

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

NHÓM CÂU HỎI CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 3. C. 0. D. -4.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4.

Câu 2. (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đạt cực đại tại điểm mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm.

Từ bảng biến thiên hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 3. (Mã 101 – 2020 Lần 1) Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -5$	$\nearrow +\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. -5. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT ta có hàm số đạt giá trị cực tiểu $f(3) = -5$ tại $x = 3$

Câu 4. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho là $y_{CD} = 2$.

Câu 5. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-1	3		$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. -2. C. 3. D. -1.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -1.

Câu 6. (Mã 103 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

$+\infty \nearrow 3 \searrow -2 \nearrow +\infty$

Hàm số đạt cực đại tại:

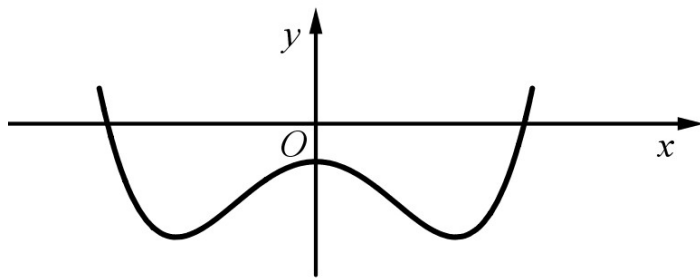
- A. $x = -2$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x = 1$, $f'(1) = 0$ và đạo hàm đổi dấu từ (+) sang (-)

Câu 7. (Mã 103 - 2018) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3

B. 0

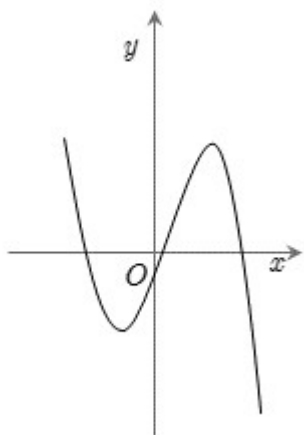
C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn A

Câu 8. (Mã 102 - 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 3

B. 2

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 9. (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Ta có

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi x qua nghiệm -1 và nghiệm 1 ; không đổi dấu khi x qua nghiệm 0 nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 10. (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 11. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(-1)=0$,

$f'(1)$ không xác định nhưng do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $f(1)$

và $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua các điểm $x=-1$, $x=1$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại 2 điểm này.

Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 2.

Câu 12. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua các điểm $x = -1; x = 1$ nên hàm số có 2 điểm cực tiểu.

- Câu 13.** (Mã 101 – 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Ta có

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số có đúng 1 điểm cực đại.

- Câu 14.** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-4)^3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y									

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực đại.

- Câu 15.** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là
- A. 4, B. 3, C. 1, D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = x(x+1)(x-4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực tiểu là $x=-1$ và $x=4$.

- Câu 16. (Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là
- A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Ta có:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

- Câu 17. (THPT Cù Huy Cận 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?
- A.** 5 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Ta có Do $x=0, x=1$ là nghiệm đơn, còn các nghiệm và $x=-2$ là nghiệm bội chẵn nên $f'(x)$ chỉ đổi khi đi qua $x=0, x=1$.

$\Rightarrow$ Hàm số $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2 \vee m > 2$ có 2 điểm cực trị.

- Câu 18. (Mã 102-2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A.** 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Ta có

Các nghiệm này là các nghiệm đơn nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

- Câu 19.** (Sở Bình Phước 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 3 B. 5 C. 2 D. 4

Lời giải

Chọn C

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$					$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

- Câu 20.** (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 5 B. 2 C. 1 D. 3

Lời giải

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Ta có

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=0$ và $x=1$, do đó hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

- Câu 21.** (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3

B. 1

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Diagram showing the function $f(x)$ increasing from $-\infty$ to a local maximum at $x = -3$, decreasing to a local minimum at $x = 1$, and then increasing towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 22. (Đề Minh Họa 2017) Tìm giá trị cực đại y_{CS} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CS} = -1$

B. $y_{CS} = 4$

C. $y_{CS} = 1$

D. $y_{CS} = 0$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

Diagram showing the function y increasing from $-\infty$ to a local maximum at $x = -1$ with value 4, decreasing to a local minimum at $x = 1$ with value 0, and then increasing towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4

Câu 23. (Mã 104 - 2017) Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1

B. 3

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn C

Có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 B. Cực tiểu của hàm số bằng 1
 C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

✧ **Cách 1.**

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2 .

✧ **Cách 2.**

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

$y'' = \frac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$; $y''(-3) = -\frac{1}{2} < 0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2 .

Câu 25. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.
 A. $y_{CT} = -6$ B. $y_{CT} = -1$ C. $y_{CT} = -2$ D. $y_{CT} = 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-6		-2		$-\infty$

Vậy $y_{CD} = y(1) = -2$; $y_{CT} = y(-1) = -6$.

Câu 26. (THPT Cù Huy Cận 2019) Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:
 A. $y_{CT} = 0$ B. $y_{CT} = 3$ C. $y_{CT} = 2$ D. $y_{CT} = 4$

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$y''(0) = -6, y''(2) = 6$$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Rightarrow y_{CT} = y(2) = 0$.

- Câu 27. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019)** Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?
- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 2x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Suy ra đồ thị có hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị có tung độ là số dương.

- Câu 28. (Hsg Bắc Ninh 2019)** Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ B. $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$ C. $y = x^2 - 2x + 1$ D. $y = -x^3 + x + 1$

Lời giải

+ Xét hàm số $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$ không có cực trị.

- Câu 29. (THPT Ba Đình 2019)** Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
- A. -2. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

$y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Giá trị cực đại của hàm số là: $y(0) = -2$.

- Câu 30. (Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ là

- A. $(-1; -8)$ B. $(0; -5)$ C. $\left(\frac{5}{3}; \frac{40}{27}\right)$ D. $(1; 0)$

Lời giải

Chọn A

$$y' = -3x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y'' = -6x + 2$$

Ta có: $y''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$; $y_{CT} = y(-1) = -8$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1; -8)$.

NHÓM CÂU HỎI CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ, GIỎI

Câu 31. (Mã 110 - 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

- A. $m = -1$ B. $m = -7$ C. $m = 5$ D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = 5(TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 32. (Chuyên Hạ Long 2019) Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

- A. không tồn tại m . B. $m = \pm 1$. C. $m = 1$. D. $m \in [1; 2]$.

Lời giải

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Để $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số

Thử lại với $m = 1$, ta có $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y						

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33. (Chuyên QH Huế - Lần 2 - 2019) Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x=1$.

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -6$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = f'(x) = 1 + \frac{m}{2\sqrt{x}}, (x > 0)$$

Để hàm số đạt cực trị tại $x=1$ thì $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Thử lại với $m = -2$, hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$ có cực tiểu tại $x=1$, do đó $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 34. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - \sin x)(x - m - 3)(x - \sqrt{9 - m^2})^3 \forall x \in \mathbb{R}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá

trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 6

B. 7

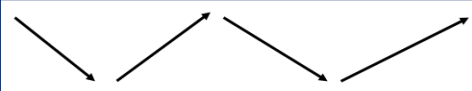
C. 5

D. 4

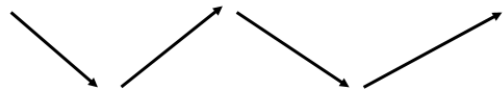
Lời giải

Điều kiện $9 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$

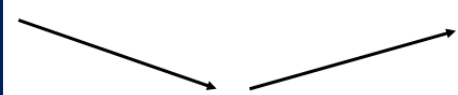
TH 1: $0 \leq m < 3$ ta có BTT

x	$-\infty$	0	$\sqrt{9-m^2}$	$m+3$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y					

TH 2: $-3 \leq m < 0$ ta có BTT

x	$-\infty$	0	$m+3$	$\sqrt{9-m^2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y					

TH 2: $m = 3$ ta có BTT

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y					

Từ đó suy ra $-3 \leq m < 3 \Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 35. (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019) Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$$y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$$

đạt cực đại tại $x = 0$ là:

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m < 0$.

C. Không tồn tại m . D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$$

Đặt

$$f'(x) = x^4 - mx^3$$

Ta có:

Khi $m = 0$ thì $f'(x) = x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Khi $m \neq 0$, xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - mx^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x - m) = 0$

+ Trường hợp $m > 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	m	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	$f(m)$	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

+ Trường hợp $m < 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(m)$	2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Như vậy, để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì $m > 0$.

Câu 36. Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab \neq 0$. B. $ab < 0$. C. $ab > 0$. D. $ab \geq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = x^3 + 3(a+b)x^2 + 3(a^2 + b^2)x + a^3 + b^3$

$$y' = 3x^2 + 6(a+b)x + 3(a^2 + b^2)$$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Delta' = 18ab > 0$
 $\Leftrightarrow ab > 0$

Câu 37. (THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị

- A. $m \in (-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$ B. $m \in (-6; 0)$ C. $m \in [-6; 0)$ D.
 $m \in [-6; 0]$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3mx^2 - 4mx + (m-2)$

+ Nếu $m = 0$.

$\Rightarrow y' = -2 < 0 (\forall x \in \mathbb{R})$. Nên hàm số không có cực trị.

Do đó $m = 0$ (chọn) (1).

+ Nếu $m \neq 0$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'$ không đổi dấu

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3m(m-2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m \leq 0 \Rightarrow -6 \leq m < 0 \text{ (do } m \neq 0 \text{)} \text{ (2)}.$$

Kết hợp (1) và (2) ta được $-6 \leq m \leq 0$.

Câu 38. (HSG - TP Đà Nẵng - 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$ B. $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$
C. $m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$ D. $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x$

+ TH1: $m = -1$, ta có: $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	

Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0(*) \end{cases}$$

Ta có:

+ TH2: $m \neq -1$

Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình (*) không có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (3m)^2 - 2(3m+3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

$$m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right] \cup \{-1\}.$$

Vậy

- Câu 39. (HSG 12 - Bắc Ninh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?
- A. 0. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi tam thức $g(x) = x^2 + 2mx + 5$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x = -1$, hoặc $g(x)$ có nghiệm kép

$$x = -1 \text{ Tức là } \begin{cases} \Delta'_g < 0 \\ g(-1) = 0 \\ \Delta'_g > 0 \\ -\frac{b'}{a} = -1 \\ \Delta'_g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5 < 0 \\ -2m + 6 = 0 \\ m^2 - 5 > 0 \\ -m = -1 \\ \Delta'_g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m = 3 \end{cases}$$

Do đó tập các giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

- Câu 40. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là:
- A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ B. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ C. $(-1; 2)$ D. $[-1; 2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên $y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$

- Câu 41. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là
- A. $(0; +\infty)$ B. $(-\infty; 0]$ C. $[0; +\infty)$ D. $(-\infty; 0)$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

TH1: $m = 0$ hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.

TH2: $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 - 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m < 0$.

Vậy $m \leq 0$.

Câu 42. (Mã 123 - 2017) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $M(0; -1)$ B. $N(1; -10)$ C. $P(1; 0)$ D. $Q(-1; 10)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB .

Câu 43. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $P(1; 0)$ B. $M(0; -1)$ C. $N(1; -10)$ D. $Q(-1; 10)$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases}$$

Ta có $A(-1; 6), B(3; -26) \Rightarrow \overline{AB} = (4; -32)$ nên Chọn $n_{AB} = (8; 1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$8(x+1)+1(y-6)=0 \Leftrightarrow 8x+y+2=0$$

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng.

Câu 44. (Đề Tham Khảo 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm

số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 3 B. 6 C. -6 D. 0

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases} \Rightarrow A \left(m - 1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3} \right) \text{ và } B \left(m + 1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3} \right)$$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2 - 1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I \left(m; \frac{m^3 - 3m}{3} \right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 45. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020) Cho hàm số $y = x^3 - (m + 6)x^2 + (2m + 9)x - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

$$\text{A. } \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq -6 \end{cases} \quad \text{B. } m \geq -2. \quad \text{C. } m \leq -6. \quad \text{D. } \begin{cases} m > -2 \\ m < -6 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Lời giải

Chọn D

$$y' = 3x^2 - 2(m + 6)x + 2m + 9.$$

$$y' = 3x^2 - 2(m + 6)x + 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2m + 9}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m + 9}{3} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3. \quad (1)$$

Hàm số có 2 cực trị

$$y(1) = m + 2.$$

$$y \left(\frac{2m + 9}{3} \right) = -m \frac{(2m + 9)^2}{27} - 2.$$

$$\Leftrightarrow y(1).y\left(\frac{2m+9}{3}\right) < 0$$

Ycbt

$$\Leftrightarrow (m+2). \left[-m \frac{(2m+9)^2}{27} - 2 \right] < 0 \Leftrightarrow (m+2).(4m^3 + 36m^2 + 81m + 54) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \\ m > -2 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < -6 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Từ (1), (2) ta có ycbt

Câu 46. (THPT Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

- A. $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$ B. $m \in (1; 3)$ C. $m \in (3; 4)$ D. $m \in (-1; 4)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3) \cup \text{pt } y' = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$

Ư $x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$

Ư $(x+1)(x+m-2) = 0$

Ư $\begin{cases} x = -1 \in (-2; 3) \\ x = 2-m \end{cases}$

YCBT Ư $\begin{cases} -2 < 2-m < 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$

Câu 47. (HSG Bắc Ninh 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1; 1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

- A. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$ B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$ suy ra đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu khi $m > 0$. Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là $C(-\sqrt{m}; 2 + 2m\sqrt{m}); D(\sqrt{m}; 2 - 2m\sqrt{m})$.

Đường thẳng Δ đi qua các điểm CD, CT của đồ thị hàm số có phương trình là: $y = -2mx + 2$. Do
 $d(I, \Delta) = \frac{|2m - 1|}{\sqrt{4m^2 + 1}} < R = 1$ (vì $m > 0$) $\Rightarrow \Delta$ luôn cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại 2

điểm A, B phân biệt. Dễ thấy $m = \frac{1}{2}$ không thỏa mãn do A, I, B thẳng hàng.

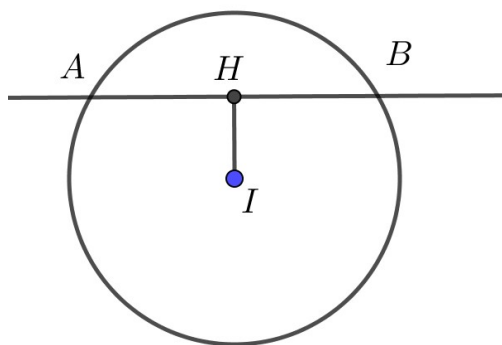
Với $m \neq \frac{1}{2}$: Δ không đi qua I, ta có: $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \angle AIB \leq \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2}$.

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $\sin \angle AIB = 1$ hay ΔIAB vuông cân tại I $\Leftrightarrow IH = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Leftrightarrow \frac{|2m - 1|}{\sqrt{4m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ (H là trung điểm của AB)

- Câu 48.** Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng
- A.** $m_0 \in (3;4)$ **B.** $m_0 \in (1;2)$ **C.** $m_0 \in (0;1)$ **D.** $m_0 \in (2;3)$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $y' = 3x^2 - 6m$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow m > 0$

Gọi $A(\sqrt{2m}; 4 - 4m\sqrt{2m})$ và $B(-\sqrt{2m}; 4 + 4m\sqrt{2m})$

Phương trình đường thẳng $AB: 4mx + y - 4 = 0$

Đặt $a = d(I, AB)$ ($0 < a < \sqrt{2}$) $\Rightarrow HB = \sqrt{2 - a^2}$

Suy ra $S_{\Delta IAB} = a\sqrt{2 - a^2} \leq \frac{1}{2}(a^2 + 2 - a^2) = 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt{2 - a^2} \Leftrightarrow a = 1$

$$d(I; AB) = \frac{|4m + 0 - 4|}{\sqrt{16m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 1} = 4|m - 1|$$

Khi đó

$$\Leftrightarrow 16m^2 + 1 = 16m^2 - 32m + 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}$$

Câu 49. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018) Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m_0 \in (-1; 7)$. B. $m_0 \in (7; 10)$. C. $m_0 \in (-15; -7)$. D. $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbf{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x + m$$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0$; $\Delta' = 9 - 3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Hai điểm cực trị x_1, x_2 là nghiệm của $y' = 0$ nên: $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = \frac{m}{3}$.

$$\text{Đề } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9. \text{ Vậy } m_0 = -9 \in (-15; -7).$$

Câu 50. (THPT Triệu Thị Trinh - 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + (m+4)x - m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

- A. $\emptyset$. B. $(-\infty; 3) \cup (3; 4]$. C. $(-\infty; 3) \cup (3; 4)$. D. $(-\infty; 4)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = x^3 - 5x^2 + (m+4)x - m = (x-1)(x^2 - 4x + m)$$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi phương trình $y = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 1 - 4 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Câu 51. (Mã 102-2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 6)$.

- A. 24 . B. 25 . C. 26 . D. 23 .

Lời giải

Chọn A

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y' = x^2 - 2x - m.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = x^2 - 2x$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^2 - 2x$$

$$g(x) = x^2 - 2x \Rightarrow g'(x) = 2x - 2.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

BBT:

x	$-\infty$		0		1				6		$+\infty$
$g'(x)$		-		-	0		+			+	
$g(x)$	$+\infty$										

Từ BBT ta có:

Hàm số có đúng 1 điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 6)$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m < 24. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; \dots; 23\}$$

Có 24 số nguyên m .

Câu 52. (Đề Minh Họa 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

B. $m = 1$

C. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

D. $m = -1$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 + 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases} (*)$$

Ta có:

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0
 $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0; 1); B(-\sqrt{-m}; 1 - m^2); C(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$

Ta có $\overline{AB} = (-\sqrt{-m}; -m^2); \overline{AC} = (\sqrt{-m}; -m^2)$

Vì ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2} + m^2 \cdot m^2 = 0 \Leftrightarrow -|m| + m^4 = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0$
 $\Leftrightarrow m = -1$ (vì $m < 0$)

Vậy với $m = -1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

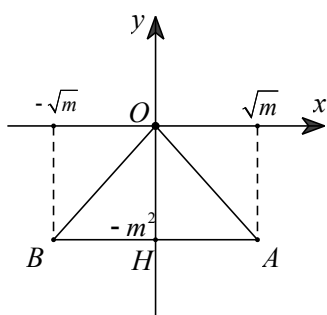
Câu 53. (Mã 105 -2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A.** $0 < m < 1$ **B.** $m > 0$ **C.** $0 < m < \sqrt[3]{4}$ **D.** $m < 1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$



Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$ $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là

$O(0;0)$, $A(\sqrt{m}; -m^2)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2)$

Do đó $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2\sqrt{m} = m^2 \sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 54. (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn ABCD là hình thoi với $D(0; -3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$ **B.** $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$ **C.** $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ **D.** $m \in (2; 3)$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; -2m^2 + m^4)$; $B(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$; $C(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$

Gọi I trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; m^4 - 3m^2)$

Vì $A, D \in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow I$ là trung điểm của AD

$$\Leftrightarrow 2(m^4 - 3m^2) = -2m^2 + m^4 - 3 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{m \geq 0} \begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases}$$

Câu 55. (THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng 2019) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

A. $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

C. $2 + \sqrt{5}$

D. $-1 + \sqrt{5}$

Lời giải

➤ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

➤ $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

➤ Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

➤ Gọi $A(0; 1), B(\sqrt{m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hs (1), $I(0; -m^2 + 1)$ là trung điểm BC .

Ta có $AI = m^2, AB = AC = \sqrt{m + m^4}$. Suy ra $\frac{1}{2}AI \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{2AI}{AB \cdot AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2}{m + m^4} = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (l) \\ m = 1 & (n) \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} & (l) \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & (n) \end{cases}$$

Câu 56. (Chuyên Quang Trung - 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$

B. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$

C. $m \in (2; 3)$

D. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$

Lời giải

Ta có $y' = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$;

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; m^4 - 2m^2)$, $B(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$, $C(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD . Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I(0; m^4 - 3m^2)$, $J\left(0; \frac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

$$\text{ĐK: } m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right).$$

Câu 57. (Chuyên Vĩnh Phúc 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A.** $m < 1$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $0 < m < \sqrt[3]{4}$. **D.** $m > 0$.

Lời giải

Hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì $m > 0$. Khi đó ba điểm cực trị là $O(0; 0)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2)$, $C(\sqrt{m}; -m^2)$. Tam giác OBC cân tại O , với $I(0; -m^2)$ trung điểm của BC .

$$\text{Theo yêu cầu bài toán, ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2}OI \cdot BC = \frac{1}{2}|-m^2| \cdot 2\sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Câu 58. (THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018) Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - m$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là:

- A.** $m = 1; m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **B.** $m = 1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
C. $m = -1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ **D.** $m = -1; m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Lời giải

$$y = x^4 - 2mx^2 - m \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx$$

Với $m > 0$ ta có ba cực trị $A(0; -m)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2 - m)$, $C(\sqrt{m}; -m^2 - m)$.

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow \frac{1}{2}2\sqrt{m}|m^2| = 2\frac{\sqrt{m}AB^2}{4} \Leftrightarrow 2m^2 = m^4 + m \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=0(l) \\ m=1(n) \\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(n) \\ m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}(l) \end{cases}$$

Câu 59. (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm

số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = 2x + 1$.

D. $y = 1 - x$.

Lời giải

⊛ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

⊛ $y' = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (\Rightarrow y = 2) \\ x = -2 (\Rightarrow y = -1) \end{cases}$.

⊛ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1; 2)$ và $N(-2; -1)$.

⊛ Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M, N của đồ thị hàm số đã cho là: $y = x + 1$.

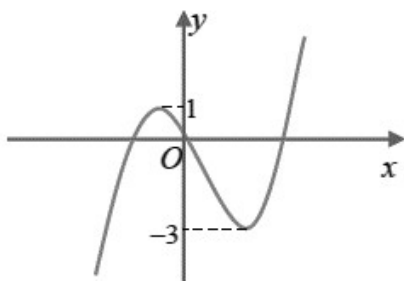
Cách khác:

⊛ Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương

ứng của hàm số là $y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng

qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = \frac{(x^2 + 2x + 3)'}{(2x + 1)'} = x + 1$.

Câu 60. (Chuyên Vinh – Lần 2). Đồ thị (C) có hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là:

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. **B.** $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. **C.** $m = -1$ hoặc $m = 3$. **D.** $1 \leq m \leq 3$.

Giải

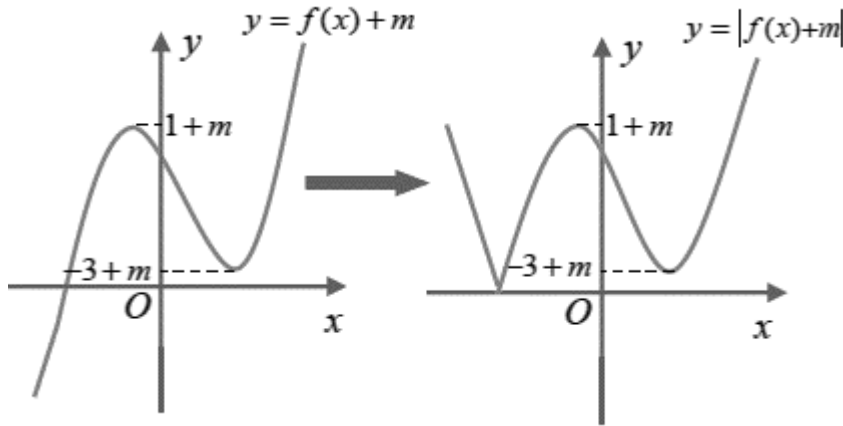
Cách 1:

Do $y = f(x) + m$ là hàm số bậc ba

Khi đó, hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ hàm số $y = f(x) + m$ có $y_{CD} \cdot y_{CT} \geq 0$

(hình minh họa)



$$\Leftrightarrow (1+m)(-3+m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases} \rightarrow \text{Đáp án } \underline{A}$$

Cách 2:

Ta có $y = |f(x) + m| \Rightarrow y' = \frac{(f(x) + m) \cdot f'(x)}{\sqrt{(f(x) + m)^2}}$

Để tìm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$, ta tìm x thỏa mãn $y' = 0$ hoặc y' không xác định.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -m & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 trái dấu.

Suy ra (1) có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

Vậy để đồ thị hàm số có 3 cực trị thì (2) có một nghiệm khác x_1, x_2 .

Số nghiệm của (2) chính là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = -m$.

$$\text{Do đó để (2) có một nghiệm thì dựa vào đồ thị ta có điều kiện: } \begin{cases} -m \geq 1 \\ -m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Đáp án. #A.

Chú ý:

Nếu $x = x_0$ là cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$ hoặc không tồn tại $f'(x_0)$.

- Câu 61. (Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?
- A. 5 B. 6 C. 4 D. 3

Lời giải.

Chọn C

$$y = |f(x)| = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi

Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là $m = 1; m = 2; m = 3; m = 4$.

- Câu 62. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.
- A. 16 B. 44 C. 26 D. 27

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt: } g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$$

$$g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = m - 32 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 5 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{cases}$$

Ta có:

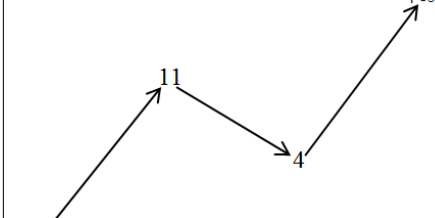
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ m - 5 > 0 \\ m - 32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5 < m < 32 \end{cases}$$

. Vì m là số nguyên dương cho nên có 26 số m thỏa đề bài

Câu 63. (Sở Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

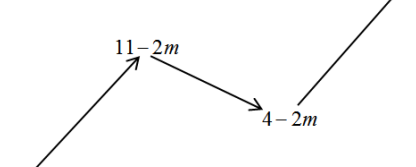
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

- A.** $m \in (4; 11)$ **B.** $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$ **C.** $m = 3$ **D.** $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) - 2m$ như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$[f(x)-2m]'$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)-2m$					

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía trên trục hoành.

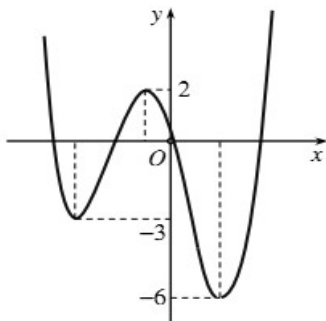
+ Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox .

Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

$$(4 - 2m)(11 - 2m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$$

- Câu 64.** (THPT Nguyễn Huệ - Tt Huế - 2018) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng
- A. 15. B. 18. C. 9. D. 12.

Lời giải



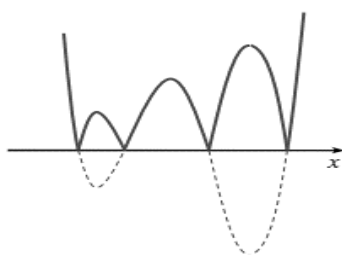
Cách 1: dùng đồ thị.

- Nhận thấy: số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x-2)$ với Ox .

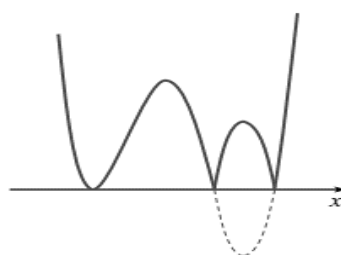
Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x-2) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x-2)$ lên trên m đơn vị.

- Đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_2) nằm phía dưới trục Ox và giữ nguyên phần phía trên trục Ox .

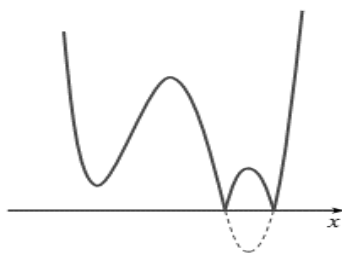
- Ta xét các trường hợp sau:



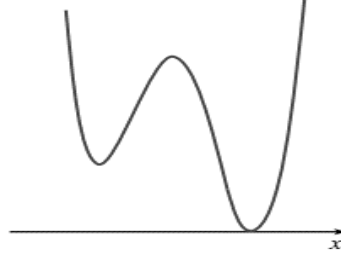
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

- + Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).
- + Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).
- + Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).
- + Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$ Do $m \in \mathbb{Z}_+$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

* **Cách 2:** đạo hàm hàm số hợp.

$$\text{- Ta có: } y = |f(x-2)+m| = \sqrt{[f(x-2)+m]^2} \Rightarrow y' = \frac{(f(x-2)+m) \cdot f'(x-2)}{\sqrt{[f(x-2)+m]^2}}$$

$$\text{- Xét } f'(x-2)=0 \quad (1)$$

+ Do phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2)=0$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{- Xét } f(x-2)+m=0 \Leftrightarrow f(x-2)=-m \quad (2)$$

+ Nếu $-6 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 6$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của (1) .

+ Nếu $-m = -3 \Leftrightarrow m = 3$ thì (2) có 3 nghiệm phân biệt (trong đó có 2 nghiệm đơn khác 3 nghiệm của (1) và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của (1))

Tóm lại : với $3 \leq m < 6$ thì hai phương trình (1) và (2) có tất cả 5 nghiệm bội lẻ phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y = |f(x-2)+m|$ có 5 điểm cực trị.

- Lại do $m \in \mathbb{Z}_+$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 65. (Mã 104-2022) Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 - 64x|$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 23.

B. 12.

C. 24.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = x^4 - mx^2 - 64x$; $g'(x) = 4x^3 - 2mx - 64$; có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3 - mx - 64 = 0 \Rightarrow g(x)=0 \end{cases} \text{ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.}$$

Do đó hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $y = g(x)$ có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow g'(x)$ đổi dấu đúng 1 lần (*).

Nhận xét nếu $x=0 \Rightarrow g'(0) = -64 < 0 \Rightarrow g(x)$ không có cực trị (hay $x=0$ không thỏa mãn).

Nên $g'(x)=0 \Leftrightarrow m=2x^2 - \frac{32}{x}$. Đặt $h(x)=2x^2 - \frac{32}{x}$.

Có $h'(x)=4x + \frac{32}{x^2} = \frac{4(x^3+8)}{x^2}$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$.

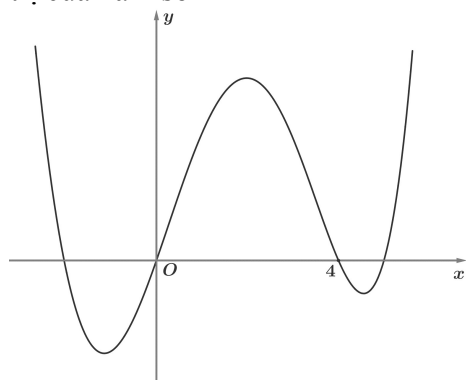
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow 24$	$\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $(*) \Leftrightarrow m \leq 24$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương suy ra $m \in \{1; 2; 3; \dots; 24\}$.

Câu 66. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ là



A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Ta có $g(x)=f(x^3+3x^2) \Rightarrow g'(x)=(3x^2+6x).f'(x^3+3x^2)$

$$\text{Cho } g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x^3+3x^2=a; a<0 \\ x^3+3x^2=b; 0<b<4 \\ x^3+3x^2=c; c>4 \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } h(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow h'(x)=3x^2+6x. \text{ Cho } h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$			-2			0			$+\infty$	
$h'(x)$		+		0	-		0	+			
$h(x)$		$\nearrow$			4	$\searrow$			0	$\nearrow$	
											$+\infty$

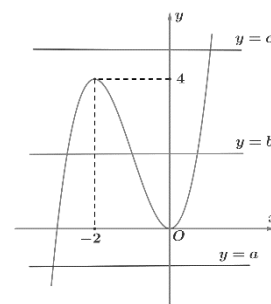
Ta có đồ thị của hàm $h(x)=x^3+3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y=c$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.



Như vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ có 7 cực trị.

Câu 67. (Mã 101 - 2019) Cho hàm số $y=f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-2x)$ là

A. 9.

B. 3.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

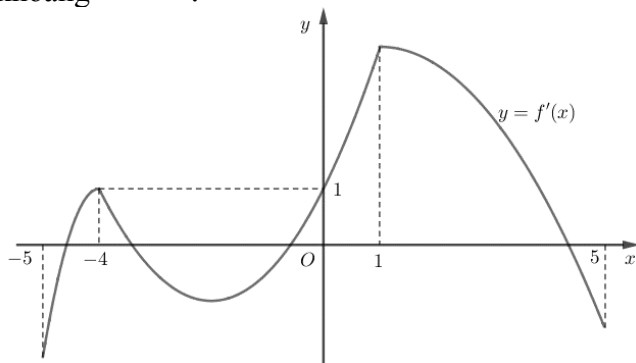
Ta có $y'=2(x-1).f'(x^2-2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - a = 0, a \in (-\infty; -1) \quad (1) \\ x^2 - 2x - b = 0, b \in (-1; 0) \quad (2) \\ x^2 - 2x - c = 0, c \in (0; 1) \quad (3) \\ x^2 - 2x - d = 0, d \in (1; +\infty) \quad (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình (2), (3), (4) đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b, c, d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình (2), (3), (4) cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'(x^2 - 2x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là 7.

Câu 68. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x) - (2x + 4) = (2x + 4)[f'(x^2 + 4x) - 1]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x = -4 \quad (1) \\ x^2 + 4x = 0 \quad (2) \\ x^2 + 4x = a \in (1; 5) \quad (3) \end{cases}$$

Ta có

Xét phương trình $x^2 + 4x = a \in (1; 5)$, ta có BBT của hàm số $y = x^2 + 4x$ trên $(-5; 1)$ như sau:

x	-5	-4	-2	0	1
y'		-	0	+	
y	5		0		5

Suy ra (1) có nghiệm kép $x = -2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x = -4; x = 0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x = x_1; x = x_2$ khác $-2; 0; -4$. Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm trong đó có $x = -2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x = -4; x = 0; x = x_1; x = x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 69. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	4	-2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 4.

B. 5.

C. 1.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

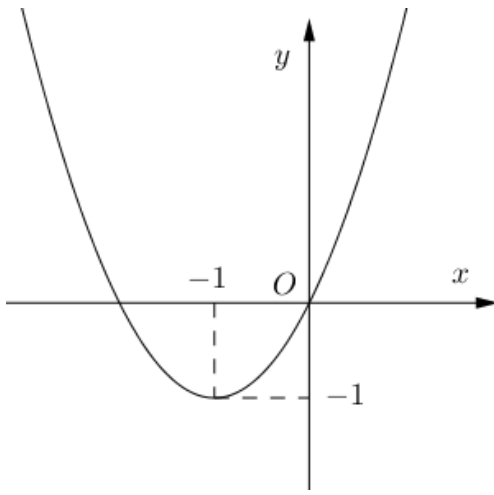
$$y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = a < -1 & (2) \\ x^2 + 2x = b \in (-1; 1) & (3) \\ x^2 + 2x = c > 1 & (4) \end{cases}$$

Từ BBT ta thấy phương trình

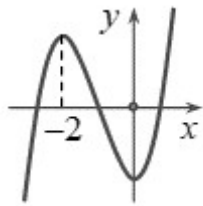
Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3) ; phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn

B.

Ta có: $g'(x) = 2(x - 1)f'(x^2 - 2x - 4)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)f'(x^2 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 4 = -2 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \text{ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).}$$

Ta chọn $x = -2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2) = 2 \cdot (-3) \cdot f'(4)$

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ do đó: $f'(4) > 0$

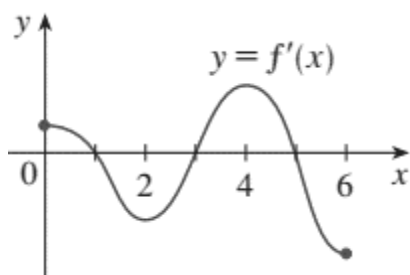
Suy ra: $g'(-2) < 0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 71. (Sở Bình Phước - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

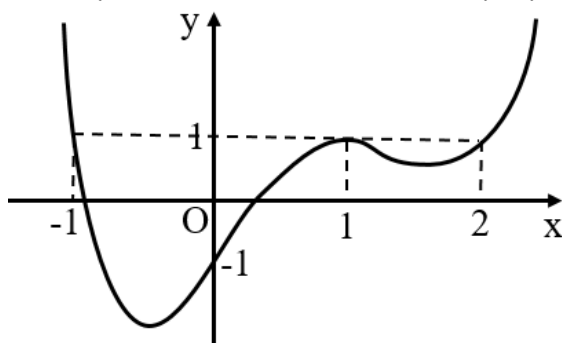
Lời giải

Ta có $y' = 2f(x)f'(x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$.

Từ đồ thị ta suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Câu 72. (Toán Học Tuổi Trẻ 2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

B. $(-2; 0)$

C. $(0; 1)$

D. $(\frac{1}{2}; 2)$

Lời giải

$$g(x) = f(x) - 1; g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

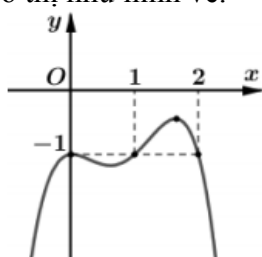
Ta có

Bảng xét dấu của $g(x)$:

X	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu nhận thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1 \in (-2; 0)$.

Câu 73. (Kim Liên - Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. Không có điểm cực tiểu.

D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x$ có $g'(x) = f'(x) + 1$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-	0	+
$g(x)$	↘ ↗ ↘				

Từ đó suy ra hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 74. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		2		5	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = ([f(2x^2 + x)]^2)' = 2f(2x^2 + x)(4x + 1)f'(2x^2 + x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x^2 + x) = 0 \\ 4x + 1 = 0 \\ f'(2x^2 + x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x = a \quad (a > 1) \\ x = -\frac{1}{4} \\ 2x^2 + x = 1 \\ 2x^2 + x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8a}}{4} \quad (a > 1) \\ x = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

Vì $a > 1$ nên có thứ tự các nghiệm của $g'(x) = 0$ là:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+8a}}{4} < x_2 = -1 < x_3 = -\frac{1}{4} < x_4 = \frac{1}{2} < x_5 = \frac{-1 + \sqrt{1+8a}}{4}$$

Vậy $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn như trên suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua các nghiệm đơn.

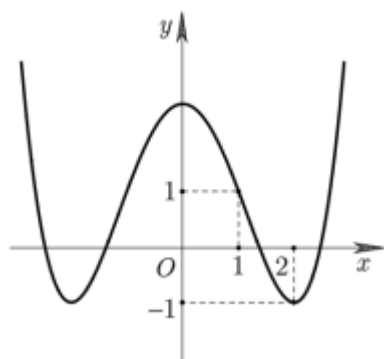
Với $0 \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) (0 \in (x_3; x_4))$. Xét $g'(0) = 2f(0)f'(0) > 0$. Suy ra $g'(x) > 0$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ hay khoảng $(x_3; x_4)$. Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ta có hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ có 2 điểm cực đại là $x = x_2 = -1$ và $x = x_4 = \frac{1}{2}$.

Câu 75. (Chuyên Vinh -2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(1 - x^2)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Ta có

$$g'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot f'\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2} \left[\frac{1}{x} \cdot f'\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot f'\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow f'\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) = x \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = x$$

Đặt ta được $f'(1 - t^2) = \frac{1}{t}$.

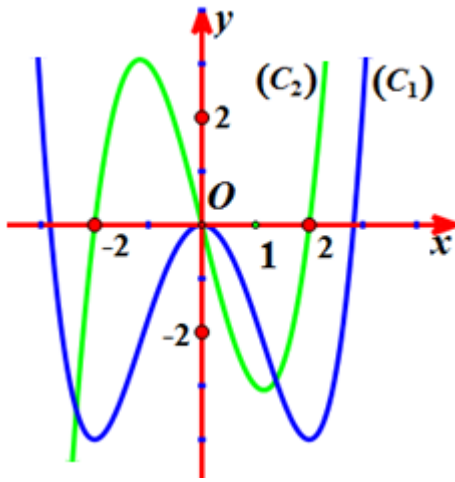
Xét hàm số $h(t) = \frac{1}{t} (t \neq 0) \Rightarrow h'(t) = -\frac{1}{t^2} < 0, \forall t \neq 0$

Vẽ đồ thị hàm $h(t) = \frac{1}{t}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm số $y = f'(1 - t^2)$

Từ đồ thị suy ra $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}$ có 5 điểm cực trị

Câu 76. (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ dưới.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $g(x) = f[e^{-x}f(x)]$ trên khoảng $(-\infty; 3)$ là

- A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.

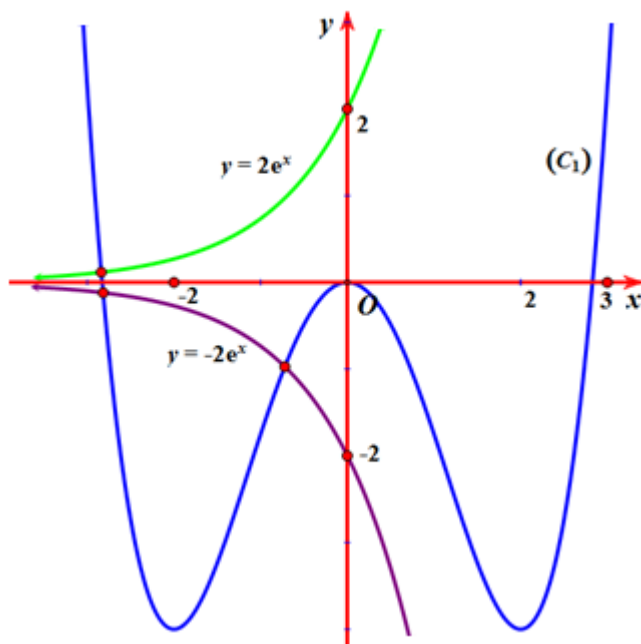
Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = [-e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x)] \cdot f'[e^{-x}f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -f(x) + f'(x) = 0 \\ e^{-x}f(x) = -2 \\ e^{-x}f(x) = 0 \\ e^{-x}f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f'(x) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -2e^x \\ f(x) = 2e^x \end{cases}$$

+ $f(x) = f'(x)$ có bốn nghiệm đơn trong đó 3 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 3 (có một nghiệm $x=0$) và một nghiệm lớn hơn 3.

+ $f(x) = 0$ có hai nghiệm đơn phân biệt và một nghiệm bội chẵn $x=0$.

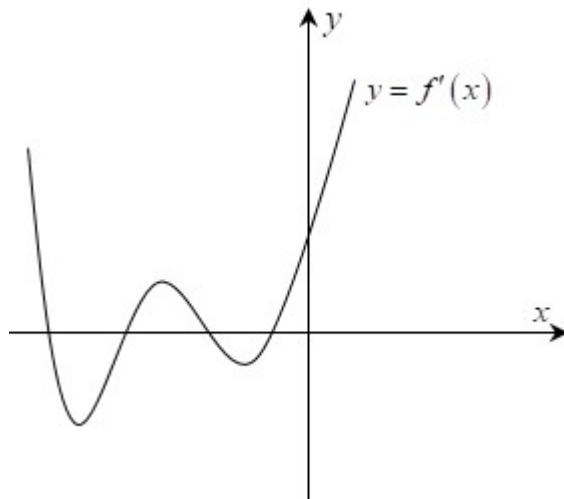


+ $f(x) = 2e^x$ có một nghiệm đơn.

+ $f(x) = -2e^x$ có hai nghiệm đơn phân biệt.

Như vậy, trên khoảng $(-\infty; 3)$ đạo hàm $g'(x)$ đổi dấu qua 8 điểm nên số điểm cực đại và cực tiểu bằng nhau và bằng 4.

Câu 77. (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - x^2|$ là



A. 4.

B. 3.

C. 6.

D. 5.

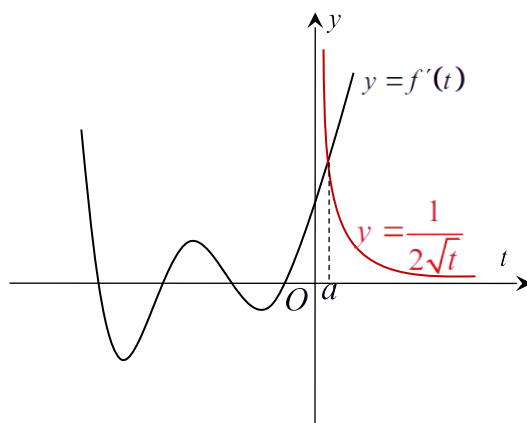
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) - x^2$ có $h'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 2x$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^4) = \frac{1}{2x^2} \quad (*) \end{cases}$$

Xét phương trình $(*)$: Đặt $t = x^4$ thì $(*)$ thành $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ với $t > 0$.



Dựa vào đồ thị, phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm $a > 0$.

Khi đó, ta được $x = \pm \sqrt[4]{a}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4) - x^2$

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$						0	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - x^2|$ bằng số cực trị của hàm $h(x) = f(x^4) - x^2$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(x)$ thì số cực trị của $g(x)$ là 5.

Câu 78. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4

B. 7

C. 9

D. 11

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$* y = h(x) = f(|x|^2 - 2|x|)$$

$$y' = h'(x) = f'(|x|^2 - 2|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \cdot (2|x| - 2).$$

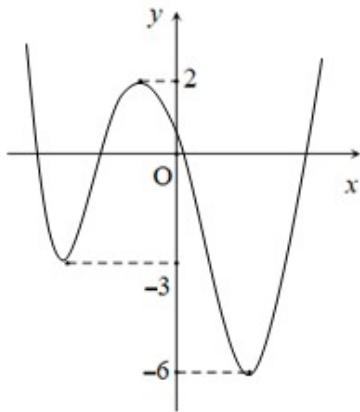
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ |x|^2 - 2|x| = 0 \\ |x|^2 - 2|x| = 1 \\ |x|^2 - 2|x| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta thấy phương trình $h'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn (1).

$h'(x)$ không tồn tại tại $x=0$ mà $x=0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 79. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x)=|2f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 13.

B. 14.

C. 15.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x)=2f(x-1)+m \Rightarrow g(x)=|h(x)|$.

* Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y=h(x)$ + số giao điểm của $y=h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y=h(x)$.

* Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y=h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.

* Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x-1)=-\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.

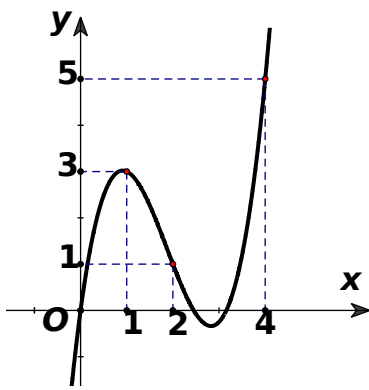
* Đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\frac{m}{2} \geq 2$ hoặc $-6 < -\frac{m}{2} \leq -3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases} \quad -\frac{m}{2} \in \mathbb{Z}; m \in [-12;12] \rightarrow$$

có 15 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 80. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0; f(4)>4$. Biết hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^2) - 2x$.

Ta có: $h'(x) = 2xf'(x^2) - 2$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x}$ (vô nghiệm $\forall x \leq 0$).

Đặt $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}, \forall t > 0$.

Khi đó: $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (*). Nhận thấy trên khoảng $(0; 1)$ thì $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng biến, do đó (*) nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1) = -2(2f'(1) - 2) = -8 < 0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ nên $\exists x_0 \in (0; 1): h'(x_0) = 0$.

Vậy $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0; 1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên).
(1)

Xét phương trình: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) - 2x = 0$ (**).

Ta có: $h(0) = f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của (**).

Mặt khác: $h(\sqrt{x_0}).h(2) = (f(x_0) - 2\sqrt{x_0})(f(4) - 4) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2): h(x_1) = 0$.

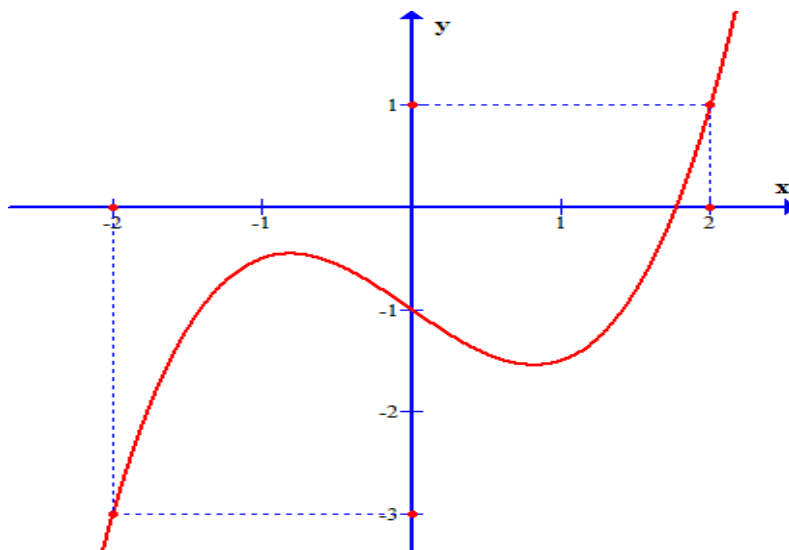
Nên (**) có nghiệm $x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2)$.

Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên (**) có không quá 2 nghiệm.

Vậy $h(x) = f(x^2) - 2x = 0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 81. Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = |2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } h(x) = 2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x = 2f(x^2 + x) - (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x)$$

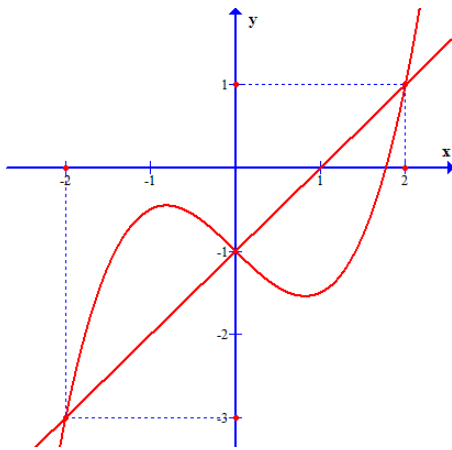
$$\Rightarrow h'(x) = 2(2x+1)f'(x^2+x) - 2(2x+1)(x^2+x) + 2(2x+1)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ f'(x^2+x) - (x^2+x) + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t = x^2 + x$. Khi đó phương trình (*) trở thành $f'(t) - t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow f'(t) = t - 1$$

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t) > t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t < 0 \\ t > 2 \end{cases}$.

Khi đó: $\begin{cases} -2 < x^2 + x < 0 \\ x^2 + x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -2 \vee 1 < x \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$2x+1$	$-$	$ $	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(t)-t+1$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$		$h(-1)=0$		$h(0)=0$		$+\infty$
$g(x)$							

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 7 điểm cực trị.

- Câu 82.** (Chuyên Biên Hòa - 2021) Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1+x-e^x & \text{khi } x > 0 \\ x^2+6x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x-e^x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+6x) = 0$; $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$.

Ta có $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x - e^x}{x} = 0$

Ta có $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 6x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 6) = 6$

$\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

Với $x > 0 \Rightarrow f(x) = 1 + x - e^x$

Tính $f'(x) = 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x \leq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x$

Tính $f'(x) = 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Ta có

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+		-	
$f(x)$	$+\infty$		-9	0		$-\infty$	
$ f(x) $	$+\infty$		9	0		$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là 3.

- Câu 83.** (Chuyên Quang Trung - Bình Phước 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $|f(1 - 2022x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?
- A. 12. B. 10. C. 9. D. 11.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x) = x^3(x - 2)(x^2 - 2) = x^3(x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội 3 nên hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Số điểm cực trị của hàm số $|f(1 - 2022x)|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng $m + n$ (Trong đó m là số điểm cực trị của hàm $f(x)$, n là số nghiệm của $f(x)$ không tính những nghiệm là điểm cực trị).

Theo trên ta có $m = 4$ nên số nghiệm lớn nhất của $f(x)$ là 5 hay $n = 5$.

Hàm số $|f(1 - 2022x)|$ có nhiều nhất 9 điểm cực trị.

- Câu 84. (Đề minh họa 2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?
- A.** 16. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có
$$f'(x) = x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases}$$

$$y' = (4x^3 - 16x)f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x^4 - 8x^2 = -m \\ x^4 - 8x^2 = -m - 10 \end{cases}.$$

Ta có

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^2$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	$+\infty$			0			$+\infty$	
			-16		-16			

Vì $-10 - m < -m$ nên để hàm số đã cho có 9 điểm cực trị thì
$$\begin{cases} -16 < -m - 10 < 0 \\ 0 \leq -m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -10 < m \leq 0$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}$. Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

- Câu 85. (Chuyên Vinh - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?
- A.** 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$

$$f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x^2-8x+m-1=0 \quad (1) \\ x^2-8x+m=0 \quad (2) \\ x^2-8x+m-2=0 \quad (3) \end{cases}$$

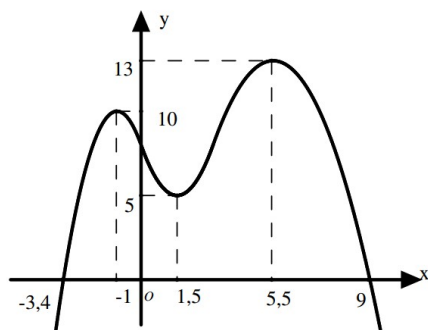
Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-m > 0 \\ 16-m+2 > 0 \\ 16-32+m \neq 0 \\ 16-32+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có **đúng** hai điểm cực trị.



A. 7.

B. 8.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

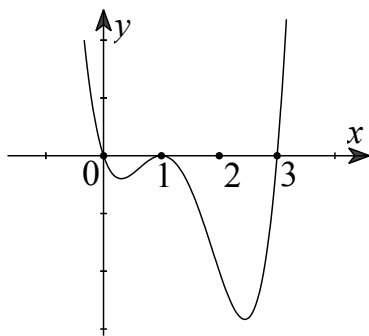
$$g'(x) = f'(x) - m$$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số nghiệm đơn (bội lẻ) của phương trình $f'(x) = m$.

Dựa vào đồ thị ta có điều kiện $\begin{cases} 0 < m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 87. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

- A. $m \in (3; +\infty)$. B. $m \in [0; 3]$. C. $m \in [0; 3)$. D. $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y = f(x^2 + m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$$y = f(x^2 + m) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 + m)$$

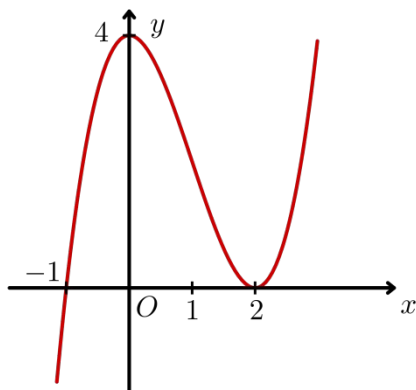
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ nên các nghiệm của pt $x^2 = 1 - m$ (nếu có) không làm $f'(x^2 + m)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của

hàm số $y = f(x^2 + m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \leq 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$.

Câu 88. (Sở Lào Cai - 2021) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ thị (C) của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x) = f(f'(x))$, $h(x) = f'(f(x))$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

A. 12.

B. 11.

C. 8.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Ta lại có:
$$\begin{cases} f'(0) = 4 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ -1 + 3a - 2b + 4 = 0 \\ 8 + 12a + 4b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 3a - 2b = -3 \\ 12a + 4b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

hay $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x$, $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow f''(x) = 3x^2 - 6x$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

• Tìm số cực trị của hàm số: $g(x) = f(f'(x))$

$$g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x) = -1 \\ f'(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

Ta có:

với x_1 là nghiệm của phương trình $f'(x) = -1$

và x_2, x_3, x_4 là ba nghiệm của phương trình $f'(x) = 2$, $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4$

Bảng xét dấu $y = g'(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $g(x) = f(f'(x))$ có 3 cực trị

• Tìm số cực trị của hàm số $h(x) = f'(f(x))$

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{11}{4}$	4	$+\infty$

$$h'(x) = f'(x) \cdot f''(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

Ta có:

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $f(x) = 2$

và $x_3 < x_1 < -1 < x_2 < x_4 < 2$

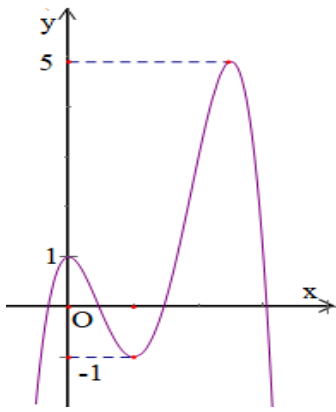
Bảng xét dấu $y = h'(x)$

x	$-\infty$	x_3	x_1	-1	x_2	x_4	2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $h(x) = f'(f(x))$ có 5 cực trị

Vậy tổng có 8 cực trị.

Câu 89. (Liên Trường Nghệ An – 2021) Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2021]$ để hàm số $g(x) = f^2(x) - mf(x)$ có đúng hai điểm cực đại là.



A. 2027.

B. 2021.

C. 2019.

D. 2022.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số của $y = f(x)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$		1		-1		5		$-\infty$

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) - mf(x)$, ta có $g'(x) = 2f(x)f'(x) - mf'(x) = f'(x)[2f(x) - m]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \\ x = b \\ f(x) = \frac{m}{2} \end{cases}$$

Có

Do $g(x)$ là hàm đa thức bậc chẵn, có hệ số của bậc cao nhất là số dương nên để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực đại thì $g'(x)$ phải đổi dấu đúng 5 lần thì $g(x)$ sẽ có ba điểm cực tiểu và hai điểm cực đại. Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x = 0$, $x = a$, $x = b$. Vậy để

$g'(x)$ phải đổi dấu đúng 5 lần thì phương trình $f(x) = \frac{m}{2}$ phải có hai nghiệm phân biệt khác

$0, a, b$ hoặc phương trình $f(x) = \frac{m}{2}$ có ba nghiệm, trong đó có đúng một nghiệm trùng $x = 0$, $x = a$ hoặc $x = b$.

Trường hợp 1: Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác $0, a, b$.

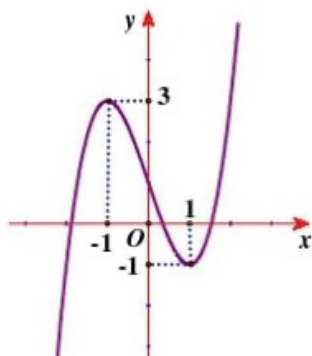
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $\begin{cases} 1 < \frac{m}{2} < 5 \\ \frac{m}{2} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 10 \\ m < -2 \end{cases}$.

Trường hợp 2: Phương trình $f(x) = \frac{m}{2}$ có ba nghiệm, trong đó có đúng một nghiệm trùng $x=0$, $x=a$ hoặc $x=b$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $\begin{cases} \frac{m}{2} = 1 \\ \frac{m}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có 2027 số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2021]$.

Câu 90. (Liên trường Quảng Nam 2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(f^2(x) - 3f(x) - m)$ có ít nhất 13 điểm cực trị?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = f'(x)[2f(x) - 3]f'(f^2(x) - 3f(x) - m)$.

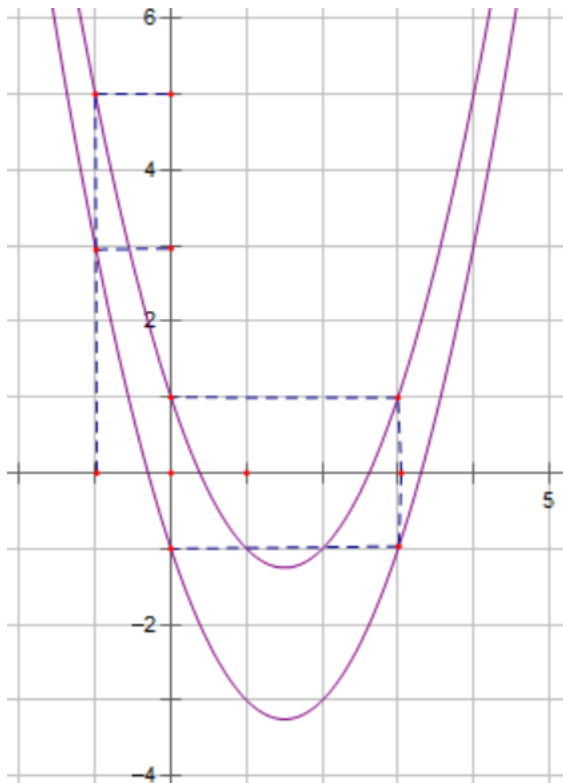
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2f(x) - 3 = 0 \\ f'(f^2(x) - 3f(x) - m) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 1) \\ x = x_3 \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$f'(f^2(x) - 3f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) - 3f(x) - m = -1 \\ f^2(x) - 3f(x) - m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = f^2(x) - 3f(x) + 1 \\ m = f^2(x) - 3f(x) - 1 \end{cases} \quad (1)$$

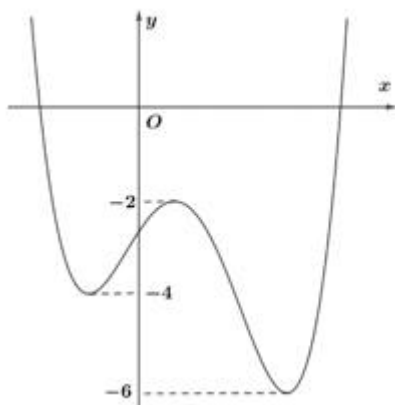
Đặt $f(x) = t$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m = t^2 - 3t + 1 \\ m = t^2 - 3t - 1 \end{cases}$



Hàm số $g(x)$ có ít nhất 13 điểm cực trị khi và chỉ khi $-\frac{5}{4} < m < 3$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\} \therefore$

Câu 91. (Sở Hà Nội 2023) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = (f(x) + m)^2$ có 5 điểm cực trị là

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g(x) = (f(x) + m)^2 \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot (f(x) + m)$

Nên: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -m \end{cases}$. Mà $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm nên để hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình: $f(x) = -m^{(*)}$ phải có 2 nghiệm phân biệt.

Dựa vào hình ảnh đồ thị hàm số thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khi:

$$\begin{cases} -m \geq -2 \\ -6 < -m \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 4 \leq m < 6 \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên: $m \in \{1; 2; 4; 5\} \Rightarrow$ Có 4 giá trị m thỏa mãn.

Câu 92. (Mã 104 - 2021 Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 9)(x^2 - 16), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 7x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16.

B. 9.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \pm 4 \end{cases}$

$$g'(x) = \frac{(3x^2 + 7)(x^3 + 7x)}{\sqrt{(x^3 + 7x)^2}} \cdot f'(|x^3 + 7x| + m)$$

+) $g'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và $\frac{(3x^2 + 7)(x^3 + 7x)}{\sqrt{(x^3 + 7x)^2}}$ đổi dấu khi qua $x = 0$ nên $x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số.

$$f'(|x^3 + 7x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 7x| + m = -4 \\ |x^3 + 7x| + m = 4 \\ |x^3 + 7x| + m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 7x| = -m - 4 \\ |x^3 + 7x| = -m + 4 \\ |x^3 + 7x| = -m + 9 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $|u(x)|$ với $u(x) = x^3 + 7x$

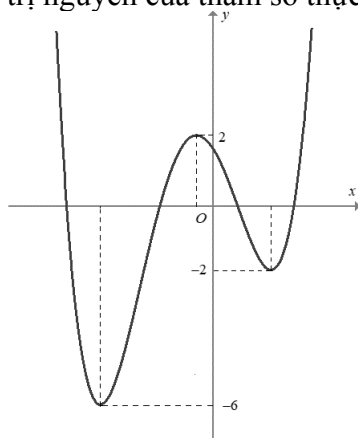
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$		$+$	$+$
$u(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$ u(x) $	$+\infty$	0	$+\infty$

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì hệ ⁽¹⁾ phải có ít nhất 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ khác 0. Mà ta lại thấy $-m+9 > -m+4 > -m-4$.

Nên suy ra $-m+9 > 0 \Rightarrow m < 9$.

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

Câu 93. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g(x) = |f(x+2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị?



A. 1.

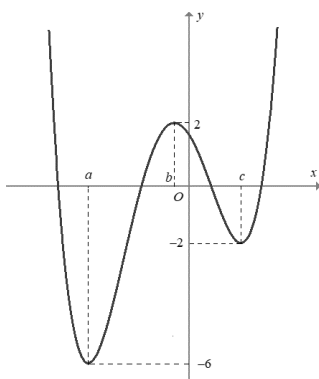
B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B



Gọi a, b, c ($a < b < c$) là ba điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Khi đó: $f(a) = -6; f(b) = 2; f(c) = -2$.

Xét hàm $h(x) = f(x + 2020)$ với $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $h'(x) = f'(x + 2020) \cdot (x + 2020)' = f'(x + 2020)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2020 \\ x = b - 2020 \\ x = c - 2020 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$	$a-2020$	$b-2020$	$c-2020$	$+\infty$				
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$				2				-2	

Hàm số $g(x) = |f(x + 2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị

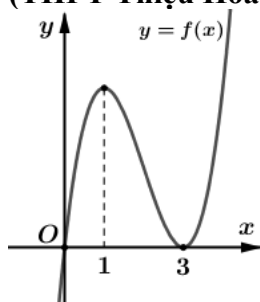
$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x + 2020) + m^2 = 0$ có đúng 2 nghiệm không thuộc

$$\{a - 2020; b - 2020; c - 2020\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 2 \\ m^2 = -2 \\ 2 < m^2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} < m < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < m < \sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m = 2$ và $m = -2$ thì hàm số $g(x) = |f(x + 2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 94. (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > 1$

B. $m \geq 1$

C. $m \leq 2$

D. $m > 2$

Lời giải

Chọn B

Số cực trị của hàm số $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$ bằng số cực trị của hàm số $y(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số $y(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$ và $y = 0$.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + 2f'(x) = 2f'(x)[f(x) + 1]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = \alpha (\alpha < 0) \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$	α	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$						$+\infty$

$+\infty$

$-1+2m$

$2m$

$+\infty$

<

Hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$. Đáp án B là gần kết quả nhất

Câu 95. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2 + 2mx + m + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương, hay phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x^2 + 2mx + m + 1) = 0$ có đúng 2 nghiệm bội lẻ dương.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 + 2mx + m + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có

Xét các trường hợp

+ Trường hợp $(*)$ có 1 nghiệm dương khác 1 và 1 nghiệm bằng 0, hay $\begin{cases} m+1=0 \\ -2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$.

+ Trường hợp (*) có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm dương khác 1, hay

$$\begin{cases} 1+2m+m+1 \neq 0 \\ m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{2}{3} \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$$

Vậy với $m \leq -1$ thì $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Vì $m > -10$ nên $m \in [-9; -8; \dots; -1]$, có 9 giá trị.

Câu 96. (Chuyên ĐHSPT - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y						

Đặt $h(x) = |m - f(x-2)|$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = h(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. Vô số.

B. 12.

C. 0.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = m - f(x-2)$, $g'(x) = -f'(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=a \\ x-2=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+2 \\ x=b+2 \end{cases}$

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$:

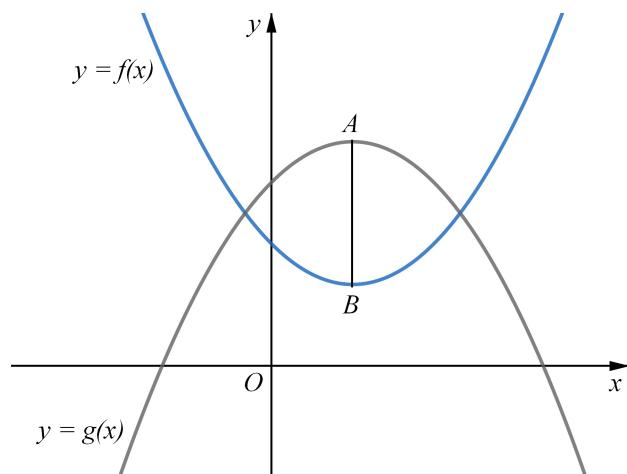
x	$-\infty$	$a+2$		$b+2$	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$						

Để hàm số $y = h(x)$ có 5 cực trị khi đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, tức là: $m-6 < 0 < m+5 \Leftrightarrow -5 < m < 6$.

Vậy: Có 10 giá trị của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 97. (Chuyên Tuyên Quang - 2021) Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là các đường cong như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là B , đồ thị hàm số

$y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là A và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2021; 2021)$ để hàm số $y = ||f(x) - g(x)| + m|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 2019

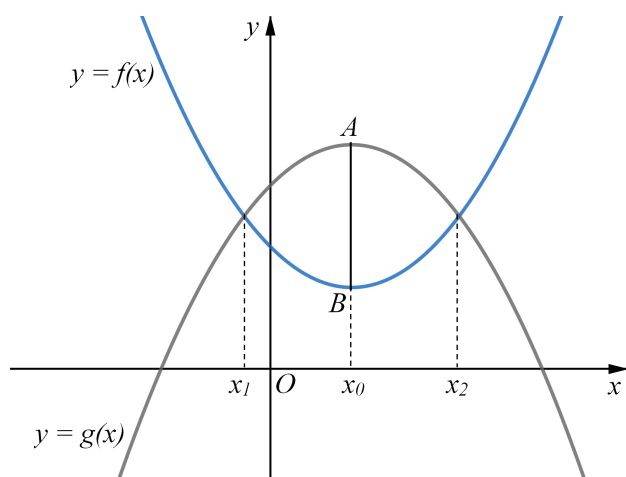
B. 2021

C. 2022

D. 2020

Lời giải

Chọn A



♦ Đặt: $h(x) = f(x) - g(x)$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$

$h'(x) = f'(x) - g'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$. Từ các đồ thị đã cho, ta có: $x_1 < x_0 < x_2$.

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = -[g(x_0) - f(x_0)] = -AB = -\frac{7}{4}$$

Bảng biến thiên của $h(x)$ và $|h(x)|$:

x	$-\infty$	x_1	x_0	x_2	$+\infty$
$h'(x)$	-	-	0	+	+
$h(x)$	$+\infty$		$-\frac{7}{4}$		$+\infty$
$ h(x) $	$+\infty$	0	$\frac{7}{4}$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy: hàm số $y = |h(x)|$ có 3 điểm cực trị.

♦ Đồ thị hàm số $y = |h(x)| + m$ có cùng số điểm cực trị với đồ thị hàm số $y = |h(x)|$. Do đó, hàm số $y = |h(x)| + m$ cũng có 3 điểm cực trị.

♦ Hàm số $y = ||h(x)| + m|$ có số điểm cực trị bằng số điểm cực trị của hàm số $y = |h(x)| + m$ cộng số giao điểm không trùng với các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |h(x)| + m$ với trục Ox .

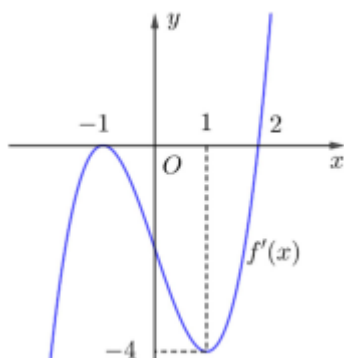
Vì vậy, để hàm số $y = ||h(x)| + m|$ có đúng 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = |h(x)| + m$ và trục Ox phải có 2 giao điểm khác các điểm cực trị hay đường thẳng $y = -m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = |h(x)|$ tại 2 điểm phân biệt khác các điểm cực trị.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = |h(x)|$, điều kiện của m thỏa mãn ycbt là:
 $-m \geq -\frac{7}{4} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{4}$

$$m \in (-2021; 2021) \text{ và } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2020; -2019; \dots; -2\}$$

Vậy số giá trị nguyên của m thỏa mãn là: 2019.

Câu 98. (THPT Phù Cừ - Hưng Yên - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 4|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có $g'(x) = (2x^2 - 4|x| + m - 3)' \cdot f'(2x^2 - 4|x| + m - 3)$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 4|x| + m - 3)' \cdot f'(2x^2 - 4|x| + m - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 4|x| + m - 3)' = 0 \\ f'(2x^2 - 4|x| + m - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 4|x| + m - 3)' = 0 \\ 2x^2 - 4|x| + m - 3 = -1 \\ 2x^2 - 4|x| + m - 3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 4|x| + m - 3)' = 0 & (1) \\ 2x^2 - 4|x| - 3 = -m - 1 & (2) \\ 2x^2 - 4|x| - 3 = -m + 2 & (3) \end{cases}$$

+) Xét phương trình $(2x^2 - 4|x| + m - 3)' = 0$ (1)

Với $x \geq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

Với $x < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (thỏa mãn).

Khi đó $x = -1; x = 0; x = 1$ là 3 điểm cực trị của hàm số.

+) Xét phương trình $2x^2 - 4|x| - 3 = -m - 1$ (2).

Từ đồ thị suy ra phương trình (2) nếu có nghiệm thì nghiệm là bội chẵn nên hàm số $g'(x)$ không đổi dấu nên không phải là cực trị.

+) Xét phương trình $2x^2 - 4|x| - 3 = -m + 2$

Yêu cầu bài toán suy ra phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác $0, \pm 1$.

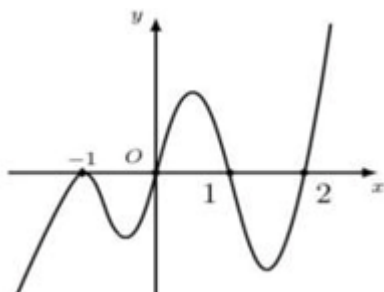
Xét hàm số $y = 2x^2 - 4|x| - 3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-5	-3	-5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $-5 < -m + 2 < -3 \Leftrightarrow 5 < m < 7$.

Vì m nguyên nên $m = 6$. Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 99. (Thị xã Quảng Trị 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = f\left(x^2 - 2|x| + \frac{m}{2}\right)$ có 9 điểm cực trị là

A. 11.

B. 13.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị trên ta suy ra: $f'(x) = (x+1)^2 x(x-1)(x-2)$ (trong đó $x = -1$ là nghiệm bội chẵn).

Khi đó ta xét: $y = g(x) = f\left(|x|^2 - 2|x| + \frac{m}{2}\right)$ có $g(-x) = g(x)$ nên suy ra $g(x)$ là hàm chẵn.

Suy ra hàm số $h(x) = f\left(x^2 - 2x + \frac{m}{2}\right)$ phải có 4 điểm cực trị dương tức phương trình $h'(x) = 0$ có 4

nghiệm

bội

lẻ

dương

phân

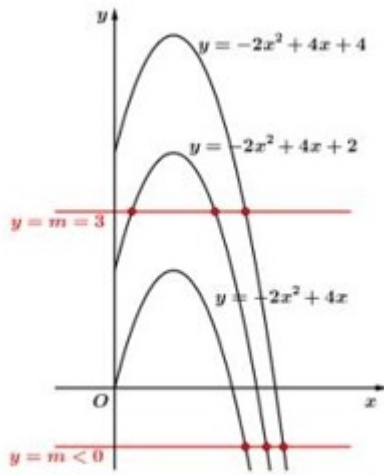
biệt.

$$h'(x) = (2x-2)f'\left(x^2 - 2x + \frac{m}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; x^2 - 2x + \frac{m}{2} = 0 \\ x^2 - 2x + \frac{m}{2} = 1; x^2 - 2x + \frac{m}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x^2 + 4x + 2 \\ m = -2x^2 + 4x + 4 \\ m = -2x^2 + 4x \end{cases}$$

Khi đó ta cần hệ:
về sau

có 3 nghiệm dương phân biệt khác 1. Từ đó ta có hình



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m = 3 \end{cases} \xrightarrow{m \in (-10; 10)} m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0; 3\}$$

Từ hình vẽ trên ta suy ra: ycbt nguyên m thỏa mãn.

tức có 11 giá trị

Câu 100. (Chuyên Vinh 2023) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên

đương của tham số m để hàm số $y = |f(x^2 + m - 5)|$ có ít nhất 7 điểm cực trị?

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

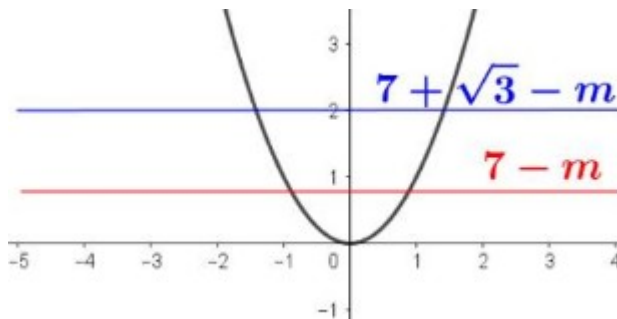
Chọn A

Cho $f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Điều kiện để hàm số $y = |f(x^2 + m - 5)|$ có ít nhất 7 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x^2 + m - 5) = 0$ có ít nhất 4 nghiệm đơn phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + m - 5 = 2 \\ x^2 + m - 5 = 2 + \sqrt{3} \\ x^2 + m - 5 = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 - m \\ x^2 = 7 + \sqrt{3} - m \\ x^2 = 7 - \sqrt{3} - m \end{cases} \text{ có ít nhất 4 nghiệm đơn phân biệt.}$$



Từ đồ thị suy ra $7 - m > 0 \Leftrightarrow m < 7$. Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^+$, ta có: $m \in \{1; 2; \dots; 6\}$.