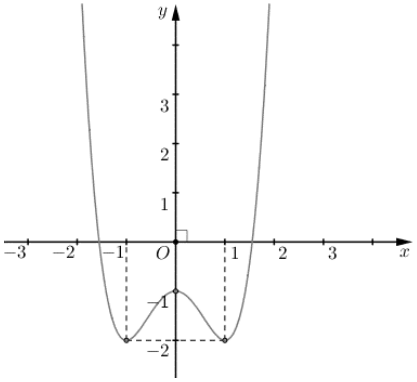
ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ 1 – TOÁN 12 – ĐỀ SỐ 9

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án chọn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án đúng nhất.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

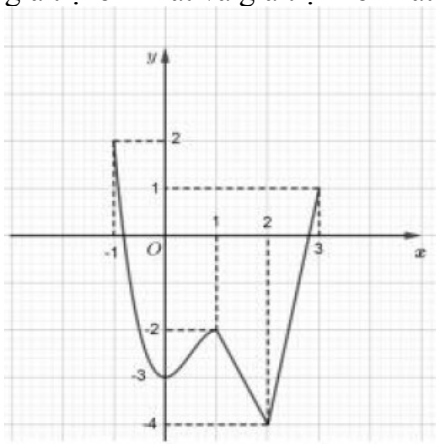


A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(0;1)$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là



A. 2 **B.** -6 **C.** -5 **D.** -2

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-4x^2+5$ trêm đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 122 **B.** 50 **C.** 5 **D.** 1

Câu 5. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 6. Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$ là

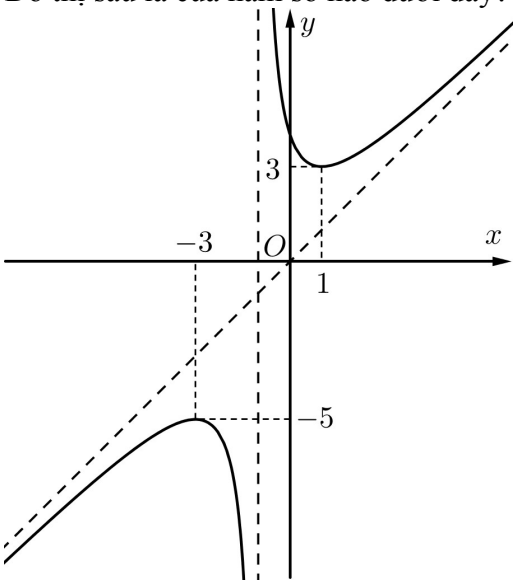
A. $(1;2)$.

B. $(1;1)$.

C. $(1;-1)$.

D. $(1;0)$.

Câu 7. Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x+10}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+5x-2}{x+1}$.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$

A. $k=2$. **B.** $k=3$. **C.** $k=\dfrac{1}{2}$. **D.** $k=\dfrac{1}{3}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O. Chọn đẳng thức **sai.**

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$. **B.** $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D_1A}=0$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{OC_1}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

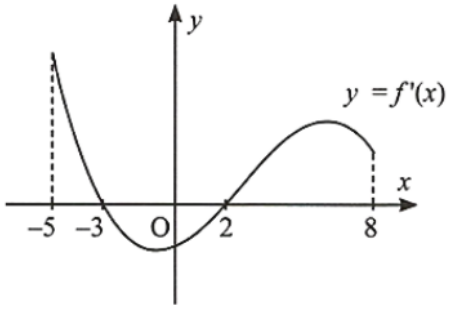
Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ i và $u=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. 120°. **B.** 60°. **C.** 150°. **D.** 30°.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Đạo hàm $y=f'(x)$ của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như Hình.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;2)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0
			$-\infty$		1		

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

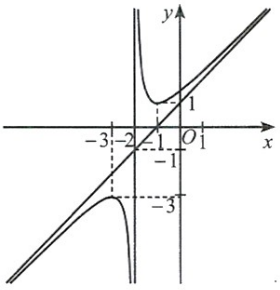
a) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng.

b) Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

c) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

d) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 1.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ (với $a,m\neq 0$) có đồ thị là đường cong như Hình



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x=-2$, tiệm cận xiên: $y=x+1$.

c) Phương trình $f(x)=3$ có ba nghiệm phân biệt

d) Khi $m=1$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(1;\frac{7}{3}\right)$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'(1;0;1), B'(2;1;2), D'(1;-1;1), C(4;5;-5)$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A'D'}$ là $(0;-1;0)$.

b) Gọi toạ độ của điểm B là $(x_B;y_B;z_B)$, ta có tọa độ của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $(x_B-4;y_B-5;z_B+5)$.

c) Trong hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}$.

d) Toạ độ điểm B là $(4;4;-5)$.

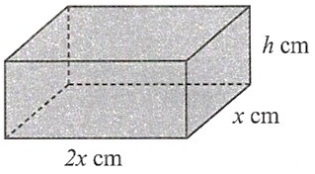
Phần 3. Câu trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời đáp án từ câu 1 đến câu 6.

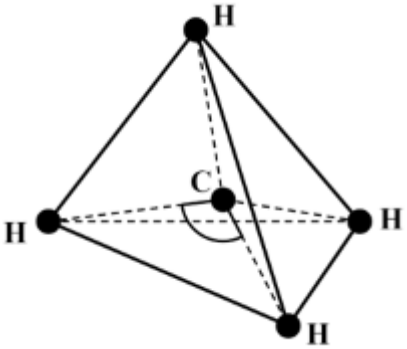
Câu 1. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=4km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC=7km$. Người canh hải đăng chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $6km/h$ rồi đi xe đạp từ M đến C với vận tốc $10km/h$. Người đó nên chèo thuyền trong bao nhiêu ki-lô-mét nếu anh ta muốn đến nơi trong thời gian ngắn nhất?

Câu 2. Sau khi tiêm một loại thuốc vào cơ thể bệnh nhân, nồng độ thuốc trong máu (tính theo mg/cm^3) thay đổi theo công thức $C(t)=\frac{0,15t}{t^2+1}$, trong đó t là thời gian (tính theo giờ) kể từ thời điểm tiêm thuốc, $t\geq 0$. Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mg/cm^3 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

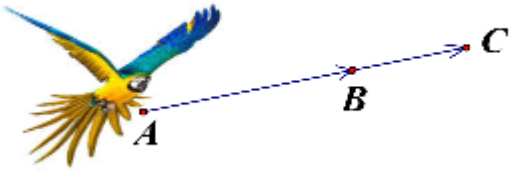
Câu 3. Người ta muốn làm một chiếc hộp kim loại hình hộp chữ nhật có thể tích $72cm^3$ và đáy có chiều dài gấp đôi chiều rộng (Hình). Tính diện tích toàn phần nhỏ nhất đạt được của chiếc hộp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm^3).



Câu 4. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H-C-H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tính số đo góc liên kết này (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Câu 5. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị tính bằng mét). Bạn Huyền quan sát và phát hiện một con chim đang bay với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(20;40;30)$ đến điểm $B(40;50;50)$ trong vòng 4 phút.



Nếu con chim bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 2 phút con chim ở vị trí $C(a;b;c)$. Tính tổng $a+b+c$

Câu 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$.

PHIẾU TRẢ LỜI

PHẦN I

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○
3	○	○	○	○
4	○	○	○	○
5	○	○	○	○
6	○	○	○	○
7	○	○	○	○
8	○	○	○	○
9	○	○	○	○
10	○	○	○	○

	A	B	C	D
11	○	○	○	○
12	○	○	○	○

Điểm
Điểm phần I: ..... đ
Điểm phần II: ..... đ
Điểm phần III: ..... đ
Tổng: ..... đ

PHẦN II

	Câu 1		Câu 2	
	Đúng	Sai	Đúng	Sai
a)	○	○	○	○
b)	○	○	○	○
c)	○	○	○	○
d)	○	○	○	○

	Câu 3		Câu 4	
	Đúng	Sai	Đúng	Sai
a)	○	○	○	○
b)	○	○	○	○
c)	○	○	○	○
d)	○	○	○	○

PHẦN III

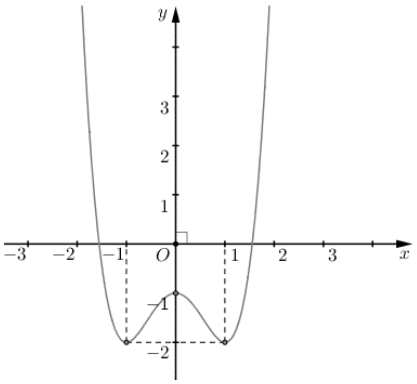
	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
	□□□□	□□□□	□□□□	□□□□	□□□□	□□□□
−	○	○	○	○	○	○
,	○○	○○	○○	○○	○○	○○
0	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
1	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
2	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
3	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
4	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
5	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
6	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
7	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
8	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
9	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án chọn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án đúng nhất.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

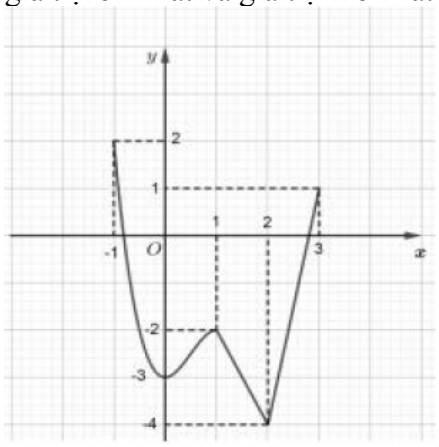
Lời giải

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(x+2)(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$$

Ta có

Các nghiệm này là các nghiệm đơn nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là



A. 2 **B.** -6 **C.** -5 **D.** -2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy GTLN của hàm số trên đoạn $[-1;3]$ là $M=2$ đạt được tại $x=-1$ và GTNN của hàm số số trên đoạn $[-1;3]$ là $m=-4$ đạt được tại $x=2$

$\Rightarrow M+m=2+(-4)=-2$

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-4x^2+5$ trêm đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 122 **B.** 50 **C.** 5 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\in[-2;3]$;

$f(0)=5;f(\pm\sqrt{2})=1;f(-2)=5;f(3)=50$

Vậy $\underset{[-2;3]}{Max}\,y=50$

Câu 5. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to-3^+}y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-3^-}y=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-3$ làm tiệm cận đứng.

Câu 6. Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$ là

A. $(1;2)$.

B. $(1;1)$.

C. $(1;-1)$.

D. $(1;0)$.

Lời giải

Ta viết lại $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}=2x-1+\dfrac{1}{x-1}$.

Suy ra

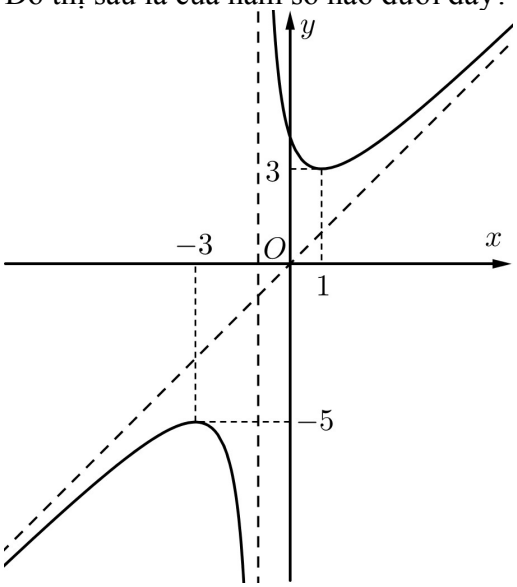
- Tiệm cận đứng $x=1$;

- Tiệm cận ngang $y=2x-1$.

Xét hệ $\begin{cases} x=1 \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Chọn đáp án **B**

Câu 7. Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x+10}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+5x-2}{x+1}$.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ hàm số: $y=-x^3+2x^2-1$, cho $x=0\rightarrow y=-1$.

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$

A. $k=2$. **B.** $k=3$. **C.** $k=\dfrac{1}{2}$. **D.** $k=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O. Chọn đẳng thức **sai.**

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$. **B.** $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D_1A}=0$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{OC_1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AD_1}$ mà $\overrightarrow{AB_1}\neq\overrightarrow{AD_1}$ nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$ sai.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}=(2-1;2-1;1-(-2))$ hay $\overrightarrow{AB}=(1;1;3)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ i và $u=(-\sqrt{3};0;1)$ là

A. 120°. **B.** 60°. **C.** 150°. **D.** 30°.

Lời giải

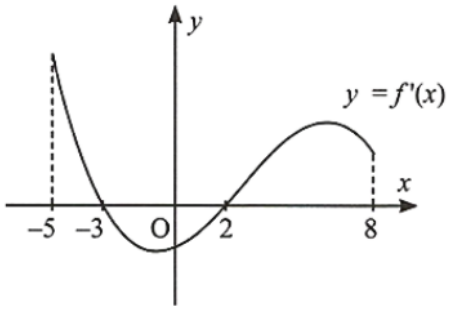
Ta có $i=(1;0;0)$.

Vậy: $\cos(i,u)=\dfrac{i.u}{|i|.|u|}=\dfrac{1.(-\sqrt{3})+0.0+0.1}{1.\sqrt{(-\sqrt{3})^2+0^2+1^2}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(i,u)=150^\circ$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Đạo hàm $y=f'(x)$ của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như Hình.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;2)$.

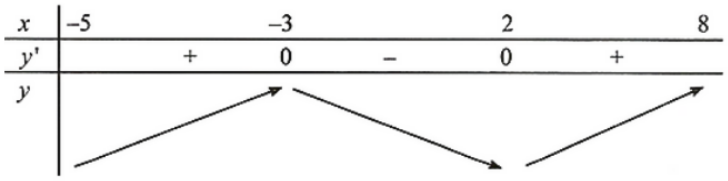
c) Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

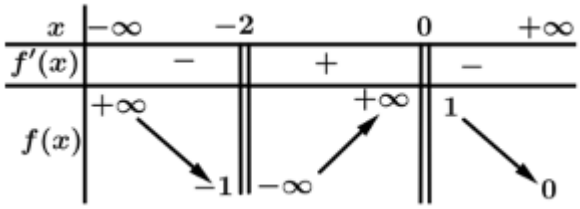
Từ đồ thị, ta có $f'(x)$ dương trên các khoảng $(-5;-3),(2;8)$ và âm trên khoảng $(-3;2)$. Do đó ta có bảng biến thiên:



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-5;-3)$ và $(2;8)$, nghịch biến trên khoảng $(-3;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng.

b) Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

c) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

d) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 1.

Lời giải

a) Đúng	**b) Đúng**	**c) Sai**	**d) Sai**

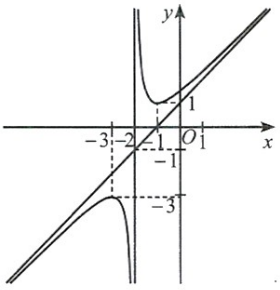
a) Đúng. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng $x=-2;x=0$.

b) Đúng. Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

c) Sai. Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

d) Sai. Hàm số đã cho không có điểm cực đại.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ (với $a,m\neq 0$) có đồ thị là đường cong như Hình



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x=-2$, tiệm cận xiên: $y=x+1$.

c) Phương trình $f(x)=3$ có ba nghiệm phân biệt

d) Khi $m=1$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(1;\frac{7}{3}\right)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

b) Tiệm cận đứng: $x=-2$, tiệm cận xiên: $y=x+1$.

c) Số nghiệm của phương trình $f(x)=3$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y=3$. Căn cứ vào đồ thị hàm số, phương trình $f(x)=3$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Khi $m=1$ tìm được hàm $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$, vậy đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(1;\frac{7}{3}\right)$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'(1;0;1), B'(2;1;2), D'(1;-1;1), C(4;5;-5)$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A'D'}$ là $(0;-1;0)$.

b) Gọi toạ độ của điểm B là $(x_B;y_B;z_B)$, ta có tọa độ của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $(x_B-4;y_B-5;z_B+5)$.

c) Trong hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}$.

d) Toạ độ điểm B là $(4;4;-5)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Ta có: $\overrightarrow{A'D'}=(1-1;-1-0;1-1)=(0;-1;0)$.

Gọi tọa độ của điểm B là $(x_B;y_B;z_B)$, ta có: $\overrightarrow{BC}=(4-x_B;5-y_B;-5-z_B)$.

Trong hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}$.

Suy ra: $\begin{cases}4-x_B=0\\5-y_B=-1\\-5-z_B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=4\\y_B=6\\z_B=-5\end{cases}$

Vậy tọa độ của điểm $B(4;6;-5)$.

Phần 3. Câu trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời đáp án từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=4km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC=7km$. Người canh hải đăng chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $6km/h$ rồi đi xe đạp từ M đến C với vận tốc $10km/h$. Người đó nên chèo thuyền trong bao nhiêu ki-lô-mét nếu anh ta muốn đến nơi trong thời gian ngắn nhất?

Lời giải

Đáp số: 5.

Đặt $BM=x(0\le x\le 7)$. Từ đó ta tính được $AM=\sqrt{16+x^2};MC=7-x$. Thời gian người đó đi từ A đến C là $\frac{\sqrt{16+x^2}}{6}+\frac{7-x}{10}$.

Đặt $f(x)=\frac{\sqrt{16+x^2}}{6}+\frac{7-x}{10}$.

Ta có $f'(x)=\frac{x}{6\sqrt{16+x^2}}-\frac{1}{10}=0\Leftrightarrow 5x=3\sqrt{16+x^2}\Leftrightarrow x=3$.

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=3$ và khi $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $AM=\sqrt{16+3^2}=5$.

Câu 2. Sau khi tiêm một loại thuốc vào cơ thể bệnh nhân, nồng độ thuốc trong máu (tính theo mg/cm^3) thay đổi theo công thức $C(t)=\frac{0,15t}{t^2+1}$, trong đó t là thời gian (tính theo giờ) kể từ thời điểm tiêm thuốc, $t\ge 0$. Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mg/cm^3 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Đáp số: 0,08 mg/ cm^3.

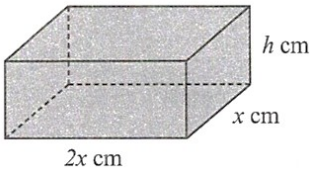
Ta có $C'(t)=\frac{0,15(1-t^2)}{(t^2+1)^2},t\ge 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $C(t)$ trên $(0;+\infty)$.

t	0		1		$+\infty$
$C'(t)$		+	0	−	
$C(t)$	0	↗	0,075	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng $0,08mg/cm^3$.

Câu 3. Người ta muốn làm một chiếc hộp kim loại hình hộp chữ nhật có thể tích $72cm^3$ và đáy có chiều dài gấp đôi chiều rộng (Hình). Tính diện tích toàn phần nhỏ nhất đạt được của chiếc hộp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm^3).



Lời giải

Trả lời: 108

Ta có $x \cdot 2x \cdot h = 72 \Rightarrow h = \frac{36}{x^2}$.

Diện tích toàn phần của chiếc hộp là:

$$S(x) = 2(x.2x + xh + 2xh) = 2\left(2x^2 + 3xh\right) = 4x^2 + \frac{216}{x}, x > 0.$$

$$S'(x) = 8x - \frac{216}{x^2}.$$

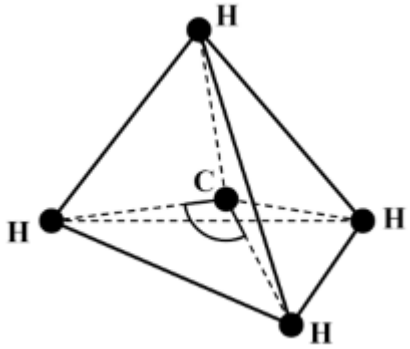
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3.$$

Bảng biến thiên:

x	0		3		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$S(x)$	‖ $+\infty$	↘	108	↗	$+\infty$

Vậy diện tích toàn phần nhỏ nhất của chiếc hộp là $108cm^2$.

Câu 4. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H - C - H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tính số đo góc liên kết này (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Lời giải

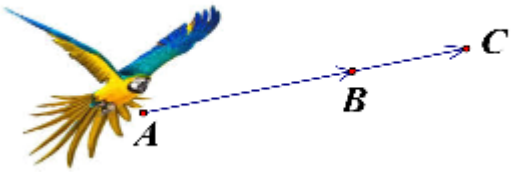
Trả lời: 109

Xét tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=0$ và $GA=GB=GC=x$

Ta có: $-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$, bình phương hai vế ta được $GA^2=GB^2+GC^2+GD^2+2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GD}+2\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GD}$

$\Leftrightarrow x^2=3x^2+2x^2\cos\alpha+2x^2\cos\alpha+2x^2\cos\alpha\Leftrightarrow -2x^2=6x^2\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{-1}{3}\Rightarrow\alpha\approx109^\circ$.

Câu 5. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị tính bằng mét). Bạn Huyền quan sát và phát hiện một con chim đang bay với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(20;40;30)$ đến điểm $B(40;50;50)$ trong vòng 4 phút.



Nếu con chim bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 2 phút con chim ở vị trí $C(a;b;c)$. Tính tổng $a+b+c$

Lời giải

Đáp số: 165

Vì hướng bay và vận tốc bay của con chim không đổi nên $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Mặt khác do thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow\begin{cases}40-20=2(a-40)\\50-40=2(b-50)\\50-30=2(c-50)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=100\\2b=110\\2c=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=50\\b=55\\c=60\end{cases}\Rightarrow a+b+c=165$$

Câu 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$.

Lời giải

Trả lời: -83

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge3\\y\ge-3\end{cases}$.

Ta có $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow(x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3}\ge4(x+y)$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+y\ge4\\x+y\le0\end{bmatrix}$ (1).

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được:

$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\le2\sqrt{2(x+y)}\Leftrightarrow x+y\le8$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $x+y\in[4;8]$

Ta lại có $(x+3)(y+3)\geq 0\Leftrightarrow xy\geq -3(x+y)-9$.

Đặt $t=x+y$ suy ra $P=4(x^2+y^2)+15xy=4(x+y)^2+7xy\geq 4t^2-21t-63$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2-21t-63$, với $t\in[4;8]$

Ta có $f'(t)=8t-21=0\Leftrightarrow t=\frac{21}{8}\notin[4;8]$. Do đó $\min_{[4;8]} f(t)=f(4)=-83$.

Do đó $P\geq -83$ suy ra $\min P=-83$ khi $\begin{cases}x+y=4\\ x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=-3\end{cases}$.