x)$ cũng là thực phân biệt. Theo định lý Rolle suy ra các nghiệm của $Q'(x)$ là thực phân biệt.

Đặt $R(x) = xQ'(x)$, suy ra các nghiệm của $R(x)$ là nghiệm thực phân biệt.

Do đó các nghiệm của đa thức $R'(x) = x^2P''(x) + 3xP'(x) + P(x)$ là thực phân biệt.

5.18. Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1.

Xét đa thức $Q(x) = (x^2 + 1)P(x)P'(x) + x[P^2(x) + P'^2(x)]$.

Chứng minh rằng đa thức $Q(x)$ có $2n - 1$ nghiệm thực phân biệt.

Giải

Ta có : $Q(x) = [P'(x) + xP(x)][xP'(x) + P(x)]$.

$$\text{Nhận xét : } \begin{cases} P'(x) + xP(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} P(x) \right)' \\ xP'(x) + P(x) = (xP(x))' \end{cases}$$

Gọi các nghiệm của $P(x)$ là : $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Theo định lý Rolle,

$P'(x) + xP(x)$ có $n - 1$ nghiệm y_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$ thỏa:

$1 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < y_{n-1} < x_n$ và $xP'(x) + P(x)$ có n nghiệm t_k thỏa :

$0 < t_1 < x_1 < t_2 < x_2 < \dots < t_n < x_n$.

Nếu $y_k \neq t_{k+1} \forall k$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Giả sử tồn tại k sao cho $y_k = t_{k+1} = q$.

Khi đó : $P'(q) + qP(q) = 0 = qP'(q) + P(q) \Rightarrow P'(q) = -qP(q)$, thay vào đẳng

thức thứ hai ta được : $(q^2 - 1)P(q) = 0$. Mặt khác $p = y_k > 1$ suy ra : $P(q) = 0$

nhưng lại có : $x_k < q < x_{k+1}$. Điều này mâu thuẫn.

5.19. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện :

$P(e^x) = P(x^{2011})$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

Từ giả thiết suy ra : $P(e^{2011\sqrt{x}}) = P(x) \forall x > 0$.

Đặt $u_0 = 1$, $u_n = e^{2011\sqrt{u_{n-1}}}$, $n \geq 1$.

Khi đó (u_n) là dãy tăng và $P(u_n) = P(u_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra $P(x) = C$.

5.20. Cho đa thức lượng giác $P(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ thỏa mãn điều kiện

$$|P(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Chứng minh rằng : } |P'(x)| \leq n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải

Cho $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

$$\text{Đễ thấy : } Q(x) = \frac{P(a+x) - P(a-x)}{2} = \sum_{k=1}^n c_k \sin kx$$

$$\text{Suy ra : } Q'(x) = \frac{P'(a+x) - P'(a-x)}{2} \quad \text{và } Q'(0) = P'(a).$$

$$\text{Ta chứng minh } |Q'(0)| \leq n. \text{ Thật vậy } |Q(x)| \leq \frac{|P(a+x)| + |P(a-x)|}{2} \leq 1.$$

$$\text{Nhận xét : } \left| \frac{Q(x)}{\sin x} \right| \leq n \quad \forall x \neq \{ \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots \}$$

(nhận xét này tôi dành cho bạn đọc tự kiểm tra).

$$\text{Hơn nữa } Q(0) = 0 \text{ và } \left| \frac{Q(x) - Q(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin x} \right| \leq n.$$

Khi $x \rightarrow 0$ ta thu được $|Q'(0)| \leq n$ hay $|P'(a)| \leq n$. Vì a được lấy bất kỳ nên ta suy ra : $|P'(x)| \leq n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

C-MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

5.21. Cho P là một đa thức bậc n thỏa mãn: $\int_0^1 x^k P(x) dx = 0 \quad , k = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_0^1 P^2(x) dx = (n+1)^2 \left(\int_0^1 P(x) dx \right)^2.$$

5.22. Tìm một đa thức bậc nhỏ nhất, đạt giá trị cực tiểu là 2 tại điểm $x_1 = 3$ và đạt giá trị cực đại là 6 tại điểm $x_2 = 1$.

$$\textbf{5.23.} \text{ Cho đa thức } P(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

có giá trị không âm với mọi x .

5.24. Cho đa thức $P(x)$ với $\deg P = n$ và $P(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng :

$$\sum_{k=0}^n P^{(k)}(x) \geq 0.$$

5.25. Cho đa thức: $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ thỏa mãn điều kiện: $n(n-1)P(x) = (x-x_1)(x-x_2)P''(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và có các nghiệm thực trên $[x_1, x_2]$ thì các nghiệm ấy có thể xếp thành cặp đối xứng nhau qua $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

5.26. Giả sử $Q(x)$ là đa thức với hệ số thực và có bậc lớn hơn và bằng 1. Chứng minh rằng chỉ có một số hữu hạn các giá trị của m sao cho

$$\int_0^m Q(x) \sin x dx = \int_0^m Q(x) \cos x dx = 0.$$

5.27. Giả sử $Q(x)$ là đa thức không có nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) + \frac{Q''(x)}{2!} + \frac{Q^{(4)}(x)}{4!} + \frac{Q^{(6)}(x)}{6!} + \dots + \frac{Q^{(2n)}(x)}{(2n)!} + \dots$$

cũng không có nghiệm thực.

5.28. Cho đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$ có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng :

a) $2011P(x) - 2012P'(x) = 0$ có n nghiệm thực phân biệt.

b) $\frac{n-1}{2n}a_1^2 > a_0a_2.$

5.29. Cho đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh tập hợp nghiệm của bất phương trình : $\frac{P'(x) - 2011P(x)}{P(x)} > 0$ là một số khoảng có tổng

độ dài bằng $\frac{n}{2011}.$

5.30. Cho đa thức $P(x)$ bậc $n > 1$ có n nghiệm thực phân biệt λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{P'(\lambda_1)} + \frac{1}{P'(\lambda_2)} + \dots + \frac{1}{P'(\lambda_n)} = 0.$

CHƯƠNG 6

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ NHỮNG GỢI Ý VỀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

6.1. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x+19) \leq f(x)+19$ và $f(x+94) \geq f(x)+94$ với mọi x . Chứng minh rằng: $f(x+1) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Gợi ý

Bước 1: Chứng minh bằng quy nạp với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$f(x+19n) \leq f(x)+19n, \quad f(x+94n) \geq f(x)+94n$$

$$f(x-19n) \geq f(x)-19n, \quad f(x-94n) \leq f(x)-94n.$$

Bước 2: Chứng minh $f(x)+1 \leq f(x+1) \leq f(x)+1$.

6.2. Cho f liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trong khoảng $(a;b)$ và

$$f(a) = f(b) = 0. \text{ Chứng minh rằng tồn tại } c \in (a;b) \text{ sao cho: } f'(c) = f^{2011}(c).$$

Gợi ý

Áp dụng định lý Rolle cho hàm số: $g(x) = e^{-\int_a^x f^{2010}(t)dt} f(x)$.

6.3. Có hay không một hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2 \text{ với } x, y \in \mathbb{R} ?$$

Gợi ý

Bước 1: Chọn các giá trị thích hợp của x, y thay vào điều kiện bài toán để thu được: $|f(\pi)+2| < 2$; $|f(\pi)-2| < 2$.

Bước 2: Sử dụng bất đẳng thức tam giác để dẫn đến một điều mâu thuẫn với giả thiết. Khi đó ta kết luận được không tồn tại hàm số nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

6.4. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f^2(x) = \int_0^x (f^2(t) + f'^2(t))dt + 2011$$

Gợi ý

Lấy đạo hàm hai vế.

6.5. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $|f(a) - f(b)| < |a - b| \quad \forall a \neq b$. Chứng minh rằng nếu $f(f(f(0))) = 0$ thì $f(0) = 0$.

Gợi ý

Bước 1: Viết lại điều kiện đối với hàm $f(x)$: $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$

Bước 2: Đặt $x = f(0)$, $y = f(x)$. Khi đó $f(y) = 0$.

Áp dụng bất đẳng thức trên liên tiếp ta thu được $x = y = 0$. Suy ra $f(0) = 0$.

6.6. Cho f xác định trên $[0;1]$ thỏa mãn: $f(0) = f(1) = 0$ và

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in [0,1].$$

Chứng minh rằng: phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm trên đoạn $[0,1]$.

Gợi ý

Chứng quy quy nạp $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

6.7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x))f(x) = 1 \quad \forall x \text{ và } f(1000) = 999. \text{ Hãy tính } f(500).$$

Gợi ý

Xét hàm số: $g(x) = f(x) - 500$ và sử dụng định lý giá trị trung gian để đi đến

$$f(500) = \frac{1}{500}.$$

6.8. Tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ ta có:

$$f(xy) = \max\{f(x), y\} + \min\{f(y), x\}?$$

Gợi ý

Thay $x = y = 1$ vào điều kiện bài toán sẽ xảy ra một điều vô lý.

6.9. Chứng minh rằng hàm số: $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{ds}{\ln s} \quad (x > 1)$ là đơn điệu và tìm tập

giá trị của nó.

Gợi ý:

+ Chứng minh đơn điệu thì hoàn toàn đơn giản

+ Để tìm tập giá trị của hàm $g(x)$ ta làm như sau:

Bước 1: Chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Bước 2: Đổi biến $s = e^t$ cho tích phân trên, tìm cách đưa về dạng toán tìm giới hạn hàm số bằng định lý kẹp để chứng minh được $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \ln 2$.

Từ đó, ta có tập giá trị của hàm số trên là: $T = (\ln 2, +\infty)$.

6.10. Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho tồn tại $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ để

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, c) \text{ và } f(x) < 0 \quad \forall x \in \left(c, \frac{\pi}{2}\right).$$

Chứng minh rằng:

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx \right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx \right)^2 > 0.$$

Gợi ý: Chứng minh phản chứng.

6.11. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ khả vi đến cấp hai và $f^2(0) + f'^2(0) > 2$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ để $f(x_0) + f''(x_0) = 0$.

Gợi ý

Bước 1: Xét hàm $g(x) = f^2(x) + f'^2(x)$, chứng minh $g(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = x_0$.

Bước 2: Chứng minh $f'(x_0) \neq 0$.

6.12. Cho $f(x)$ liên tục trên $[2011, +\infty)$ và thỏa $\int_{2011}^t f^2(x) dx < \frac{1}{3}(t^3 - 2011^3)$ với

mọi $t > 2011$. Chứng minh rằng: $\int_{2011}^s f(x) dx < \frac{1}{2}(s^2 - 2011^2)$ với $s > 2011$.

Gợi ý

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

6.13. Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0)f'(x_0) + f''(x_0) = 0$. Thử tìm một hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gợi ý

Sử dụng định lý Rolle đối với hàm $g(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + f'(x)$.

6.14. Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả vi liên tục trên $[0, 1]$,

$f(0) = 0$, $0 < f'(x) \leq 1$. Chứng minh rằng: $\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx$.

Gợi ý

Xét hàm số $g(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$ và sử dụng “khéo léo” tính đơn điệu của hàm số.

6.15. Chứng minh rằng với $n = 2, 3, 4, \dots$ hàm số $\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{k=2}^n a_k \cos kx$ với $|a_0| < 1$ nhận giá trị dương cũng như giá trị âm trong chu kỳ $[0, 2\pi)$.

Gợi ý:

Hãy tìm cách chứng minh $\int_0^{2\pi} \varphi(x)(1 \pm \cos x) dx = \pi(a_0 \pm 1)$. Khi đó bạn đã gần đến “đích”.

6.16. Cho a, b là các số dương sao cho $\alpha + \beta < 1$ và $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ là hàm không giảm và $\int_0^x f(s) ds = \int_0^{\alpha x} f(s) ds + \int_0^{\beta x} f(s) ds \quad \forall x \geq 0$. Chứng minh rằng: $f(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$.

Gợi ý

Bước 1: Đổi biến cho hai tích phân ở vế phải của đẳng thức đã cho để quy về dạng như sau: $\int_0^x [f(s) - \alpha f(\alpha s) - \beta f(\beta s)] ds = 0 \quad \forall x \geq 0$.

Bước 2: Sử dụng tính chất đơn điệu, liên tục của hàm số để đi đến kết luận.

6.17. Giả sử hệ số của x^{2012} trong chuỗi lũy thừa $(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \dots$ là $\varphi(\lambda)$.

Hãy tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \left(\varphi(-s-1) \sum_{k=1}^{2010} \frac{1}{t+k} \right) ds$.

Gợi ý

Bước 1: Khai triển Maclaurin cho $(1+x)^{-s-1}$.

Bước 2: Thay vào $\varphi(-s-1) \sum_{k=1}^{2010} \frac{1}{t+k}$. Lấy đạo hàm của hàm tích rồi lấy tích phân ta thu được $I = 2012$.

6.18. Cho $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ là hàm liên tục, đơn điệu giảm.

Chứng minh: $\int_0^1 \varphi(x) dx \int_0^1 x \varphi^2(x) dx = \int_0^1 x \varphi(x) dx \int_0^1 \varphi^2(x) dx$.

6.19. Cho $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ là các ánh xạ lên; hàm số $\varphi(x) - \psi(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) \quad \forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng phương trình $\varphi(x) - \psi(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in [a, b]$.

Gợi ý

Kết luận bài toán có thể chuyển đổi ngôn ngữ như sau: “Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ ”.

Bước 1: Phản chứng (Giả sử $\varphi(x) \neq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$).

Xét hàm số: $\eta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. Khi đó có thể giả thiết rằng:

$$\eta(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Bước 2: Lấy một điểm λ bất kỳ thuộc $[a, b]$, hãy tìm cách chứng minh:

$$\eta^n(\lambda) = \underbrace{\eta_o \eta_{o \dots o}}_n \eta(\lambda) \geq n \cdot \min_{x \in [a, b]} \eta(x).$$

Bước 3: Đánh giá để đưa đến điều mâu thuẫn sau đây:

$b - a \geq \eta^n(\lambda) \geq n \cdot \min_{x \in [a, b]} \eta(x)$ để hoàn thành chứng minh. Thế nhưng vấn đề là

chúng ta hãy chỉ ra được tại sao “ $b - a \geq \eta^n(\lambda) \geq n \cdot \min_{x \in [a, b]} \eta(x)$ ” là một điều mâu thuẫn?

6.20. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý

Cần chuyển đổi qua ngôn ngữ dãy số. Xem xét hai trường hợp sau đây:

$$+ \quad u_1 = b \quad \left(0 \leq b \leq \frac{1}{2} \right), \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$$+ \quad u_1 = b \quad \left(b > \frac{1}{2} \right), \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{1}{4}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Qua hai trường hợp này cần lập luận để chứng minh $f(x)$ là một hàm hằng.

6.21. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x)) = e^{-x^{2011}}.$$

Gợi ý

Chỉ cần chứng minh $f(f(x))$ là hàm đồng biến là ta nhận được sự mâu thuẫn với giả thiết bài toán. Vậy không tồn tại hàm số $f(x)$ nào cả.

6.22. Cho $a \in \mathbb{R}$ và hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh f là hàm tuần hoàn. Trong trường hợp $a = 1$, hãy cho ví dụ minh họa về một hàm số như vậy.

Gợi ý

Tìm cách chứng minh $f(x+2a) = f(x)$.

6.23. Tìm hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x+y) \geq f(x)f(y) \geq e^{2011(x+y)}$.

Gợi ý

Cho x, y các giá trị thích hợp để chứng minh được $e^{2011x} \leq f(x) \leq e^{2011x}$.

6.24. Tìm tất cả các số $d \in [0,1]$ có tính chất: Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục tùy ý, xác định với $x \in [0,1]$, ngoài ra $f(0) = f(1)$ thì tồn tại số $x_0 \in [0,1-d]$ sao cho $f(x_0) = f(x_0 + d)$.

Gợi ý

Hãy tìm cách chứng minh rằng $d = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Những giá trị còn lại của d không thỏa mãn.

Bước 1: Xét $d = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

+ Trường hợp $k = 1$ là hiển nhiên

+ Trường hợp $k > 1$, ta xét hàm số sau: $g(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x)$ trên đoạn

$\left[0, \frac{k-1}{k}\right]$ rồi chứng minh có một số x_0 thuộc đoạn này sao cho

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{k}\right).$$

Bước 2: Các trường hợp còn lại của d , ta chứng minh để dẫn đến điều vô lý rằng: $f(x) \neq f(x+d) \forall x \in [0,1-d]$.

6.25. Chứng minh phương trình:

$^{2011}\sqrt{3} \sin x + 9^{2011}\sqrt{2} \sin 3x = 25^{2011}\sqrt{3} \sin 5x + 49^{2011}\sqrt{2} \sin 7x$ có ít nhất 7 nghiệm trên đoạn $[0, 2\pi]$.

Gợi ý

Xét hàm số sau: $f(x) = ^{2011}\sqrt{3} \sin x + ^{2011}\sqrt{2} \sin 3x - ^{2011}\sqrt{3} \sin 5x - ^{2011}\sqrt{2} \sin 7x$.

Để ý rằng $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f(2\pi) = 0$. Điều này gợi ý chúng ta sử dụng 2 lần định Rolle để đi đến đích của bài toán.

6.26. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $f(x+2011) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ tại mọi điểm xác định của $f(x)$. Chứng minh $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Gợi ý

Chứng minh: $f(x+4022) = -\frac{1}{f(x)}$. Từ đó suy ra: $f(x+8044) = f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 8044.

6.27. Tìm tất cả các hàm số $f: \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$2010f(x) - \frac{2011}{2012}f\left(\frac{x}{2013}\right) = 2013x^{2014} \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right].$$

Gợi ý

Xét hàm số: $g(x) = f(x) - \frac{2010.2012.2013^{2014}}{2010.2012.2013^{2014} - 2011}x^{2014}$.

Sử dụng các tính chất của giới hạn và hàm liên tục để chứng minh

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right].$$

6.28. Tìm hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa $f(f(x)) + f(x) = 2011.2012x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.
($\mathbb{R}^+ = \{x: x \geq 0\}$)

Gợi ý

Xây dựng dãy số $u_0 = x, u_1 = f(x), \dots, u_{n+1} = f(u_n)$.

6.29. Cho hàm số $f: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)) + 2011f(x) = 2012.4023x. \text{ Hãy tìm } \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{f\left(f\left(\dots f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\dots\right)\right)}_{2011}.$$

Gợi ý

Phương pháp giải giống như **6.28**, ta tìm được hàm $f(x)$. Khi đã có hàm $f(x)$ một cách cụ thể thì việc tìm giới hạn không có gì khó khăn.

6.30. Cho hàm số $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Hãy chứng minh rằng

$$\text{tồn tại dãy } (u_k), k=1,2,\dots,2011 \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} 0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2011} \leq 1 \\ \prod_{k=1}^{2011} f'(u_k) \geq 1 \end{cases}.$$

Gợi ý

Từ giả thiết bài toán, chúng ta thấy f tăng và liên tục trên $[0,1]$,

$$f(0) = 0, f(1) = 1.$$

Bước 1: $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ liên tục nên tồn tại (v_k) sao cho:

$$0 = v_0 < v_1 < v_2 < \dots < v_{2011} = 1 \text{ và } f(v_k) = \frac{k}{2011}, k = 0, 1, \dots, 2011.$$

Bước 2: Áp dụng định lý Lagrange trên các đoạn $[v_{k-1}, v_k]$ rồi cộng vế theo vế

$$\text{của 2011 đẳng thức ta dẫn đến điều như sau: } \sum_{k=1}^{2011} \frac{1}{f'(u_k)} = 2011 \quad (*)$$

Bước 3: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2011 số dương ta được:

$$\sum_{k=1}^{2011} \frac{1}{f'(u_k)} \geq \frac{2011}{\sqrt[2011]{\prod_{k=1}^{2011} f'(u_k)}} \quad (**).$$

Từ (*) và (**) ta suy ra điều phải chứng minh.

6.31. Cho $f(x)$ là một hàm thực liên tục thỏa mãn điều kiện:

$$f(2x^2 - 1) = 2xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Chứng minh rằng: } f(x) = 0 \text{ trên đoạn } [-1,1].$$

Gợi ý

Lược giác hóa bài toán (bằng cách đặt $x = \cos t$).

6.32. Gọi X là tập các số thực không âm. Cho $f : X \rightarrow X$ là hàm bị chặn trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$f(x)f(y) \leq x^2 f\left(\frac{y}{2}\right) + y^2 f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \text{ Chứng minh rằng: } f(x) \leq x^2.$$

Gợi ý

Bước 1: Cho $x = y = 0$, ta chứng minh được: $f\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{f^2(x)}{2x^2}$.

Đặt $f(x) = k$ lặp lại vài lần ta được:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{k^4}{2x^6}, f\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{2k^8}{x^{14}}, f\left(\frac{x}{16}\right) = \frac{128k^{16}}{x^{30}}.$$

Bước 2: Chứng minh nếu $k > x^2$ thì $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \geq 2^m x^2$ với $m = 2^n - 2n - 1$.

Từ đó ta có được điều phải chứng minh.

6.33. Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lồi, $(a, b, c) \in I^3$ sao cho $a < b < c$.

Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $\det A \geq 0$.

Gợi ý

$\det A \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f$ lồi. Như vậy khẳng định trên luôn đúng.

6.34. Cho hàm số $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi sao cho $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in [-1, 1]$ sao cho $f'(c) = 0$.

Gợi ý

Tìm cách chứng minh $f(c) = \inf_{x \in [-1+\lambda, 1+\mu]} f(x)$ $\lambda, \mu \in (0, 1]$.

Vì $0 \in [-1+\lambda, 1+\mu]$ nên $f(c) \leq f(0)$. Điều này chứng tỏ rằng $\forall x \in [-1, 1]$ f có một cực tiểu địa phương tại c . Vậy $f'(c) = 0$.

6.35. Cho hàm số f khả vi trên $[0, 2010]$, $f(0) = 0$ và $f(x) > 0$ với mỗi

$x \in (0, 2010)$. Chứng minh rằng phương trình $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2012}{2011} \frac{f'(1-x)}{f(1-x)}$ có

nghiệm thuộc $(0, 2010)$.

Gợi ý

Áp dụng định lý Rolle cho hàm $g(x) = f^{2011}(x) \cdot f^{2012}(2010 - x)$.

6.36. Cho hàm f liên tục trên $[a, b]$ ($0 < a < b$), khả vi trên (a, b) . Chứng minh rằng tồn tại các số $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ sao cho

$$12f'(c_1) = 3(a+b)\frac{f'(c_2)}{c_2} + 2(a^2 + ab + b^2)\frac{f'(c_3)}{c_3^2}.$$

Gợi ý

Bước 1: Sử dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[a, b]$.

Bước 2: Sử dụng định lý Cauchy cho cặp hàm f và $g(x) = x^2$ trên $[a, b]$

Bước 3: Sử dụng định lý Cauchy cho cặp hàm f và $h(x) = x^3$ trên $[a, b]$.

Từ kết quả trên chúng ta dễ dàng suy ra được điều phải chứng minh.

6.37. Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

(i) f tăng trên $[0, 1]$

(ii) f khả vi trên $(0,1]$ và f' giảm trên $(0,1]$. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} f'\left(\frac{1}{k}\right)$ $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) hội tụ.

Bước 1: Dựa vào (i) để chứng minh (u_n) tăng.

Bước 2: Sử dụng định lý Lagrange cho hàm f trên đoạn $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ ($k \in \mathbb{N}$).

Bước 3: Tìm cách đánh giá kết quả thu được ở bước 2 để chứng minh (u_n) bị chặn trên bởi $2(f(1) - f(0))$.

6.38. Tìm a sao cho tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^a \int_0^x \frac{s}{\ln^2 s} ds$ và khi đó tính giới hạn này.

Gợi ý

Khai triển $\frac{s}{\ln^2 s}$ theo lũy thừa của $1-s$.

6.39. Cho biết hàm số $\varphi(x)$ có đạo hàm tại mọi cấp trên khoảng $(-1,2)$ và $\varphi^{(k)}(0) \neq 0 \forall k=1,2,\dots$. Giả sử $0 < |x| < 1$ và với $n \in \mathbb{N}$ ta có công thức Taylor

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \dots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \quad 0 < \theta < 1.$$

Hãy tính $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$.

Gợi ý

Khai triển hàm $f(x)$ đến số hạng chứa x^{n+2} .

6.40. Cho đa thức lượng giác:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{2011} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad ; a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ thỏa}$$

$a_k^2 + b_k^2 = 1$ ($k=1,2,\dots,2011$). Chứng minh rằng: Nếu $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

thì $\frac{f(x) - 2011}{a_0} \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Gợi ý

Bước 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski để chứng minh $f(x) - 2011 \leq a_0$.

Bước 2: Chứng minh $a_0 > 0$.

6.41. Cho các hàm số $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục sao cho:

$\forall x \in [0, +\infty)$, $g'(x) > 0$ và $\frac{f}{g}$ là hàm đơn điệu. Ta ký hiệu

$$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^x f(s) ds$$

$$\psi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^x g(s) ds$$

Chứng minh $\frac{\varphi}{\psi}$ đơn điệu trên $(0, +\infty)$.

Gợi ý

Chứng minh $\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right)' \geq 0$ nếu $\frac{f}{g}$ là hàm tăng ; $\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right)' \leq 0$ nếu $\frac{f}{g}$ là hàm giảm.

$$\text{6.42. Tìm } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^s \ln s ds}{e^x \ln x}.$$

Gợi ý

$$\text{Chứng minh : } 0 \leq \left| \frac{\int_0^x e^s \ln s ds}{e^x \ln x} - 1 \right| \leq \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^s \ln s ds}{e^x \ln x} = 1.$$

$$\text{6.43. Với } \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+ \text{ cố định, hãy tính } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-\varepsilon} \int_x^{x+1} \sin(s^2) ds.$$

Gợi ý

Bước 1: Đổi biến $y = t^2$.

Bước 2: Tích phân từng phần rồi đánh giá để dụng định lý Kẹp.

6.44. Hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị cho hàm số sau đây:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{s^2}{s^2 + \sin^2 s} ds.$$

Gợi ý

Tương tự với cách thức khảo sát và vẽ đồ thị cho một hàm số ở THPT. Tuy nhiên, đối với loại hàm số có chứa dấu tích phân và biểu thức dưới dấu tích phân phức tạp như thế này đòi hỏi chúng ta phải có khả năng phân tích, đánh giá và tổng hợp nhiều kiến thức liên quan mới giải quyết tốt được.

6.45. Cho $a \in \mathbb{R}$, I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ sao cho $a \in I$ và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một

ánh xạ khả vi tại a . Hãy tìm $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^{2011}) - f(a + h)}{h}$.

Gợi ý

Bài này khá đơn giản, chỉ cần sử dụng định nghĩa đạo hàm.

6.46. Xét phương trình: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} + \dots + \frac{1}{x-k^2} + \dots + \frac{1}{x-n^2} = 0$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình này có nghiệm duy nhất thuộc $(0,1)$ ký hiệu là (u_n) . Chứng minh rằng dãy số (u_n) hội tụ.

Gợi ý

Xét hàm số: $f_n(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} + \dots + \frac{1}{x-k^2} + \dots + \frac{1}{x-n^2}$. Sau đó sử dụng đơn điệu, các định lý giá trị trung gian, định lý giá trị trung bình...

6.47. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, các hàm số $f_k(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ x $k=1, 2, \dots, n$ liên tục và không cùng bằng 0. Chứng minh rằng tồn tại

$g_k(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $k = 1, 2, \dots, n$ liên tục sao cho $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) g_k(x) \right) dx = 1$

Gợi ý

Đặt $h(x) = \sum_{k=1}^n f_k^2(x)$ $k=1, 2, \dots, n$; $h(x)$ liên tục, $h(x) > 0$. Vậy $\int_a^b h(x) dx > 0$.

Vậy lấy $g_k(x) = \frac{f_k(x)}{\int_a^b h(x) dx}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

6.48. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:

$$(i) f(1) = f(2) = 1; (ii) f(n) = f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + f\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right), n \geq 3, \text{ trong đó}$$

$[x]$ là phần nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Hãy tính: $S = f(1) + f(2) + \dots + f(2011)$.

Gợi ý

Chúng minh quy nạp: $f(2^t + k) = \begin{cases} 2^{t-1} + k, & 0 \leq k \leq 2^{t-1} \\ 2^t, & 2^{t-1} \leq k \leq 2^t \end{cases}$. Sau đó xét các giá

trị của $f(n)$.

6.49. Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(x) = f(4-x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Hãy tìm số ít nhất các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong đoạn $[-1000; 1000]$.

Gợi ý

Dựa vào giả thiết bài toán, tính vài giá trị đặc biệt, từ đó chúng ta rút ra quy luật $x_1 = 10k, x_2 = 10k + 4, k \in \mathbb{Z}$; là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

6.50. Cho hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(4x) + 2011f(x) = 2012f(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \text{ Chứng minh rằng tồn tại số thực } k > 1 \text{ để } f(x) = f(kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Gợi ý

Bước 1: Với mỗi $x \in \mathbb{R}^+$, đặt $f(2^n x) = u_n, n \in \mathbb{N}$. Sau đó chứng minh quy nạp: $u_{n+2} + 2011u_{n+1} - 2012u_n = 0$.

Bước 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) thỏa mãn công thức trên. Từ đó biện luận để suy ra được: $f(x) = f(2^n x), n \geq 1$. Tức là tồn tại $k = 2^n > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

6.51. Cho I là một khoảng và $f: I \rightarrow I$ là một hàm liên tục thỏa mãn điều kiện:

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_n = x. \text{ Chứng minh rằng: } f(f(x)) = x.$$

Gợi ý

Bước 1: Chứng minh $f(x)$ là một hàm đơn điệu (Chứng minh phản chứng)

Bước 2: Chia ra hai trường hợp tăng, giảm để chứng minh khẳng định bài toán.

Lưu ý rằng trong trường hợp hàm giảm cần phân chia trường hợp n chẵn, n lẻ.

6.52. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là một hàm liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$, khả vi trong khoảng $(a, +\infty)$ sao cho: $f(a) < 0$; $f'(x) > k > 0$ với $x > a$ với k là một hàm số nào đó thì tồn tại duy nhất một số c trong khoảng $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ sao cho $f(c) = 0$.

Gợi ý

Bước 1: Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên đoạn $\left[a, a + \frac{|f(a)|}{a}\right]$ để chứng minh sự tồn tại của số c sao cho $f(c) = 0$.

Bước 2: Sử dụng định lý Rolle để chứng minh tính duy nhất của số c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

6.53. Chứng minh rằng $f(x)$ khả vi trong đoạn $[0, 1]$, $f(0) = 0$ và $|f'(x)| \leq k|f(x)| \forall x \in [0, 1]$ trong đó k là một hằng số nào đó thì $f(x) \equiv 0$ trong đoạn $[0, 1]$.

Gợi ý

Phân chia 2 trường hợp $0 < k < 1$; $k > 1$ và sử dụng định lý Lagrange. Tuy nhiên không chỉ áp dụng trực tiếp định lý Lagrange mà chúng ta cần có sự đánh giá, sử dụng tính liên tục và giới hạn của dãy số-hàm số để đi đến kết quả. Và tất nhiên đây là một bài toán khó.

6.54. Giả sử $f(x)$ là một hàm xác định trong $(0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Chứng minh rằng $f(x)$ không liên tục đều trong khoảng $(0; +\infty)$.

Gợi ý

Chứng minh phản chứng. Lưu ý rằng: khi $f(x)$ liên tục đều trên $[0, +\infty)$ chúng ta phải chỉ ra được tồn tại các hằng số C, D sao cho $|f(x)| \leq C|x| + D$ để sự giả thiết phản chứng có hiệu quả hơn lúc nào hết.

6.55. Cho hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2x) = f\left(\sin \frac{x+y}{2} \pi\right) + f\left(\sin \frac{x-y}{2} \pi\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hãy tính $f(x_0)$ biết $x_0 = 2011 + \sqrt{2011} + \sqrt[3]{2011} + \dots + \sqrt[2011]{2011}$.

Gợi ý

Chứng minh $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó mọi chuyện sẽ đơn giản với chúng ta.

6.56. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)[f^2(x) - f(x)f(y) + f^2(y)] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có: $f(2011x) = 2011f(x)$.

Gợi ý

Chứng minh quy nạp: $f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$. Chọn $n = 2011$ là xong.

5.57. Cho hàm số: $f(x) = 1 - \frac{3}{9^x + 3}$.

Hãy tính tổng $S = \sum_{k=1}^{2011} \frac{k}{2012}$.

Gợi ý

Đề ý rằng: $f(x) + f(1-x) = 1$ (Bạn đọc tự kiểm tra điều này, không khó khăn lắm). Khi đó sẽ thấy việc tính tổng này không quá phức tạp lắm đâu.

5.58. Tìm tất cả các hàm $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ thỏa:

$$f(x^2 + xy + y^2) + f\left(\frac{(x-y)^2}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}(x^2 + y^2)\right) \quad \forall x, y \in [0, +\infty).$$

Gợi ý

Chứng minh: $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in [0, +\infty)$.

5.59. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$\left| \sum_{k=1}^n 2011^k (f(x+ky) - f(x-ky)) \right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Gợi ý

Dựa vào bất đẳng thức trên để chứng minh được:

$$|f(x+ny) - f(x-ny)| \leq \frac{2}{2011^n}. \text{ Đặt } x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2n}.$$

Khi đó: $|f(a) - f(b)| \leq \frac{2}{2011^n}$. Cho $n \rightarrow +\infty$ ta suy ra $f(a) = f(b)$ nghĩa là $f(x)$ là hàm hằng.

5.60. Cho hàm số dương f khả vi trên $[0;1]$. Chứng minh rằng bất phương trình: $\pi(f'(x) - f(x)) \leq f(1) - f(0)$.

Gợi ý

Áp dụng định lý Cauchy cho hai hàm : $\varphi(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$; $\psi(x) = \arctan x$.

5.61. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa :

$$C_n^0 f(x) + C_n^1 f(x^2) + \dots + C_n^n f(x^{2^n}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gợi ý

$$\text{Đặt } \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f(x^{2^k}).$$

Ta có :

$$(i) \quad \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad \varphi_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^k})$$

$$(iii) \quad \varphi_{n-1}(x^2) = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} f(x^{2^k})$$

(iv) $\varphi_{n-1}(x) + \varphi_{n-1}(x^2) = \dots = \varphi_n(x) = 0$ (điều này không đơn giản cần phải chứng minh).

Dựa vào tính liên tục của hàm f trên $\mathbb{R}$, ta xét các trường hợp :

$$x = 0 ; 0 < x < 1 ; x > 1 ; x < 0.$$

Cuối cùng chứng minh được $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

5.62. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn:

$$f(xy) + f(x-y) + f(x+y+1) = xy + 2x + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{và } g(x) = \frac{2011^{f(x)}}{2011^{f(x)} + \sqrt{2011}}. \text{ Hãy tính } S = g\left(\frac{1005}{2011}\right) + g\left(\frac{1006}{2011}\right).$$

Gợi ý

Bước 1: Chứng minh $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bước 2: Ta có: $x + y = 1$ thì $g(x) + g(y) = \dots = 1$ (Cần phải tính toán một tí)

Vậy $S = 1$.

Gợi ý

Áp dụng định lý Cauchy cho hai hàm $\varphi(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$; $\psi(x) = \arctan x$ trên đoạn $[0;1]$.

6.61. Cho $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ sao cho $e^{-x} f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ tăng thực sự.

Tìm m để bất phương trình: $\frac{\ln f(x)}{x} > m$ có nghiệm với mọi x đủ lớn.

Gợi ý

Xét các trường hợp $m < 1$; $m = 1$; $m > 1$. Cuối cùng tìm được $m \leq 1$.

6.62. Cho $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng phương trình:

$$(n+1)x^{n+2} - 3(n+2)x^{n+1} + 2011^{n+2} = 0.$$

Gợi ý

Xét sự biến thiên của hàm $f(x) = (n+1)x^{n+2} - 3(n+2)x^{n+1} + 2011^{n+2}$, ta chứng minh được $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

6.63. Giả sử $f(x)$ là một hàm liên tục sao cho với m nguyên bất kỳ thì

$$\int_0^1 f(x+m)dx = 0. \text{ Chứng minh rằng tìm được hàm liên tục } \varphi(x) \text{ sao cho :}$$

$$f(x) = \left(\int_0^x \varphi(s) \sin \pi s dx \right)''.$$

Gợi ý

$$\text{Xét hàm } g(x) = \int_0^x f(s)ds$$

Bạn đọc suy nghĩ để chứng minh $\lim_{x \rightarrow n} \frac{g(x)}{\sin \pi x} = \dots = \varphi(n) \frac{(-1)^n}{\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$?

6.64. Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ và $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho ước chung lớn nhất $(m, n) = 1$. Đặt $f^m = \underbrace{f_0 f_{0 \dots 0} f}_m$; $f^n = \underbrace{f_0 f_{0 \dots 0} f}_n$. Giả sử f^m, f^n liên tục

trên I . Chứng minh rằng f liên tục trên I .

Gợi ý

ƯCLN $(m, n) = 1$, có thể giả thiết p lẻ.

Vì f^m liên tục nên $f = \sqrt[m]{f^m}$ cũng liên tục.

Một cách làm khác là chúng ta có thể sử dụng ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$.

6.65. Cho $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho $f^{-1}(\{c\})$ không có đúng hai phần tử.

Gợi ý

Chứng minh phản chứng : Giả sử rằng mọi phần tử của $[0,1]$ đều có đúng hai điểm nguồn.

6.66. Chứng minh rằng $y = \arctan x$ khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$ và với mọi

$$n \in \mathbb{N}^*, x \in (0, +\infty) \text{ ta có: } (\arctan x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \arctan \frac{1}{x}\right).$$

Gợi ý

Chứng minh quy nạp.

6.67. Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$; $n, p, q \in \mathbb{N}$ sao cho: $0 \leq q \leq p$ và $0 \leq q \leq n$;

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi n lần trên I . Giả sử f có ít nhất p không điểm trong I . Chứng minh rằng: $f^{(q)}$ có ít nhất $p - q$ không điểm trong I .

Gợi ý

Theo giả thiết thì tồn tại $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,p} \in I$ sao cho: $\begin{cases} x_{0,1} < x_{0,2} < \dots < x_{0,p} \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, f_{0,i} = 0 \end{cases}$.

Áp dụng định lý Rolle trên các đoạn con của các điểm nêu trên.

6.68. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$, $f(x) \neq 0$ và $m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M$

$\forall x \in [a, b]$. Chứng minh bất đẳng thức tích phân Diaz :

$$\int_a^b g^2(x) dx + Mm \int_a^b f^2(x) dx \leq (M + m) \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Gợi ý

Từ giả thiết suy ra được : $0 \leq \left(\frac{g(x)}{f(x)} - m \right) \left(M - \frac{g(x)}{f(x)} \right) f^2(x) \forall x \in [a, b]$.

Từ đây lấy tích phân hai vế ta được điều phải chứng minh.

6.69. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$ và

$$\begin{cases} 0 < a \leq f(x) \leq A \\ 0 < b \leq g(x) \leq B \end{cases} \forall x \in [a, b]. \text{ Chứng minh bất đẳng thức G.Polya :}$$

$$\frac{(ab + AB)^2}{4abAB} \geq \frac{\int_a^b g^2(x) dx \int_a^b f^2(x) dx}{\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2} \geq \frac{4abAB}{(ab + AB)^2}.$$

Gợi ý

Sử dụng bất đẳng thức Diaz ở trên cùng với bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm.

6.70. Cho $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ là các hàm số dương và liên tục trên $[0, 1]$. Đặt

$u_k = \int_0^1 \varphi_k(x) dx$, $k = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho :

$$\prod_{k=1}^n \varphi_k(x_0) \leq \prod_{k=1}^n u_k.$$

Gợi ý

Chứng minh phản chứng. (Hãy để ý đến bất đẳng thức Cauchy cho n số không âm).

6.71. Cho f là hàm số không âm và tăng trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng với a, b

không âm thì : $\left(1 - \left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right) \int_0^1 x^{2a} f(x) dx \int_0^1 x^{2b} f(x) dx \geq \left(\int_0^1 x^{a+b} f(x) dx\right)^2$.

Gợi ý

Áp dụng bất đẳng thức tích phân **Schwarz**.

6.72. Chứng minh rằng nếu f là một hàm liên tục khả vi trên $[a, b]$ và

$m \leq f'(x) \leq M$ ($m < M$) $\forall x \in [a, b]$ thì :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) \right| \leq \frac{(f(b) - f(a) - m(b-a))(M(b-a) - f(b) + f(a))}{2(M-m)}.$$

Gợi ý

Sử dụng bất đẳng thức Steffensen cho hàm $g(x) = \frac{f'(x) - m}{M - m}$.

6.73. Giả sử $f \in C^{2n}([a, b])$ thỏa $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ với $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Chứng minh: nếu $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(2n)}(x)|$ thì $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(n!)^2 (b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!} M$.

Gợi ý

Đặt $P_n(x) = (x-a)^n (x-b)^n$. Lưu ý: $P_n^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

$P_n^{(k)}(a) f^{(2n-k-1)}(a) = P_n^{(k)}(b) f^{(2n-k-1)}(b) = 0$.

6.74. Cho dãy số $(u_n), (v_n)$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = 2010; u_1 = 2011; v_0 = v_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2011 \sqrt{\frac{u_n}{v_{n+1}}}^{2010}; v_{n+2} = 2011 \sqrt{\frac{v_n}{u_{n+1}}}^{2010} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại các giới hạn hữu hạn sau và tồn tại giới hạn đó:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1}?$$

Gợi ý

Nhận xét $u_n, v_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Bước 1: Đặt $w_n = \ln u_n - \ln v_n, n \in \mathbb{N}$.

Bước 2: Lập tỉ số $\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}$ để tìm công thức tổng quát của (w_n) .

Bước 3: Đặt $t_n = \ln u_n + \ln v_n$.

Bước 4: Lấy tích $u_{n+2}v_{n+2}$ để tìm công thức tổng quát của (t_n) .

Hoàn thành được những bước như trên xem như bài toán đã được giải quyết.

6.75. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $f(x)$ bậc 4 với hệ số hữu tỉ sao cho: $\min_{x \in [0,1]} f(x) = \sqrt{2}$.

Gợi ý

Giả sử tồn tại đa thức $f(x)$ bậc 4 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}: f(x_0) = \sqrt{2}$ và $f'(x_0) = 0$.

Ta chứng minh $x_0 = a + b\sqrt{2}$ $a, b \in \mathbb{Q}$ để dẫn đến điều mâu thuẫn với $\min_{x \in [0,1]} f(x) = \sqrt{2} \dots?$

6.76. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, khả vi trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \text{ Giả sử } f^2(x) + f'^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\sqrt{\frac{1 - \cos 2c}{1 + \cos 2c}} = \frac{f(c) + f'(c)}{f(c) - f'(c)}$.

Gợi ý

Sử dụng định lý Rolle cho hàm số: $g(x) = f(x)(\sin x + \cos x)$ trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6.77. Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho: $f(4x) + f(9x) = 2f(6x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Gợi ý

Bước 1 : Đặt $t = 6x$, ta thu được: $f\left(\frac{2}{3}t\right) + f\left(\frac{3}{2}t\right) = 2f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (1)$

Bước 2 : Đặt $g(t) = f(t) - f\left(\frac{3}{2}t\right)$. Dựa vào (1) ta thấy được

$$g(t) = g\left(\frac{2}{3}t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Bước 3 : Chứng minh quy nạp : $g(t) = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} , \forall n \in \mathbb{N} .$

và dựa vào tính liên tục suy ra được: $g(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ hay

$$f(t) = f\left(\frac{3}{2}t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} . \text{ Tức là: } f\left(\frac{2}{3}x\right) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Bước 4: Chứng minh quy nạp ta được: $f(x) = f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Và cũng dựa vào tính liên tục của hàm f suy ra: $f(x) = C \quad \forall x \in \mathbb{R} .$

6.78. Giả sử (u_n) là dãy số bị chặn trên và thỏa mãn:

$$u_{n+2} \geq \frac{1}{2011}u_{n+1} + \frac{2010}{2011}u_n , n \geq 1 .$$

Chứng minh rằng (u_n) là dãy số hội tụ.

Gợi ý

Đặt $v_n = \min\{u_n, u_{n+1}\}$. Chứng minh (v_n) hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n < +\infty$.

6.79. Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên $[0, 2]$ và $f(1) = 0$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_0^2 f'^2(x) dx \geq \frac{3}{2} \left[\int_0^2 f(x) dx \right]^2 .$$

Gợi ý

Sử dụng bất đẳng thức Schwarz về tích phân.

6.80. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi, thỏa mãn $f(0) = 0$,

$(1+x^2)f'(x) \geq 1 + f^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: f không có giới hạn hữu hạn tại vô cùng.

Gợi ý

$$\text{Đặt } g(x) = \arctan f(x) - \arctan x .$$

6.81. Cho hàm số $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng:

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 x^4 f(x) dx \leq \frac{4}{15} \int_0^1 f^2(x) dx.$$

Gợi ý

Sử dụng bất đẳng thức Schwarz về tích phân.

6.82. Cho $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ liên tục sao cho: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho: $f(c) = \int_0^c f(x) dx$.

Gợi ý

Bước 1: Xét hàm $F(x) = \int_0^x f(s) ds$ và sử dụng tích phân từng phần để tìm

được: $\int_0^1 F(x) dx = F(0) = 0$.

Bước 2: Sử dụng định lý Rolle cho hàm: $G(x) = e^{-x} \int_0^x F(s) ds$.

Bước 3: Lại sử dụng định lý Rolle cho hàm: $H(x) = F(x) - \int_0^x F(s) ds$.

6.83. Cho hàm số $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ khả tích sao cho: $\int_0^1 xf(x) dx = 0$. Chứng minh

rằng: $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4 \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$.

Gợi ý

Sử dụng bất đẳng thức Schwarz về tích phân.

6.84. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{6^k}{9 \cdot 3^k - 5 \cdot 6^k + 4 \cdot 2^k}$.

Gợi ý

Phân tích $\frac{6^k}{9 \cdot 3^k - 5 \cdot 6^k + 4 \cdot 2^k} = 6 \left(\frac{3^k - 2^k}{3^{k+1} - 2^{k+1}} - \frac{3^{k-1} - 2^{k-1}}{3^k - 2^k} \right)$.

6.85. Tìm hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2) dx.$$

Gợi ý

Biến đổi điều kiện để đưa về dạng: $\int_0^1 \left(f(x^2) - x \right)^2 dx = 0.$

6.86. Tìm hàm số $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\int_0^1 f(x)(x - f(x)) dx = \frac{1}{12}.$$

Gợi ý

Tương tự cách làm của bài **6.86.**

6.87. Cho n là số nguyên lẻ lớn hơn 1. Tìm tất cả các hàm số

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ thỏa mãn } \int_0^1 \left(f\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \right)^{n-k} dx = \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Gợi ý

Bước 1: Đổi biến $t = x^{\frac{1}{k}}$

Bước 2: Dựa vào các giả thiết bài toán đã cho để chứng minh

$$\int_0^1 \left(f(t) - t \right)^{n-1} dt = 0.$$

6.88. Cho $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1.$

Chứng minh rằng: $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4.$

Gợi ý

Xét hàm phụ $g(x) = 6x - 2$ đều thỏa mãn những điều kiện giống hệt với hàm f .

Khi đó, chúng ta có được: $\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 x(f(x) - g(x)) dx = 0.$ Dựa

vào điều này để giải quyết bài toán.

6.89. Cho $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$I(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx ; J(f) = \int_0^1 x f^2(x) dx. \text{ Hãy tìm giá trị lớn nhất của } I(f) - J(f).$$

Gợi ý

Bước 1: Cần thấy được sự phân tích sau đây:

$$x f^2(x) - x^2 f(x) = \left(\sqrt{x} f(x) - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2 - \frac{x^3}{4}. \quad (1)$$

Bước 2: Lấy tích phân hai vế của (1) trên $[0,1]$ và sử dụng bất đẳng thức.

6.90. Tìm tất cả các hàm số $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 2\sqrt{x^3 + 1} + 2} + \sqrt{x^3 - 6\sqrt{x^3 + 1} + 10}.$$

Gợi ý

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^3 + 1}.$$

6.91. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) hội tụ và tìm giới hạn.

Gợi ý

Chú ý đến công thức **Stirling**: $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$ với $0 < \theta_n < 1$.

$$\textbf{6.92.} \text{ Chứng minh rằng: } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1} dx = \frac{1}{2}.$$

Gợi ý

Sử dụng ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$.

6.93. Tìm tất cả các giá trị nguyên khác nhau của hàm số:

$$f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{3} \right] + [3x] + [4x] \text{ với tất cả các số thực } x \in [0;100].$$

Gợi ý

$$\text{Xét hàm } g(x) = [x] + [2x] + [3x] + [4x] \text{ ta có: } f(x) = g(x) + \left[\frac{5x}{3} \right].$$

Đến đây sử dụng các tính chất về phần nguyên để giải quyết bài toán.

6.94. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục và giảm sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$ ta có:

$$f(x+y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y))) + f(y + f(x)).$$

Chứng minh rằng: $f(f(x)) = x$.

Gợi ý

Bước 1: Thay $y = x$ ta được: $f(2x) + f(2f(x)) = f(2f(x + f(x)))$ (1)

Bước 2: Thay x bằng $f(x)$ ta được:

$$f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f(2f(f(x) + f(f(x)))) \quad (2)$$

Bước 3: Trừ vế theo vế của (2) cho (1) ta được một phương trình mới sau đó xét hai trường hợp $f(f(x)) > x$, $f(f(x)) < x$ đều dẫn đến một điều mâu thuẫn.

Vậy $f(f(x)) = x$.

6.95. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_0 = 0$ và

$$u_n = \begin{cases} u_{n-1} + \frac{3^{r+1} - 1}{2} & \text{khi } n = 3^r(3k+1) \\ u_{n-1} - \frac{3^{r+1} + 1}{2} & \text{khi } n = 3^r(3k+2) \end{cases}$$

với $k, r \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng trong dãy này, mỗi số nguyên xuất hiện đúng một lần.

Gợi ý

Chứng minh quy nạp theo $t \geq 1$ những mệnh đề như sau:

$$(i) \{u_0, u_1, \dots, u_{3^t-2}\} = \left\{ -\frac{3^t-3}{2}, -\frac{3^t-5}{2}, \dots, \frac{3^t-1}{2} \right\}$$

$$(ii) x_{3^t-1} = -\frac{3^t-1}{2}.$$

Dựa vào 2 mệnh đề trên ta suy ra được điều cần phải chứng minh.

6.96. Với $1 \leq n \in \mathbb{N}$, cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n.$$

Chứng minh: $u_{n+2} + u_n \geq 2 + \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Gợi ý

Bước 1: Chứng minh quy nạp $u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Do $u_n > 0, u_{n+1} > 0$ ta rút ra được: $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + 1}{u_n} > 0.$

Bước 2: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương.

6.97. Chứng minh rằng nếu: $\sum_{k=1}^n a_k \cos kx = 0 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$ thì phương trình:

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 = 0 \text{ có vô số nghiệm.}$$

Gợi ý

Chứng minh các hệ số $a_k = 0$ với $k = 1, 2, \dots, n$.

6.98. Giả sử $f(x)$ là hàm khả vi vô hạn lần, $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ và

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, x \in [0, +\infty). \text{ Chứng minh rằng :}$$

$$(-1)^k \left(\frac{1 - f(x)}{x} \right)^{(k)} \geq 0.$$

Gợi ý

$$\text{Chú ý phân tích } f(x) = f(0) + x \int_0^1 f'(\theta x) d\theta.$$

6.99. Giả sử $f(x)$ là hàm khả vi liên tục dương trên khoảng $(0, +\infty)$. Chứng

$$\text{minh rằng : } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + f'^2(x)}}{f(x)} dx = +\infty.$$

Gợi ý

Để thấy tích phân trên phân kỳ. Giả sử $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, tức $\exists$ dãy $x_n \rightarrow +\infty$ sao cho $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Đánh giá tích phân trên, ta được :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + f'^2(x)}}{f(x)} dx \geq \ln(f(x_n)) - \ln(f(0)) \rightarrow +\infty. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.}$$

6.100. Liệu có tồn tại hay không hàm $f(x)$ tăng, dương $\forall x \geq 0$ sao cho $\forall s \geq 0$

$$\text{thì : } \int_0^s f^2(x) dx \geq \left(\int_0^s f(x) dx \right)^2.$$

Gợi ý

Có tồn tại một hàm như thế. Chẳng hạn : $f(x) = e^{e^{x+1}} \cdot e^{x+1}$

Bạn đọc tự kiểm tra để thấy được nó là một hàm thỏa mãn đề toán.

CHƯƠNG 7 GIỚI THIỆU CÁC ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC TỪ 1993-2011 CỦA HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM PHẦN GIẢI TÍCH

7.1. NĂM 1993 (*Chỉ giới thiệu về những bài toán liên quan đến giải tích*)

Vòng 1 (Ngày thứ nhất)

Câu 2

a) Cho $f(x) = \max \left\{ 2a \times \arctan x, \frac{x}{x^2 + 1} \right\}$, $x \in \mathbb{R}$. Tìm một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$

Câu 3

a) Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm bậc hai liên tục và không đồng nhất bằng không trên bất kỳ đoạn nào của $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $ax + by + c = 0$ tại ba điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu qua $x = x_0$.

Vòng 2 (Ngày thứ hai)

Câu 2

Cho $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ và $0 \leq y < +\infty$. Chứng minh rằng:
 $y(\arctan y - x) \geq \ln(\cos x \sqrt{1 + y^2})$. Hỏi khi nào thì xảy ra dấu đẳng thức.

Câu 3

Cho $p(x)$ là đa thức (khác đa thức hằng) với hệ số thực. Chứng minh

rằng nếu hệ phương trình
$$\begin{cases} \int_0^x p(t) \sin t dt = 0 \\ \int_0^x p(t) \cos t dt = 0 \end{cases}$$
 có nghiệm thực thì số nghiệm

thực chỉ có thể là hữu hạn.

7.2. NĂM 1994

Câu 1. Cho n là số nguyên dương, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$). Chứng minh rằng

phương trình $x + \sum_{k=1}^n (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-\pi, \pi)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp một trên $(0; +\infty)$ và không phải là hàm hằng. Cho a, b là hai số thực thoả mãn điều kiện $0 < a < b$. Chứng minh rằng phương trình $xf'(x) - f(x) = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$ có ít nhất một nghiệm thuộc (a, b) .

Câu 3.

- a) Cho hàm số $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ với $a < b$ và thoả mãn điều kiện $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, $\forall x, y \in [a, b]$ và $x \neq y$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có duy nhất nghiệm thuộc đoạn $[a, b]$.
- b) Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ và với mọi $x \in [a, b]$ thì $|f'(x)| < |f(x)|$. Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Câu 4. Xét tích phân $I_n = \int_0^4 x^n \sqrt{4-x} dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

- a) Tính I_n .
- b) Chứng minh rằng $I_n < 2^{2n+3} (2ne)^{-\frac{1}{2}}$.

Câu 5. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \arctan x$ tại $x = 0$.

Câu 6.

- a) Chứng minh rằng tích phân $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ không phụ thuộc vào α .
- b) Tính $I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

7.3. NĂM 1995

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, b]$ và cho $a \in [0, b]$.

Chứng minh rằng $b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^b f(x) dx$.

Câu 2. Xét đa thức $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là đa thức bậc m ($m < n$) thì $\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = 0$.

Câu 3. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ khả vi vô hạn tại

$x = 0$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn các điều kiện

1) $\exists M > 0$ sao cho $|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

2) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng khi đó $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Câu 6. Tìm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

a) $f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

Câu 7. Tính tích phân $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx, n \in \mathbb{N}$.

7.4. NĂM 1996

Câu 1. Khảo sát tính khả vi của hàm số: $f(x) = |x-1||x-2|\dots|x-1996|$.

Câu 2. Cho $b \in \mathbb{R}$. Tính $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^b x)}$.

Câu 3. Chứng minh rằng tồn tại hàm $h(x)$ thoả mãn hai điều kiện sau (i)

$\sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \sqrt{x+1+h(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x+h(x)}}, \quad \forall x \geq 0;$ (ii) $\lim_{x \geq 0} h(x) = \frac{1}{4}$.

Câu 4. Cho $g(x)$ là một đa thức bậc 1996. Biết rằng ứng với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta đều có $g(x+h) = g(x) + g'(x+h\theta(x,h))$, trong đó $\theta(x,h)$ bị chặn và $g''(x) \neq 0$. Tính $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(x,h)$.

Câu 5. Cho $M > 0$ và hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M$. Chứng minh rằng $\forall x \in \mathbb{R}$ đều có giới hạn

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(nx)}{n}$.

7.5. NĂM 1997

Câu 1. Cho $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Xét hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx$.

Câu 2. Xác định tất cả các số dương a sao cho $a^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Chứng minh rằng với mọi $t \geq 0$, phương trình $x^3 + tx - 8 = 0$ luôn có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là $x(t)$. Tính tích phân $\int_0^t [x(t)]^2 dt$.

Câu 4. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \right)$.

Câu 5. Xác định các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$P(0) = P(1) = 0$, $\int_0^1 |P'(x)| dx = 1$. Chứng minh rằng $|P(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0, 1]$.

Câu 6. Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực (a_n) với $a_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\cos a_n = a_n$. Tìm giới hạn của dãy đó.

7.6. NĂM 1998

Câu 1. Cho $f(x) \in C^1[0, 1]$ và $f(0) = 0$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt.$$

Câu 2. Cho $f(x)$ là một hàm khả vi liên tục và dương trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chứng minh rằng nếu một trong hai hàm số:

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{f(t) + f'(t)}, \quad G(x) = \int_1^x \frac{dt}{f(t)}$$

có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow +\infty$ thì hàm số còn lại cũng có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow +\infty$

Câu 3. Giả sử a, b là hai số dương và $a < b$. Chứng minh rằng hàm số

$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ là hàm đơn điệu tăng. Tìm giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow \pm\infty$.

Câu 4. Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$, $f(0) > 0$ và $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{1998} \quad \forall x > 0$.

Chứng minh rằng phương trình $x^{1997} = f(x)$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có các tính chất:

$$0 < f(x) < 1 \quad \forall x > 0 \quad ; \quad f(x+h)[1-f(x)] \geq \frac{1}{4} \quad \forall h > 0.$$

Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

7.7. NĂM 1999

Câu 1.

a) Xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0$$

b) Xác định hàm $p(x)$ thỏa mãn điều kiện: $\exists g(x)$ sao cho:

$$p(x+\Delta x) - p(x) = g(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó $|\alpha(x, \Delta x)| \leq c|\Delta x|^3$, $0 < c = \text{const}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$f(0) = 0, f(1) = 1, 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\exists a, b \in (0,1), a \neq b$ sao cho $f'(a) \cdot f'(b) = 1$.

Câu 3. Cho hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\text{a) } f(1) = 2 \quad \text{b) } f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n), \quad \forall n > 1.$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 f(n)$.

Câu 4. Giả sử $q(x)$ là hàm số dương và đơn điệu tăng trong $(0; +\infty)$ sao cho

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{q(2t)}{q(t)} = 1. \text{ Chứng minh rằng: } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{q(2000t)}{q(1999t)} = 1.$$

Câu 5. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-\frac{x}{n}}}$.

7.8. NĂM 2000

Câu 1. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy; x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 2. Cho hàm số $g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và khả vi trong khoảng $(0;1)$ và thỏa mãn các điều kiện $g(0) = g(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = g(c)$.

Câu 3. Cho $a \in (0,1)$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ thỏa mãn điều kiện: $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $b \in [0,1]$ sao cho hoặc $f(b) = f(b-a)$ hoặc $f(b) = f(b+a-1)$.

Câu 4. Giả sử a là một số thực cho trước. Xét dãy số thực (x_n) cho bởi hệ thức $x_1 = b, x_{n+1} = x_n^2 + (1-2a)x_n + a^2 \quad n \geq 1$.

Xác định b để (x_n) hội tụ và hãy tính giới hạn của dãy trong trường hợp đó.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \leq \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} \text{ với mọi } x_1, x_2 \in [1,2] \text{ sao cho } x_1 \leq x_2. \text{ Chứng minh}$$

$$\text{rằng: } \int_1^2 f(x) dx \leq \frac{3}{2}.$$

7.9. NĂM 2001

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và đồ thị của $f(x)$ có tiệm cận xiên $y = ax + b$ khi $x \rightarrow +\infty$.

- Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) - ax - b$ có đạo hàm $g'(x) \leq 0$ với mọi $x > 0$.
- Chứng minh rằng đồ thị hàm số $f(x)$ (với $x > 0$) luôn nằm phía trên của tiệm cận xiên.

Câu 2. Cho các số $p > 0, q > 0, p + q < 1$ và dãy số (a_n) không âm thỏa điều kiện $a_{n+2} \leq pa_{n+1} + qa_n, n = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng dãy (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy đó.

Câu 3. Chứng minh rằng tồn tại số thực $x \in (0,1)$ sao cho

$$\int_x^1 \frac{t^{2000} dt}{(1+t)(1+t^2)\dots(1+t^{2001})} = \frac{x^{2001}}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2001})}.$$

Câu 4. Cho hàm số f xác định và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện $f(x) + f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $f(x) + f(x + \pi) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[1; +\infty)$ và thoả mãn các điều kiện sau:

$$(i) \quad f(1) = a, \quad (ii) \quad f(x+1) = 2001.f^2(x) + f(x) \quad \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(n)}{f(n+1)} \right].$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a, b]$ và thoả mãn điều kiện:

$[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 > 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng số các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $[a, b]$ là hữu hạn.

7.10. NĂM 2002

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sin(2002x + \sin x) dx$.

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \leq 3$, ta đều có:

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^\alpha \geq \cos x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a; b]$ và thoả mãn điều kiện

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a; b).$$

Chứng minh rằng tồn tại dãy (x_n) , $x_n \in (a, b)$ sao

$$\text{cho: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1)f(x_n)} = 2002.$$

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số xác định và liên tục trên $(-\infty, +\infty)$ và thoả mãn

$$\text{điều kiện sau: } f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f(t) dt, \quad \forall x, y \in (-\infty; +\infty).$$

Câu 5. Cho dãy số thực (u_n) xác định như sau:

$$u_1 = a \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + u_n^2) - 2002, \quad n \geq 1. \text{ Chứng minh rằng dãy } (u_n) \text{ là một dãy hội tụ.}$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; e]$ và dãy số (I_n) xác định như sau:

$I_n = n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n) dx$, $n = 1, 2, \dots$. Tìm giới hạn của dãy.

7.11. NĂM 2003

Câu 1. Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+2002)(f(x)+\sqrt{2003})=-2004 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 2. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định trên $[0,1]$, khả vi trên khoảng $(0,1)$ và thỏa mãn điều kiện:

a) $f(0)=f(1)=1$ b) $2003f'(x)+2004f(x) \geq 2004$, $\forall x \in (0,1)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a,b]$ và thỏa mãn:

a) $f(a)=\frac{1}{2}(a-b)$ b) $f(b)=\frac{1}{2}(b-a)$ c) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$.

Chứng minh rằng tồn tại các số đôi một khác nhau $c_1, c_2, c_3 \in (a,b)$ sao cho: $f'(c_1).f'(c_2).f'(c_3)=1$.

Câu 4. Cho dãy số (x_k) với $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$.

Tìm giới hạn $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n}$.

Câu 5. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $f(0) > 0$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < 1$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = \sin x$ có ít nhất một

nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 6. Cho hai hàm số $f, g: [a,b] \rightarrow [a,b]$ và thỏa mãn các điều kiện:

a) $f(g(x)) = g(f(x)) \quad \forall x \in [a,b]$ b) $f(x)$ đơn điệu

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

7.12. NĂM 2004

Câu 1. Cho dãy số (x_n) xác định như sau: $x_0 = 0$, $x_n = \frac{x_{n-1}}{2004} + (-1)^n \quad \forall n \geq 1$.

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $[0; +\infty)$. Chứng minh rằng hàm

$$\text{số } F(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt} \quad \text{đồng biến trên } [0; +\infty).$$

Câu 3. Cho $0 < a < b$. Tính:

$$\text{a) } I(\lambda) = \int_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx$$

$$\text{b) } \lim_{\lambda \rightarrow 0} [I(\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Câu 4. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\text{(i) } f(x) \geq e^{2004x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{b) } f(x+y) \geq f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(a) = P(b) = 0$ với $a < b$.

$$\text{Đặt } M = \max_{a \leq x \leq b} |P''(x)|.$$

Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \int_a^b P''(x-a)(x-b) dx = -2 \int_a^b P(x) dx.$$

$$\text{b) } \left| \int_a^b P(x) dx \right| \leq \frac{1}{12} M(b-a)^3.$$

7.13. NĂM 2005

Câu 1. Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi công thức truy hồi sau:

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2, \quad x_1 = 5. \quad \text{Tìm giới hạn: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$ ($a < b$) và thỏa

mãn điều kiện $\int_a^b f(x) dx = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) = 2005 \int_a^c f(x) dx.$$

Câu 3. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f'(x) \geq a \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}. \quad \text{Biết rằng } 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx < a.$$

Chứng minh rằng khi đó trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Câu 4. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2} \quad \forall x \in [0,1]. \text{ Hãy chứng minh } \int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq \int_0^1 xf(x)dx.$$

Câu 5. Giả sử $f(x)$ là hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = a$. Chứng minh rằng: $\max_{x \in [0,1]} \{f''(x)\} \geq 8(a-b)$ với

$$b = \min_{x \in [0,1]} \{f(x)\}.$$

Cho một mở rộng kết quả trên đối với đoạn $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

7.14. NĂM 2006

Câu 1. Cho dãy số (x_n) được xác định theo hệ thức:

$$x_1 = 2, x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2 x_n, n = 2, 3, \dots$$

Tính x_{2006} .

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Giả sử tồn tại các số $p > 0$ và $q \in (0,1)$ sao cho: $|f(x)| \leq p, |f'(x)| \leq q \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng dãy số (x_n) xác định bởi hệ thức:

$$x_0 = 1, x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \text{ là dãy hội tụ.}$$

Câu 3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$P(0) = 0, 0 \leq P'(x) \leq P(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

Câu 4. Cho hàm số liên tục $f: [0,1] \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện:

$$[f(x)]^2 \leq 1 + 2 \int_0^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng: $\int_0^x f(t)dt \leq x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in [0,1].$

Câu 5. Tồn tại hay tồn tại hàm số $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ liên tục, đồng biến và thỏa mãn bất đẳng thức $|f(x) - f(y)| > |x - y| \quad \forall x, y \in [0,1], x \neq y$?

Câu 6. Xác định các dãy số (x_n) biết rằng: $x_{2n+1} = 3x_n + 2, n = 0, 1, \dots$

7.15. NĂM 2007

Câu 1. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau

$$x_0 = 2007, x_n = -\frac{2007}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k, n \geq 1. \text{ Tính tổng } S = \sum_{n=0}^{2007} 2^n x_n.$$

Câu 2. Dãy số (u_n) xác định bởi công thức $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}$, $u_1 = a$, ở đây a, b, c là các số thực. Biết rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$, $\alpha \neq b - c$. Tìm $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{u_n}{u_{n+1} + b - c}$.

Câu 3. Cho giả thiết rằng hàm số $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho: $0 \leq f(x) \leq \alpha \int_0^x f(t) dt$ với mọi $x \geq 0$.

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$.

Câu 4. Tính tích phân: $I = \int_0^{2\pi} \ln(\sin(2007x) + \sqrt{1 + \sin^2(2007x)}) dx$.

Câu 5. Tìm hàm số $f(x)$ sao cho với mọi $x \neq 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1}.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $[0, +\infty)$. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = A$. Chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Câu 7. Cho hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > 0$ thì $\int_0^a f(x) dx \int_0^a x f^2(x) dx \leq \int_0^a x f(x) dx \int_0^a f^2(x) dx$

b) Nếu $a < 0$ thì $\int_0^a f(x) dx \int_0^a x f^2(x) dx \geq \int_0^a x f(x) dx \int_0^a f^2(x) dx$

7.16. NĂM 2008

Câu 1. Cho dãy số (a_n) xác định như sau:

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n, n=1,2,\dots \text{ Tính } a_{2008}?$$

Câu 2. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2008} + 2^{2008} + \dots + n^{2008}}{n^{2009}}$.

Câu 3. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; \pi]$ với $f(0) = f(\pi) = 0$ và thỏa mãn điều kiện $|f'(x)| < 1 \forall x \in (0, \pi)$.

Chứng minh rằng:

a) $\exists c \in (0, \pi)$ sao cho $f'(c) = \tan f(c)$.

b) $|f(x)| < \frac{\pi}{2} \forall x \in (0, \pi)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện:

$$xf(y) + yf(x) \leq 1 \quad \forall x, y \in [0,1]. \text{ Chứng minh rằng: } \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

Câu 5. Giả sử rằng $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0,1]$ với $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và khả vi trong $(0,1)$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (0,1)$, luôn tồn tại

$$x_1, x_2 \in (0,1) \text{ sao cho } \frac{\alpha}{f'(x_1)} + \frac{1-\alpha}{f'(x_2)} = 1.$$

Câu 6. Cho hàm số $g(x)$ có $g''(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử rằng $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f(0) > g(0), \quad \int_0^\pi f(x) dx < g(0)\pi + \frac{g'(0)\pi^2}{2}.$$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in [0, \pi]$ sao cho $f(c) = g(c)$.

7.17. NĂM 2009

Câu 1. Giả sử dãy (x_n) được xác định theo công thức:

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1 \\ x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}), n = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Tính x_{2009} ?

Câu 2. Cho hàm số $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp hai liên tục và $f''(x) > 0$ trên đoạn $[0,1]$. Chứng minh rằng: $2 \int_0^1 f(t) dt \geq 3 \int_0^1 f(t^2) dt - f(0)$.

Câu 3. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} f(x) \leq 4 + 2009x & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x+y) \leq f(x) + f(y) - 4 & \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Câu 4. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(g(x)) \equiv g(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Câu 5. Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định theo công thức:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}; \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}.$$

Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2; 3), n = 2, 3, \dots$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Câu 6. Thí sinh làm một trong hai câu sau:

- a) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực. Chứng minh rằng $2^x = P(x)$ có không quá $n + 1$ nghiệm thực.
- b) Cho $f(x) - x$ và $f(x) - x^3$ là những hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng hàm $f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$

7.18. NĂM 2010

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \ln(x+1)$.

- a) Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ tồn tại duy nhất số thực c làm thỏa mãn điều kiện $f(x) = xf'(c)$.

b) Tìm $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c(x)}{x}$.

Câu 2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n(1 + x_n^{2010})$, $n \geq 1$.

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}} \right)$.

Câu 3. Cho $a \in \mathbb{R}$ và hàm $f(x)$ khả vi trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0) \geq 0$ và $f'(x) + af(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$. Chứng minh rằng $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục khả vi trên $[0, 1]$. Giả sử rằng

$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho $f'(c) = 6$.

Câu 5. Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực sao cho $P(-1) \neq 0$ và

$-\frac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \frac{n}{2}$. Chứng minh rằng $P(x)$ luôn có ít nhất một nghiệm x_0 sao cho

$|x_0| \geq 1$.

Câu 6. Chọn một trong hai câu sau:

6a. Tìm tất cả các hàm số dương $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn

điều kiện $f(1) = ef(0)$ và $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1$.

6b. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện:

$f(1) = 2010$, $f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

7.19. NĂM 2011

Câu 1 Cho hàm số: $f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$

(i) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ và hàm $f'(x)$ đồng biến.

(ii) Chứng minh dãy (u_n) với $u_1 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$ có các phân tử đều thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Câu 2

Tính tích phân: $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$

Câu 3

Cho hai dãy (x_n) , (y_n) thỏa: $x_{n+1} \geq \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} \geq \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{2}}$, mọi số tự nhiên n.

(i) Chứng minh rằng các dãy $x_n + y_n$, $x_n y_n$ tăng.

(ii) Nếu cho trước dãy (x_n) , (y_n) bị chặn. Chứng minh rằng hai dãy này cùng hội tụ về một điểm.

Câu 4

Cho α, β thỏa mãn bất đẳng thức: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$, mọi n nguyên dương. Tìm $\min|\alpha - \beta|$.

Câu 5

Đoạn $[\alpha, \beta]$ là đoạn tốt nếu ứng với a, b, c là các số thực thỏa $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc $[\alpha, \beta]$. Tìm đoạn tốt có độ dài nhỏ nhất.

Câu 6 *Thí sinh chọn một trong hai câu*

(i) Tìm tất cả các hàm f(x) thỏa mãn:

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(ii) Cho hàm f(x) khả vi trên đoạn $[-1; 1]$ và $xf(x) + \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Chứng minh: $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx \leq 2 \ln 2$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nguyễn Văn Nho, Tuyển tập 200 bài thi vô địch Toán tập 3: Giải tích , Nhà xuất bản Giáo dục năm 2001.
- [2]. Nguyễn Quý Dy- Nguyễn Sinh Nguyên- Nguyễn Văn Nho- Vũ Văn Thoả- Vũ Dương Thụy, Tuyển tập 200 bài thi vô địch Toán tập 8: Phương trình hàm, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2006.
- [3]. Nguyễn Văn Nho, Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Trung Quốc, Nhà xuất bản giáo dục năm 2003.
- [4]. Vũ Dương Thụy- Nguyễn Văn Nho, Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Mỹ và Canada, Nhà xuất bản giáo dục năm 2002.
- [5]. Nguyễn Văn Nho, Tuyển chọn các bài toán từ những cuộc thi tại một số nước Đông Âu tập I, Nhà xuất bản giáo dục năm 2004.
- [6]. Vũ Dương Thụy- Nguyễn Văn Nho, 40 năm Olympic toán học Quốc tế, Nhà xuất bản giáo dục năm 2003.
- [7]. XV Cônhiagin-G.A.Tônôian-IF.Sarugin và các đồng nghiệp, Các đề thi vô địch Toán 19 nước trong đó có Việt Nam tập I và II , Nhà xuất bản Trẻ năm 2002.
- [8]. Jean-Marie Monier, Giáo trình toán- tập 1, 2 Giải tích, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2001.
- [9]. Lê Hải Châu, Tuyển chọn những bài toán hay nhất thế giới tập I, II và III , Nhà xuất bản Trẻ năm 2004.
- [10]. Nguyễn Trọng Tuấn- Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olympic, Nhà xuất bản giáo dục năm 2004.
- [11]. Nguyễn Văn Mậu- Lê Ngọc Lăng- Phạm Thế Long- Nguyễn Minh Tuấn, Các đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2006.
- [12]. Trần Lưu Cường, Toán Olympic cho sinh viên tập I, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2000.
- [13]. Tô Văn Ban, Giải tích những bài tập nâng cao, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2005.
- [14]. Y.Y. Liasko, A.C. Bôiatruc, IA.G. Gai, C.P. Gôlôbac, Giải tích toán học các ví dụ và các bài toán, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội-1978.
- [15]. Phan Huy Khải, Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Trung học Phổ thông-Các bài toán về dãy số, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2007.

- [16]. Phan Huy Khải, Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Trung học Phổ thông-Các bài toán về hàm số, Nhà xuất bản Giáo dục, năm 2007.
- [17]. Nguyễn Văn Mậu, Một số bài toán chọn lọc về dãy số, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2006.
- [18]. Nguyễn Văn Mậu-Nguyễn Thuỷ Thanh, Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Trung học Phổ thông- Giới hạn dãy số và hàm số, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2004.
- [19]. Nguyễn Văn Mậu- Nguyễn Văn Tiến, Một số chuyên đề Giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học Phổ thông, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam năm 2009.
- [20]. Nguyễn Sinh Nguyên, Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Hungari, Nhà xuất bản Đà Nẵng năm 2002.
- [21]. Lê Hoàn Phò, Phương pháp Giải 234 bài toán khảo sát nghiệm phương trình, Nhà xuất bản Đà Nẵng năm 2003.
- [22]. Lê Hoàn Phò, Bài giảng cho học sinh chuyên Toán- Khảo sát nghiệm phương trình, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2008.
- [23]. Lê Hoàn Phò, Chuyên khảo Đa thức, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh năm...
- [24]. Nguyễn Hữu Điển, Đa thức và ứng dụng, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2006.
- [25]. Nguyễn Văn Nho, Olympic Toán học châu Á- Thái Bình Dương, Nhà xuất bản giáo dục năm 2004.
- [26]. Trần Phương, Tuyển tập các chuyên đề và Kỹ thuật tính tích phân, Nhà xuất bản Tri thức năm 2006.
- [27]. Trần Đức Long- Nguyễn Đình Sang- Hoàng Quốc Toàn, Bài tập giải tích tập I và II , Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội năm 2008.
- [28]. Răzvan Gelca- Titu Andreescu, Putnam and Beyonhd, Springer (Tài liệu trên Internet).
- [29]. Paulo Ney de Souza, Jorge-Nuno Silva, Berkeley Problems in Mathematics, Springer (Tài liệu trên Internet)
- [30]. W.J.Kaczor, M.T.Nowak, Problems in Mathematical Analysis I, II, III (Tài liệu trên Internet).
- [31]. W.Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw- Hill, New York- 1964.
- [32]. Tuyển tập các đề thi Toán Quốc gia, Quốc tế trên Internet.