Nguyễn Văn Linh-Bắc Ninh email:lovemathforever@yahoo.com

PHƯƠNG PHÁP VẼ ĐƯỜNG PHỤ TRONG HÌNH HỌC

(tham khảo: định lý hình học và các phương pháp chứng minh)
http://diendan3t.net/forum

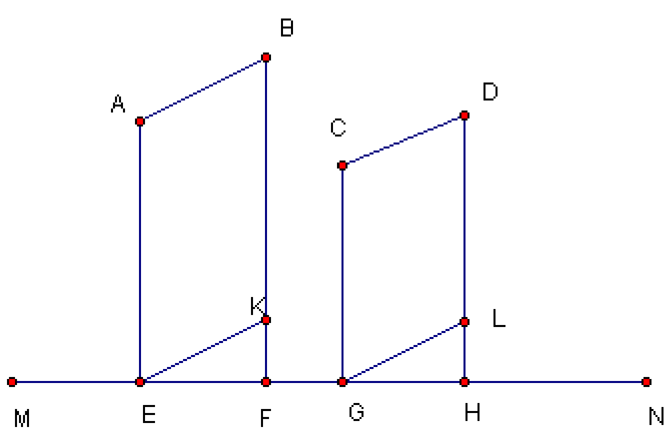
Mở đầu:

Khi chứng minh định lý hình học, phần nhiều chúng ta phải vẽ thêm đường phụ. Đường phụ tạo nên mối quan hệ giữa giả thiết với kết luận, làm cho bài toán trở nên đơn giản và dễ dàng hơn. Tuy nhiên, đường phụ có nhiều loại, nên không có một phương pháp vẽ cố định, đó là một việc khó trong chứng minh. Vẽ đường phụ sao cho có lợi là vấn đề cần đào sâu suy nghĩ. Trong bài viết này, tôi xin nêu một số nét lớn về vấn đề vẽ đường phụ, hi vọng có thể giúp các bạn vượt qua khó khăn trong bộ môn hình học.

I. Mục đích của vẽ đường phụ:

1. Đem những điều kiện đã cho của bài toán và những hình có liên quan đến việc chứng minh tập hợp vào một nơi (một hình mới), làm cho chúng có liên hệ với nhau.

Ví dụ: Chứng minh rằng hai đoạn thẳng song song và bằng nhau thì hình chiếu của chúng trên một đường thẳng thứ ba cũng bằng nhau.



Suy nghĩ: Sự bằng nhau của AB và CD và sự bằng nhau của EF và GH không thấy ngay được là có liên quan đến nhau.

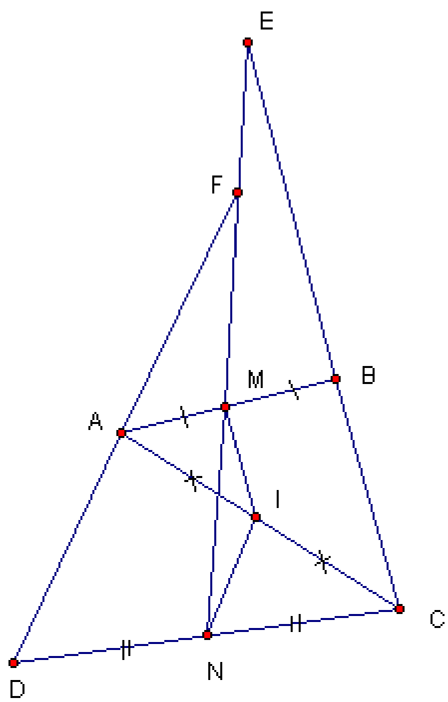
Hướng 1: Quan sát hình vẽ ta thấy AE//BF//CG//DL, từ đó giúp chúng ta nghĩ ra cách dựng thêm EK//AB//CD//GL để tạo ra hai hình bình hành ABKE và CDLG. Suy ra AB=CD=EK=GL. Tiếp đó dựa vào hai tam giác EKF,GLH bằng nhau theo trường hợp cạnh huyền góc nhọn và cuối cùng có EF=GH.

Hướng 2:

Để chứng minh EF=GH ta có thể tạo ra đoạn thẳng mới cùng bằng EF và GH. Điều này dễ có bằng cách từ A,C lần lượt kẻ AI,CQ//MN ($I \in BF, Q \in DH$). Tiếp đó $\Delta ABI = \Delta CDQ$ (cạnh huyền-góc nhọn) suy ra AI=CQ=EF=GH.

2. Tạo nên đoạn thẳng thứ ba hoặc góc thứ ba, làm cho hai đoạn thẳng hoặc hai góc cần chứng minh trở nên có liên hệ.

Ví dụ: Tứ giác ABCD có cạnh AD=BC. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,CD. CB,DA cắt NM tại E,F. Chứng minh rằng $\angle DFN = \angle CEN$



Suy nghĩ: Hai góc E và F trên hình vẽ dường như không có quan hệ gì với nhau. Do đó ta tìm cách tạo ra góc thứ 3 cùng bằng hai góc trên.

Giải: Gọi I là trung điểm AC. Nối MI,NI.

MI,NI lần lượt là đường trung bình tam giác ABC,ADC nên MI//BC, NI//AD

$\Rightarrow \angle IMN = \angle CEN, \angle INM = \angle DFN$ (1)

Mặt khác MI=$\frac{1}{2}$BC=$\frac{1}{2}$AD=IN

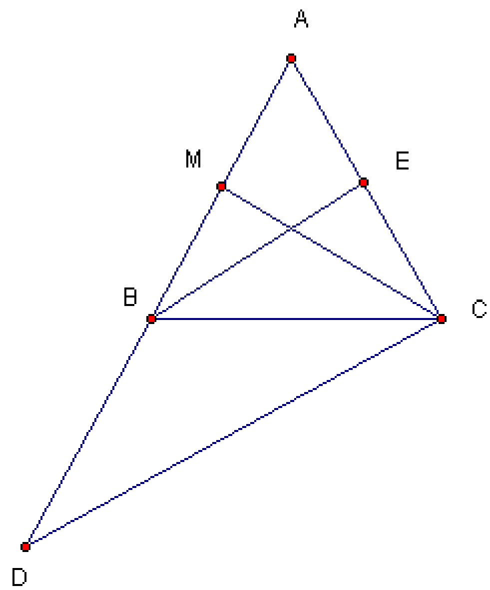
Do đó tam giác MIN cân tại I.

$\Rightarrow \angle IMN = \angle INM$ (2)

Từ (1)(2)$\Rightarrow \angle DFN = \angle CEN$ (đpcm)

3. Tạo nên đoạn thẳng hay góc bằng tổng, hiệu, gấp đôi hay bằng $\frac{1}{2}$ đoạn thẳng hay góc cho trước, để đạt mục đích chứng minh định lý.

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân ở A, trung tuyến CM. Trên tia đối của BA lấy điểm D sao cho BD=BA. CMR: CM=$\frac{1}{2}$CD.

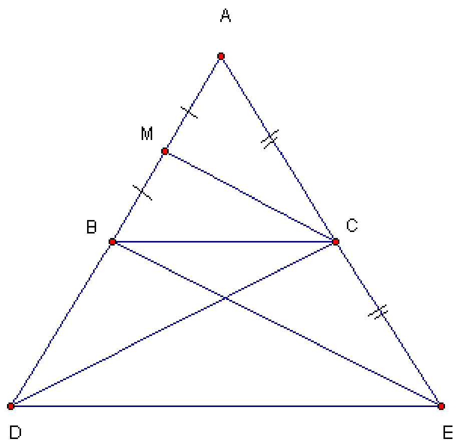


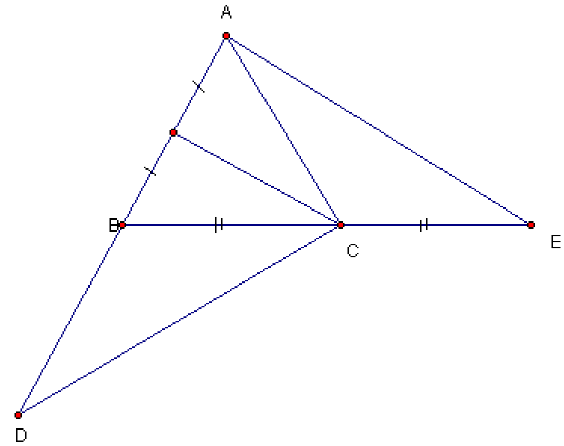
Suy nghĩ:

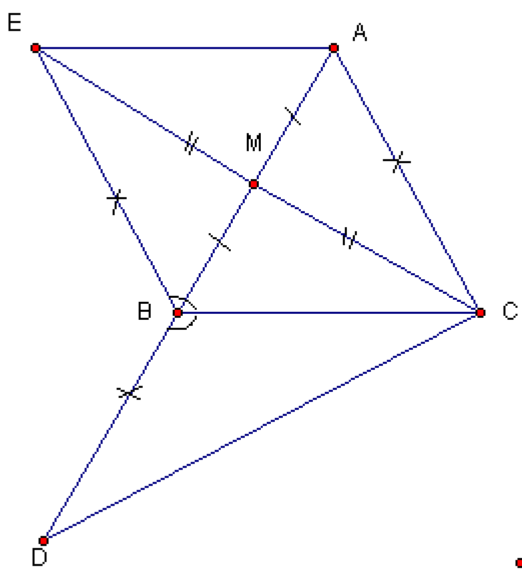
Bài toán yêu cầu DC=2MC hướng ta tạo ra một đoạn thẳng mới bằng MC và bằng $\frac{1}{2}$DC.Mặt khác nhìn hình vẽ có B là trung điểm AD lại làm ta nghĩ đến định lý về đường trung bình của tam giác. Đường phụ cần vẽ là trung tuyến BE của tam giác ABC. BE là đường trung bình tam giác ADC nên DC=2BE. Do tam giác ABC cân tại A nên BE=CM. Từ đó có đpcm.

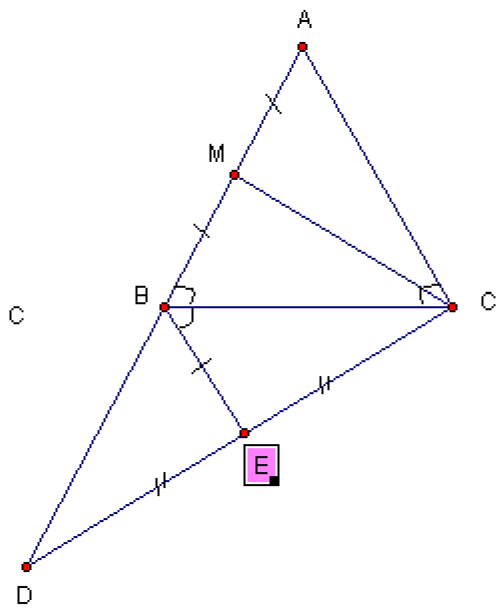
Chú ý: Thay vì vẽ thêm đoạn thẳng bằng 1/2 DC ta cũng có thể tạo ra một đoạn thẳng bằng DC và gấp 2 lần BE. Điều này đơn giản, có thể trên tia đối của CA lấy điểm E sao cho CA=CE rồi nối BE, hoặc trên tia đối CB lấy điểm E sao cho CE=CB rồi nối AE...

Bài toán trên có khoảng 5,6 cách. Mong các bạn tiếp tục suy nghĩ tìm ra cách giải mới.







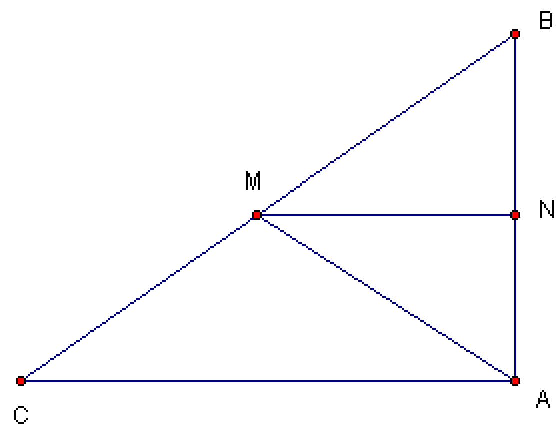


....

4. Tạo nên những đại lượng mới (đoạn thẳng hoặc góc) bằng nhau; thêm vào những đại lượng bằng nhau mà bài ra đã cho để giúp cho việc chứng minh.

Ví dụ:

Chứng minh rằng trong một tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng 1/2 cạnh huyền. (*)



Suy nghĩ:

Đầu bài chỉ cho CM=BM, như vậy chưa có AM=MB. Ta lấy N là trung điểm AB thì tạo ra được cặp đại lượng bằng nhau là BN=AN.

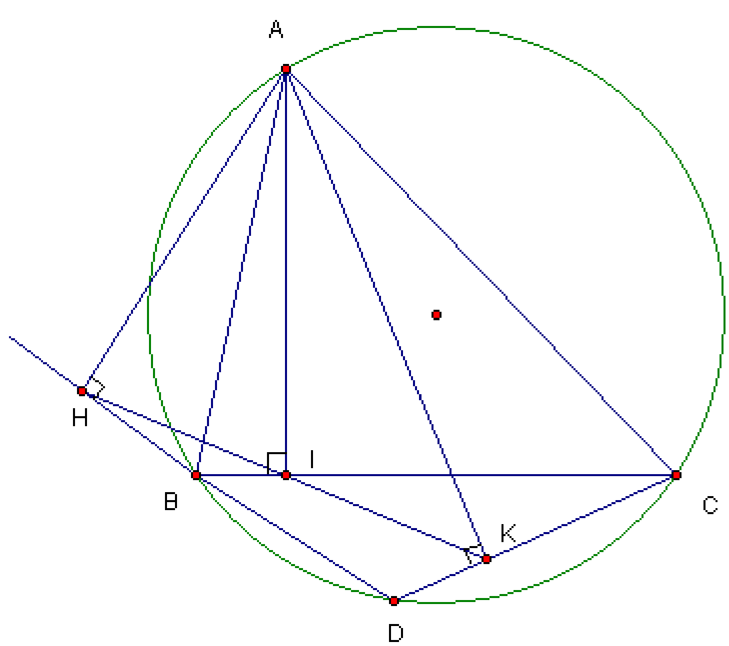
Mặt khác MN//AC nên MN$\perp$AB

Suy ra MN là trung trực đoạn AB.

$\Rightarrow$AM=BM=CM, từ đó có đpcm.

5. Tạo nên một hình mới, để có thể áp dụng một định lý đặc biệt nào đó.

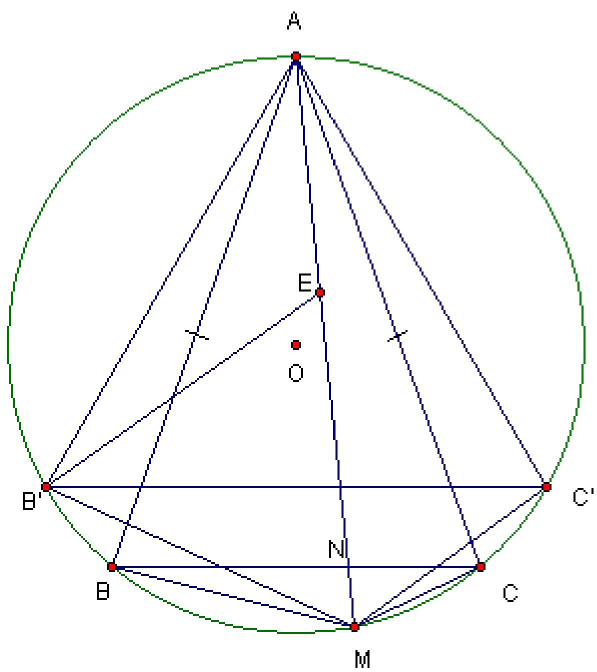
Ví du: Cho tam giác ABC nội tiếp (O). D là điểm bất kì trên cung nhỏ BC. Kẻ $AH \perp DB, AK \perp DC$. Chứng minh đường thẳng HK đi qua một điểm cố định.



Suy nghĩ: Hai đường vuông góc AH,AK làm ta nghĩ đến đường thẳng Simsơn, vì vậy nếu gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC, thì theo đường thẳng Sim-sơn ta có H,I,K thẳng hàng. Do A cố định nên I cố định. Vậy HK đi qua điểm cố định là I.

6. Biến đổi hình vẽ, làm cho bài toán trở nên dễ chứng minh hơn trước.

Ví dụ: Tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O) ($\angle A < 60^0$). M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC. AM giao BC tại N. CMR: $\frac{1}{MN} > \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$



Suy nghĩ:

Để chứng minh $\frac{1}{MN} > \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ ta thử biến đổi tương đương:

$\frac{1}{MN} > \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \Leftrightarrow MB.MC > MN.(MB + MC)$ (1)

Mặt khác tam giác ABC cân tại A nên

$AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \angle AMB = \angle AMC$

Mặt khác $\angle BAM = \angle NCM$

$\Rightarrow \triangle BAM \sim \triangle NCM\,(g.g)$

$\Rightarrow \frac{MB}{MN} = \frac{AM}{MC}$

$\Leftrightarrow MB.MC = AM.MN$

Thay vào (1) ta được $AM.MN > MN.(MB + MC)$

$\Leftrightarrow AM > MB + MC$

Vậy để chứng minh $\frac{1}{MN} > \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ chỉ cần chứng minh AM>MB+MC là xong.

Đến đây ta nhớ lại bài toán quen thuộc:

"Tam giác đều ABC nội tiếp (O). M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC. CMR:

MA=MB+MC."

Tất nhiên có thể áp dụng kết quả này vào bài toán ban đầu bằng cách dựng tam giác AB'C' đều nội tiếp (O).

Trên AM lấy E sao cho ME=B'M

Do $\angle B'ME = \angle B'C'A = 60^o$

Suy ra tam giác B'ME đều.

$\Rightarrow \angle EB'M = \angle AB'C' (= 60^o)$

$\Rightarrow \angle AB'E = \angle C'B'M$

$\Rightarrow \triangle AB'E = \triangle BC'M\,(g.c.g)$

$\Rightarrow AE = MC'$

$\Rightarrow AM = AE + EM = B'M + C'M$

Mặt khác B'M>BM, C'M>CM nên AM=B'M+C'M>BM+CM

Từ đó có đpcm.

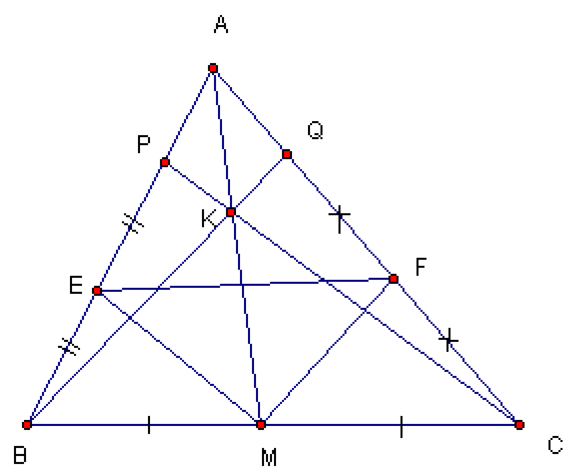
II. Các loại đường phụ:

Sau đây là một số loại đường phụ thường gặp:

1. Kéo dài một đoạn thẳng cho trước với độ dài tuỳ ý, hoặc bằng một độ dài cho trước, hoặc cắt một đường thẳng khác.

Ví dụ:

Cho tam giác ABC. Trên trung tuyến AM lấy điểm K bất kì khác A,M. Qua M lần lượt kẻ đường thẳng song song với KB, KC giao AC, AB tại F, E. CMR: EF//BC (**)



Giải:

Kéo dài CK, BK cắt AB, AC tại P, Q.

EM, FM là đường trung bình tam giác BPC, BQC

$\Rightarrow$ BE=PE, QF=CF

Ta có $\frac{AP}{PE} = \frac{AK}{KM} = \frac{AQ}{QF}$

$\Leftrightarrow \frac{AP+PE}{PE} = \frac{AQ+QF}{QF}$

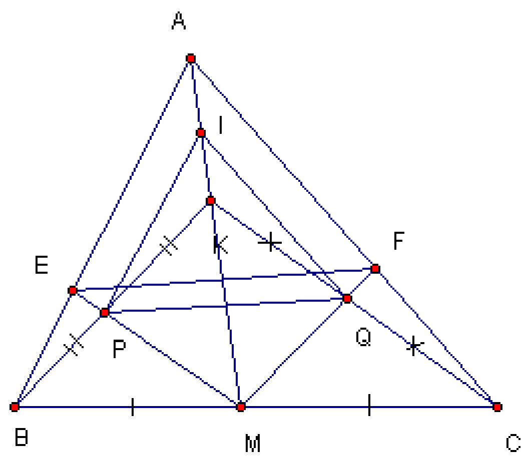
hay $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

$\Rightarrow EF//BC$ (Ta-lét đảo) (đpcm)

2. Nối hai điểm cho trước hoặc hai điểm cố định (gồm cả trung điểm của đoạn thẳng cố định), điểm nằm trên một đoạn thẳng cho trước và cách một đầu của đoạn thẳng đó một khoảng cho trước)

Ví dụ:

Ta xét lại bài toán (**)



Cách 2:

Gọi $EM \cap BK = \{P\}, FM \cap CK = \{Q\}$

Gọi I là trung điểm AK. Nối PI, QI, PQ.

Dễ dàng có MQ, MP là 2 đường trung bình của tam giác BKC nên KQ=QC=$\frac{1}{2}$KC, KP=BP=$\frac{1}{2}$BK.

Suy ra PQ là đg trung bình của tam giác BKC

$\Rightarrow PQ//BC$ (1)

Mặt khác PI, QI lần lượt là đường trung bình các tam giác AKB, AKC nên PI//AB, QI//AC

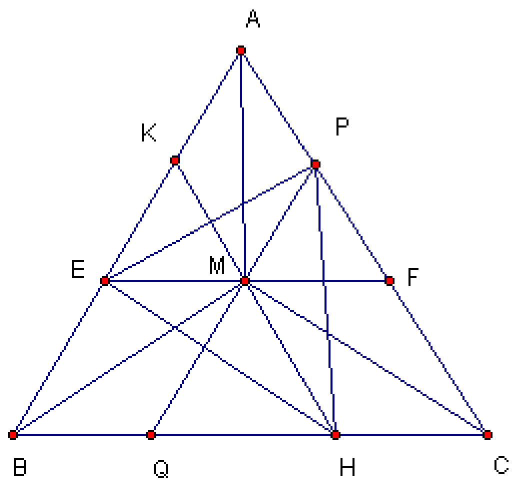
$\Rightarrow \frac{EP}{PM} = \frac{AI}{IM} = \frac{FQ}{QM}$ (định lý Ta-lét)

$\Rightarrow PQ//EF$ (Ta-lét đảo) (2)

Từ (1)(2) suy ra EF//BC (đpcm)

3. Từ một điểm cho trước dựng đường song song với một đường thẳng cho trước, hoặc dựng đường song song với một đường, mà ta cần chứng minh đường này song song với một đường nào đó.

Ví dụ: Cho tam giác đều ABC. M là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh MA, MB, MC là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác.



Nhận xét: Nhiệm vụ của chúng ta là tìm ra tam giác có độ dài 3 cạnh là MA, MB, MC.

Để tạo ra tam giác này qua M ta kẻ PQ, KH, EF lần lượt // AB, AC. BC.

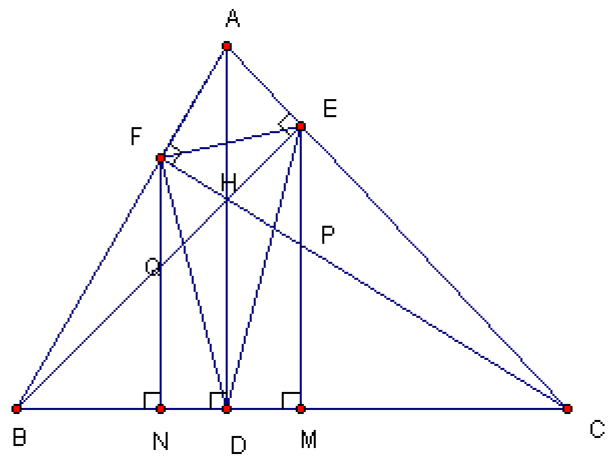
Do tam giác ABC đều nên các tứ giác APME, PMHC, HMEB là hình thang cân.

Suy ra AM=EP, BM=EH, CM=PH.

Vậy MA, MB, MC là độ dài 3 cạnh của tam giác EPH.

4. Từ một điểm cho trước hạ đường vuông góc xuống một đường thẳng cho trước.

Ví dụ: Cho tam giác ABC, 3 đường cao AD, BE, CF, trực tâm H. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



Giải:

Kẻ FN, EM$\perp$BC cắt BE, CF tại Q, P.

Do FN// AD// EM suy ra:

$$\frac{FQ}{FN}=\frac{AH}{AD}=\frac{EP}{EM}\Rightarrow\frac{FQ}{EP}=\frac{FN}{EM}\ \frac{FQ}{FN}=\frac{AH}{AD}=\frac{EP}{EM}\Rightarrow\frac{FQ}{EP}=\frac{FN}{EM}$$

và $\frac{DN}{DM}=\frac{HF}{HP}=\frac{FQ}{EP}$

Do đó $\frac{DN}{DM}=\frac{FN}{EM}$

Suy ra $\triangle DNF\sim\triangle DME(c.g.c)$

$\Rightarrow\angle NDF=\angle MDE$, mặt khác $AD\perp BC$

$\Rightarrow\angle FDA=\angle EDA$, hay DA là phân giác góc FDE.

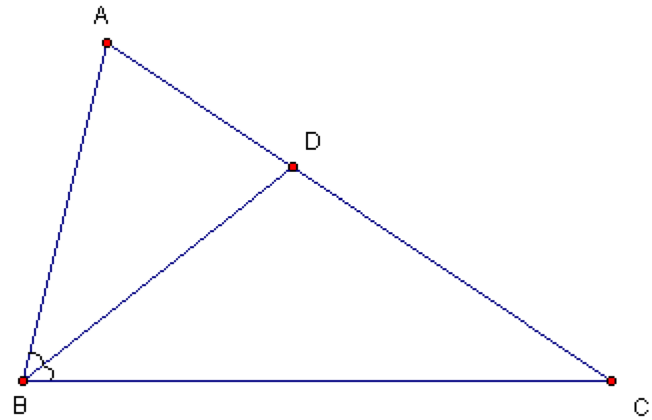
Tương tự FC, EB lần lượt là phân giác các góc DFE, FED.

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF (đpcm)

5. Dựng đường phân giác của một góc cho trước.

Ví dụ:

Cho tam giác ABC có $\angle B=2\angle C$, 3 cạnh BC, AC, AB có độ dài lần lượt là a,b,c. CMR: $b^2=c^2+ac$



Giải:

Dựng phân giác BD của góc B.

$\Rightarrow \angle ABD = \angle ACB$

$\Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle CAB (g.g)$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow AB^2 = AC.AD$

Mặt khác theo tính chất đường phân giác của một tam giác:

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$

$\Rightarrow AD = \frac{AB.AC}{AB+BC}$

$\Rightarrow AD.AC = \frac{AB.AC^2}{AB+BC} = AB^2$

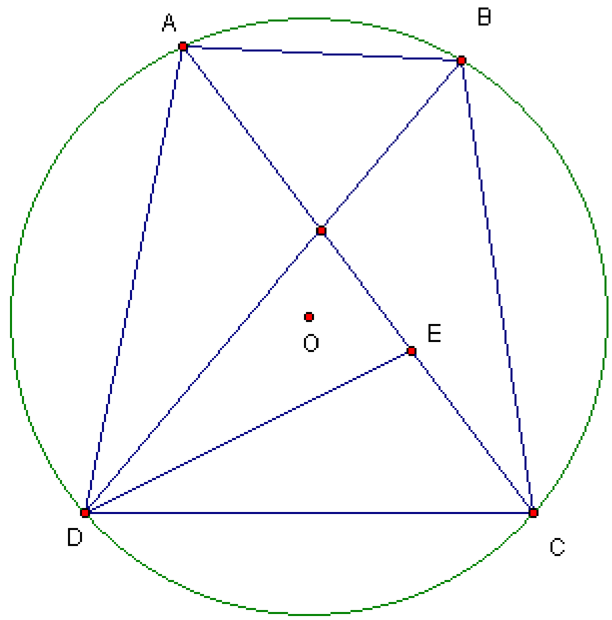
$\Leftrightarrow \frac{AC^2}{AB+BC} = AB$

$\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + AB.BC$

hay $b^2 = c^2 + ac$ (đpcm)

6. Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước hợp thành với một đường thẳng khác một góc bằng góc cho trước.

Ví du 1: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). CMR: AB.CD+AD.BC=AC.BD (định lý Ptô-lê-mê)



Suy nghĩ: Đối với những bài toán chứng minh hệ thức dạng ab+cd=ef, thông thường ta chia f thành tổng của m+n, rồi chứng minh ab=em,cd=en nhờ các tam giác đồng dạng. Trong bài toán này, ta sẽ chia AC thành 2 đoạn nhỏ và tạo ra được các tam giác đồng dạng. Muốn vậy phải có các góc bằng nhau và đường phụ cần vẽ là đoạn DE sao cho $\angle ADB = \angle EDC (E \in AC)$.

Giải: Lấy điểm E trên AC sao cho $\angle ADB = \angle EDC$. Ta có :

$\triangle BDA \sim \triangle CDE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BA}{CE}$ (2 cặp cạnh tỉ lệ)

$\Rightarrow BD.CE = CD.BA$ (1)

Do $\angle ADB = \angle EDC \Rightarrow \angle ADE = \angle BDC$

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle BDC$ (g.g)

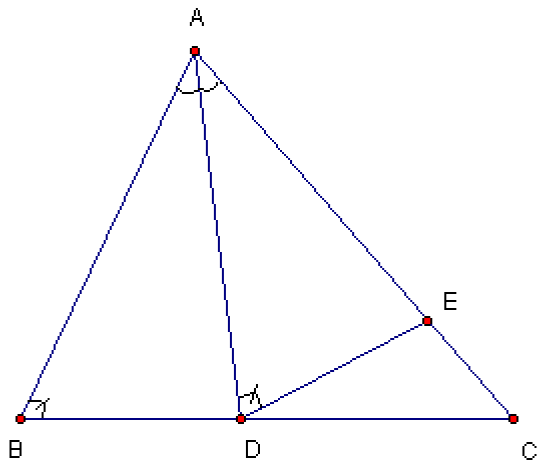
$\Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{BC}$

$\Rightarrow AD.BC = BD.AE$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow AB.CD + AD.BC = BD.EC + BD.AE = BD.AC$ (đpcm)

Ví du 2:

Cho tam giác ABC, phân giác AD. CMR: AD^2<AB.AC



Giải:

Do $\angle ADC > \angle B$ nên trên AC lấy được điểm E sao cho $\angle ADE = \angle B$.

$\Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle DAE (g.g)$

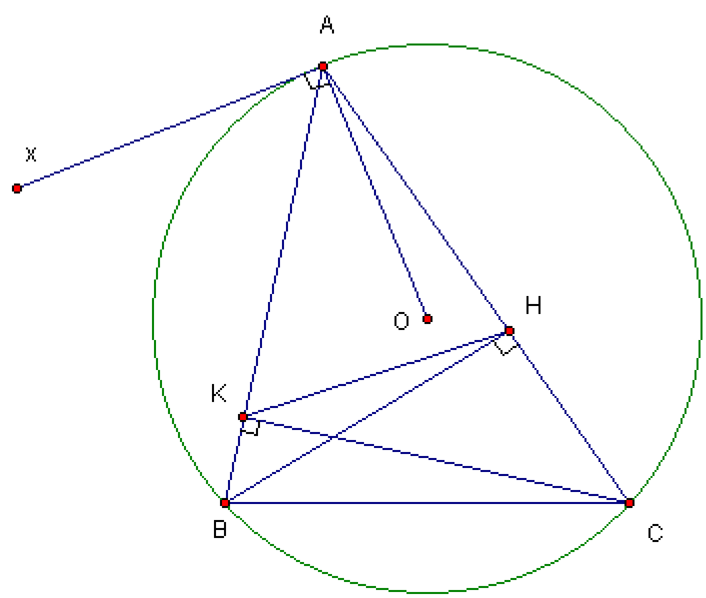
$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{AE}$

$\Rightarrow AD^2 = AB.AE < AB.AC$ (đpcm)

7. Từ một điểm cho trước, dựng tiếp tuyến với đường tròn cho trước.

Ví du 1:

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Các đường cao BH,CK. CMR: $AO \perp KH$



Suy nghĩ:

Để chứng minh $AO \perp KH$, ta có thể tạo ra một đường thẳng song song với KH và vuông góc với AO, không khó khăn lắm nhận thấy đó chính là tiếp tuyến Ax của (O).

Giải: Dựng tiếp tuyến Ax của (O) $\Rightarrow Ax \perp AO$ (1)

Tứ giác BKHC nội tiếp nên $\angle AKH = \angle HCB$

Mặt khác xAB là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung $\Rightarrow \angle xAB = \angle HCB$

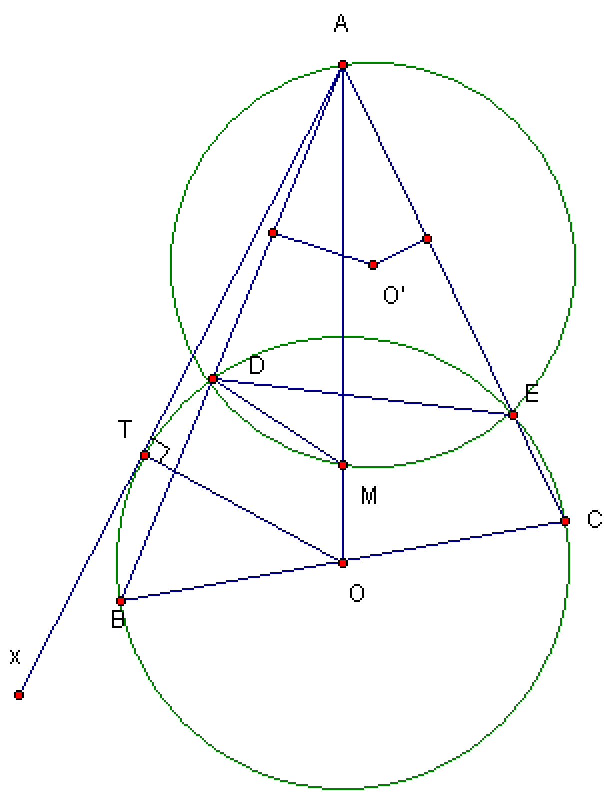
$\Rightarrow \angle xAB = \angle AKH$

$\angle ADB = \angle EDC \Rightarrow Ax // KH$ (2)

Từ (1)(2) ta được đpcm.

Ví dụ 2: Điểm A cố định nằm ngoài (O, $\frac{BC}{2}$).

$AB \cap (O) = \{D\}, AC \cap (O) = \{E\}$. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.



Giải:

Phần thuận:

Nối DM. Ta có $\angle DMA = \angle DEA = \angle ABC$

Suy ra tứ giác BDMO nội tiếp.

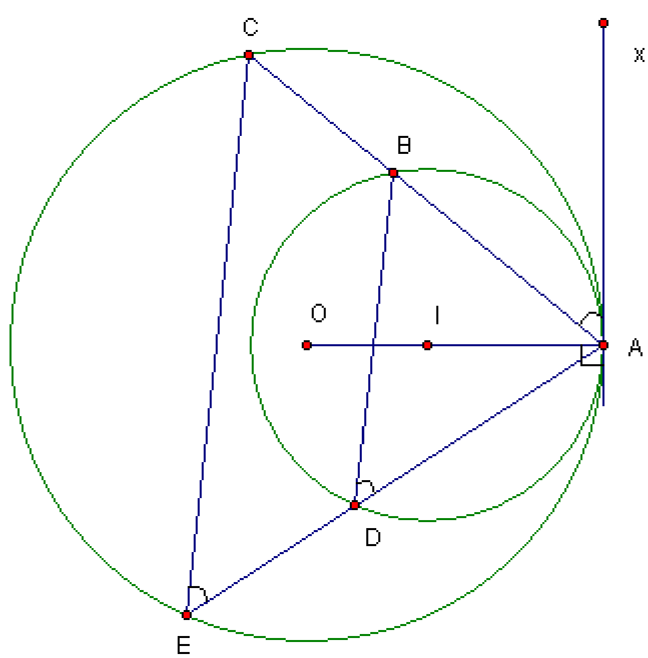
$\Rightarrow AD.AB = AM.AO$

Kẻ tiếp tuyến AT. Ta có AT^2=AD.AB=AM.AO

$\Rightarrow AM = \frac{AT^2}{AO}$ không đổi

Do đó M cố định.
Vậy O' thuộc trung trực [AM].
Giới hạn:
Khi đường kính BC chuyển động trên (O) thì O' chuyển động trên trung trực [AM]
Phần đảo:
Giả sử M là điểm thoả mãn $AM = \frac{AT^2}{AO}$.
$AB \cap (O) = \{D\}, AC \cap (O) = \{E\}$.Dựng đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ADM. Ta chứng minh E$\in (O')$.
Thật vậy do $AM = \frac{AT^2}{AO} \Rightarrow AM.AO = AT^2 = AD.AB$
Suy ra tứ giác BDMO nội tiếp.
$\Rightarrow \angle ABO = \angle DMA = \angle AED$
$\Rightarrow$ tứ giác ADME nội tiếp.
$\Rightarrow$ E thuộc (O') (đpcm)
Kết luận:
Quỹ tích tâm O' là trung trực [AM]

8.Bài ra cho hai đường tròn tiếp xúc nhau, ta có thể dựng được tiếp tuyến chung hoặc đường nối tâm.
Ví dụ 1: (I) tiếp xúc trong với (O) tại A. Dây AC,AE của (O) cắt (I) tại B,D. CMR: BD//CE



Giải:

Kẻ tiếp tuyến chung Ax của 2 đường tròn.

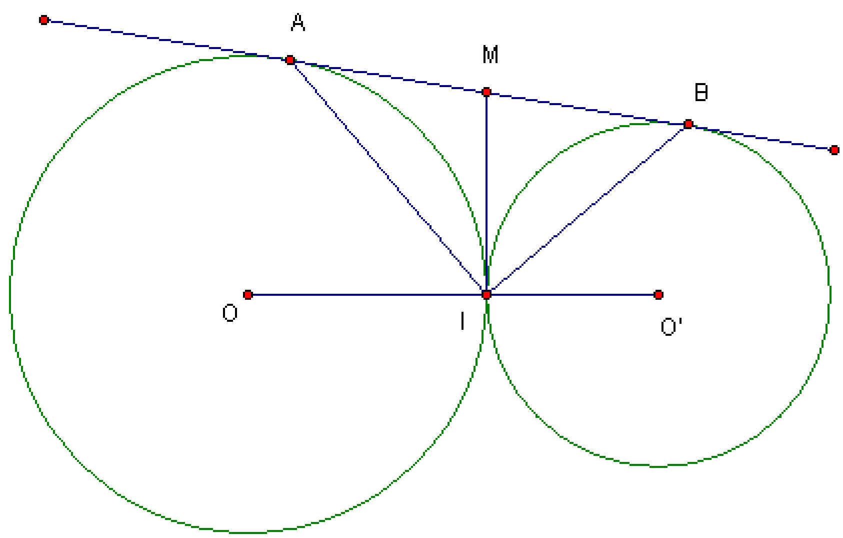
Dựa vào hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung ta có:

$\angle CAx = \angle BDA = \angle CEA$

Suy ra BD//CE (hai góc đồng vị bằng nhau (đpcm)

Ví dụ 2:

(O) tiếp xúc (O') tại I. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB (A, B là 2 tiếp điểm). CMR: $\angle AIB = 90^o$



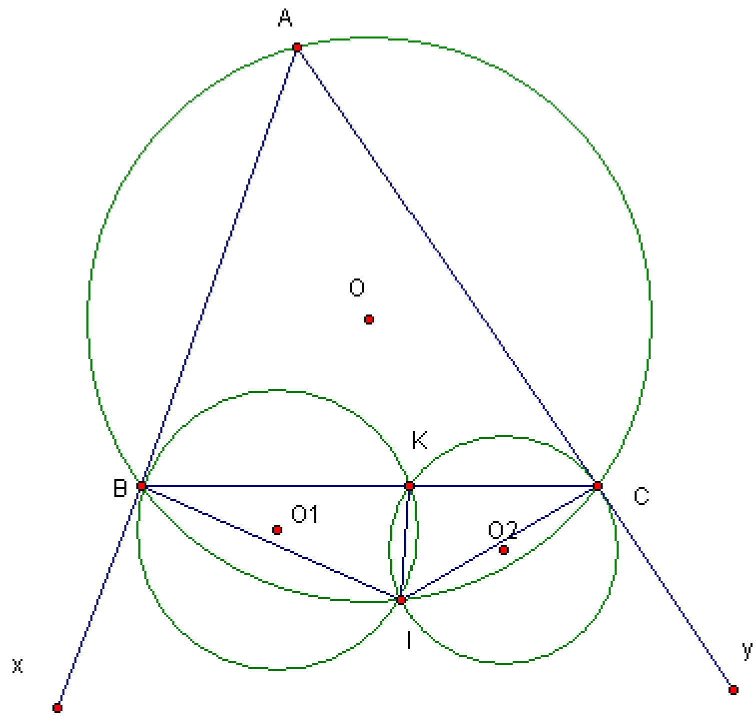
Giải:

Kẻ tiếp tuyến chung trong IM (M$\in$ AB). Dựa vào tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta được AM=IM=BM, do đó $\angle AIB = 90^o$ (đpcm)

9. Bài ra cho hai đường tròn giao nhau, thì kẻ được dây cung chung.

Ví dụ:

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). I là điểm bất kì thuộc cung BC không chứa A. Vẽ (O_1) và (O_2) qua O lần lượt tiếp xúc với AB, AC tại B, C. $(O_1) \cap (O_2) = \{K\}$. CMR B, K, C thẳng hàng.



Giải:

Kẻ dây cung IK chung của hai đường tròn.

Theo tính chất của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có

$\angle xBI = \angle BKI, \angle yCI = \angle CKI$

Mặt khác tứ giác ABIC nội tiếp nên:

$\angle xBI = \angle ACI$

Mà $\angle ACI + \angle yCI = 180^o$

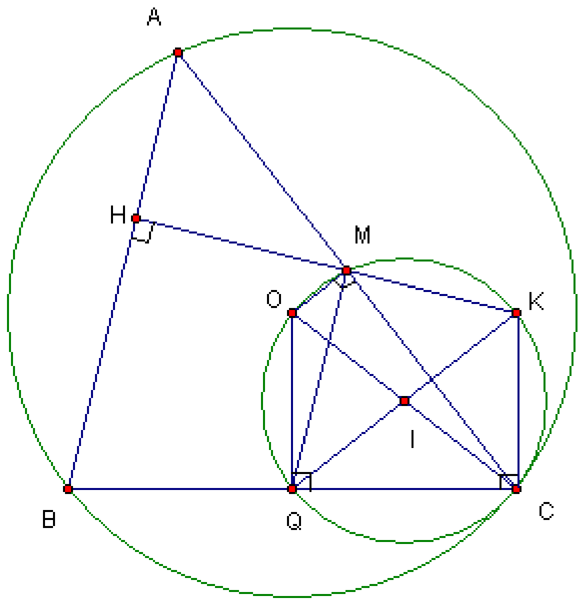
$\Rightarrow \angle BKI + \angle CKI = 180^o$

Vậy B, K, C thẳng hàng (đpcm)

10. Nếu một tứ giác có thể nội tiếp đường tròn, thì ta có thể dựng đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

Ví dụ:

Tam giác ABC nội tiếp (O). M là trung điểm AC. Kẻ MH $\perp$ AB. Chứng minh MH luôn đi qua một điểm cố định.



Suy nghĩ: Để tìm ra điểm cố định ta vẽ một vài vị trí của M và nhận thấy rằng đó là điểm K nằm trên đường vuông góc kẻ từ C với BC và $\angle OKC = 90^o$

Giải:

Gọi Q là trung điểm BC. Tứ giác OMCQ có thể nội tiếp nên dựng (I,$\frac{OC}{2}$) ngoại tiếp tứ giác OMCQ.

QI giao (I) tại K. Ta chứng minh H, M, K thẳng hàng.

Thật vậy

$MH // AB \Rightarrow \angle A = \angle QMC = \angle QKC$

$\Rightarrow AMH = \angle KQC = \angle KMC$

$\Rightarrow \angle AMH + \angle AMK = \angle AMK + \angle KMC = 180^o$

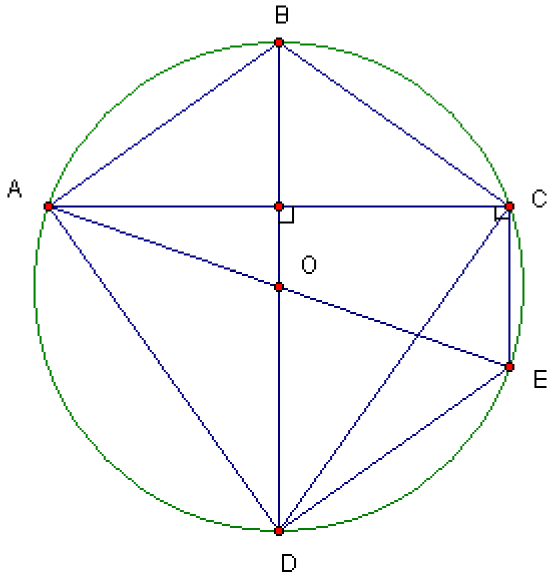
Suy ra H, M, K thẳng hàng.

Mặt khác K đối xứng với Q qua I, mà Q, I cố định nên K cố định.

Vậy MH luôn đi qua điểm cố định K.

11. Bài cho một điểm nằm trên đường tròn, có thể vẽ thêm đường kính đi qua điểm đó.

Ví dụ 1: Tứ giác ABCD nội tiếp (O;R) có hai đường chéo vuông góc với nhau. CMR $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ không đổi.



Suy nghĩ:

Các tổng bình phương gợi cho chúng ta nghĩ đến định lý Py-ta-go áp dụng trong tam giác vuông. Tuy nhiên nếu để yên hình vẽ thì không thể áp dụng được. Vì vậy ta vẽ thêm đường kính để tạo ra tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là hai cạnh đối của tứ giác ABCD, cạnh huyền có độ dài không đổi (tính theo R)

Giải:

Kẻ đường kính AE. Nối CE,DE. Ta có $\angle ACE = 90^o$ do đó CE//BD (cùng vuông góc với AC)

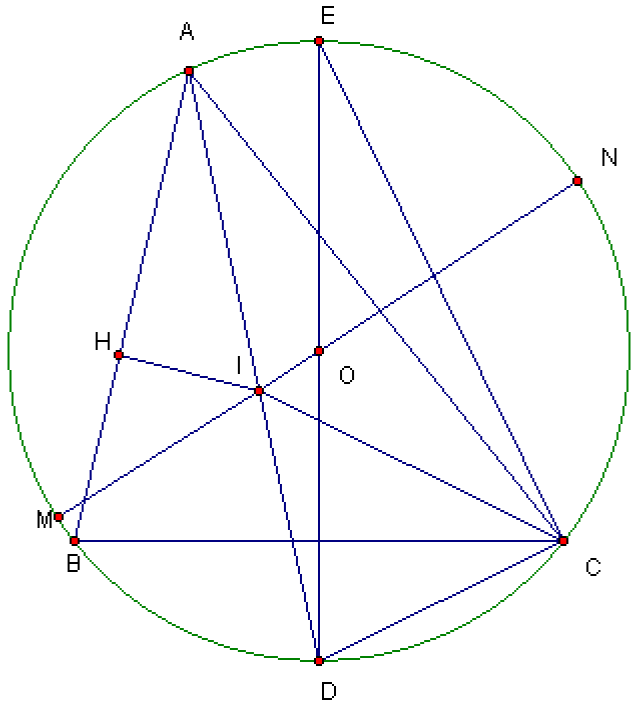
Tứ giác BCED là hình thang nội tiếp đường tròn nên BC=DE

Suy ra $BC^2+AD^2=DE^2+AD^2=AE^2=4R^2$

Tương tự $AB^2+CD^2=4R^2$

Vậy $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=8R^2$ không đổi (đpcm)

Ví dụ 2: Chứng minh khoảng cách d giữa đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác được tính theo công thức $d^2=R^2-2Rr$ (hệ thức Ơ-le)



Giải:

Kéo dài AI giao (O) tại D. Kẻ đường kính DE của (O). Nối CD. Kéo dài OI cắt (O) tại M,N. Hạ $IH \perp AB$

Chứng minh được $\triangle AHI \sim \triangle ECD$ (g.g)

$\Rightarrow IH.ED = AI.DC$

Mặt khác $\angle DIC = \angle IAC + \angle ICD = \angle ICB + \angle BCD = \angle ICD$ suy ra tam giác IDC cân tại D

$\Rightarrow ID = DC$

$\Rightarrow AI.DC = AI.ID = IM.IN = (R - OI)(R + OI) = R^2 - OI^2$

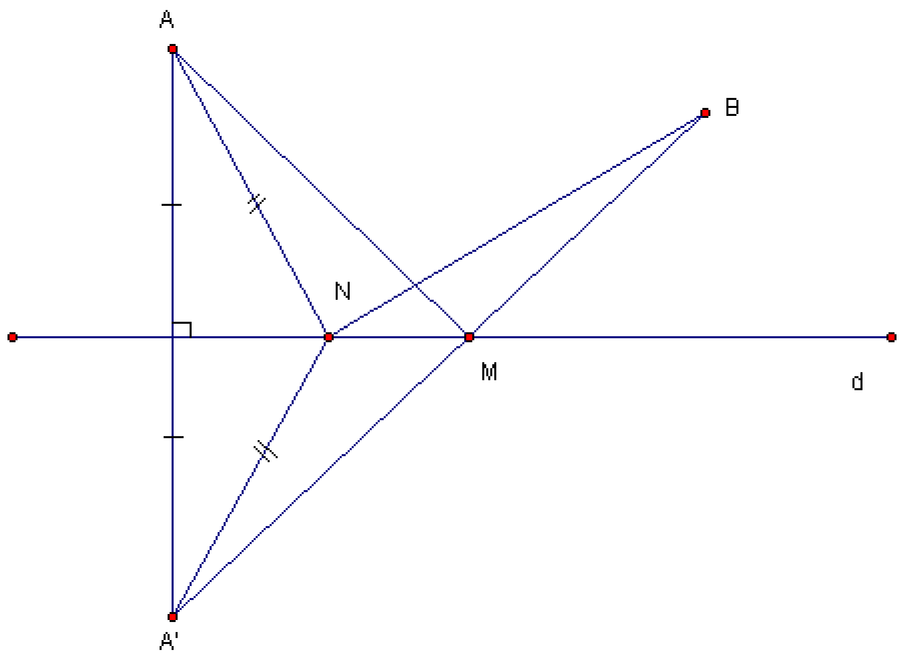
Do đó $IH.ED = 2Rr = R^2 - OI^2$

$\Rightarrow OI^2 = R^2 - 2Rr$

12. Vận dụng phép đối xứng tâm, đối xứng trục, phép quay, tịnh tiến...

Ví dụ:

Cho hai điểm A và B cùng thuộc 1/2mp bờ là đường thẳng d. Tìm điểm N trên d sao cho AN+BN Min.



Giải:

Gọi N là điểm tuỳ ý trên d.

Lấy A' đối xứng với A qua d. Nối A'B giao d tại M. Nối AM. Ta có AN+NB=A'N+NB $\geq$ A'B=A'M+MB=AM+MB

Dấu bằng xảy ra khi N$\equiv$M.

Vậy điểm N cần tìm chính là giao điểm của A'B với d (A' là điểm đối xứng với A qua d).

Nhận xét:

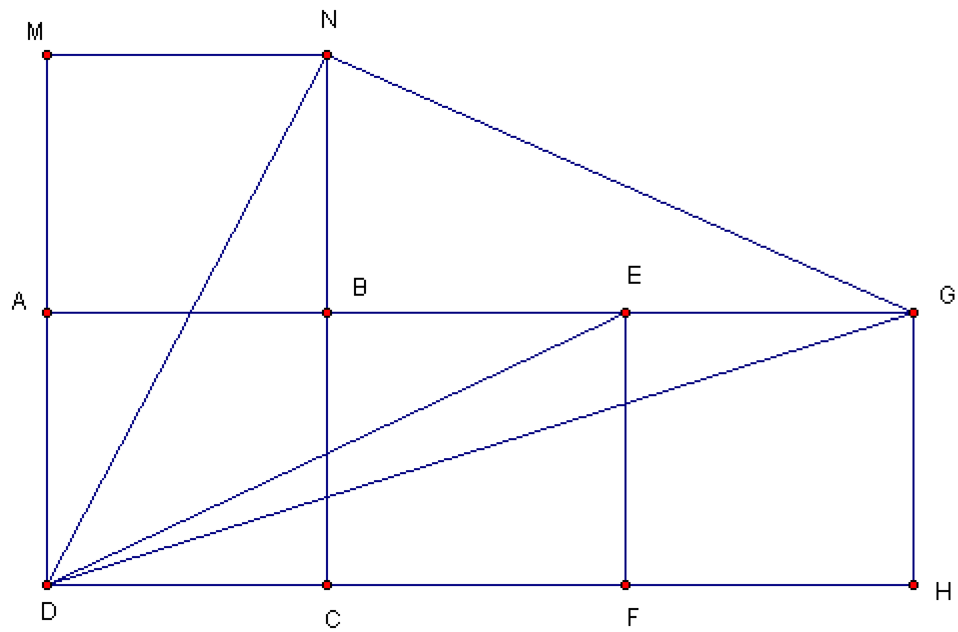
Điểm A' đã giúp chúng ta làm cho đường gấp khúc ANB đỡ "gãy" hơn, và giúp việc tìm điểm N trở nên thuận lợi.

13. Vẽ thêm một hình đặc biệt (tam giác đều, hình vuông rồi sử dụng tính chất của các hình đó.

Ví dụ:

Dựng liên tiếp 3 hình vuông ABCD, BEFC, EGHF. Chứng minh

$\angle AED + \angle AGD = 45^o$



Suy nghĩ:

Hai góc AED và AGD dường như không liên quan gì đến nhau. Vì vậy ta phải tạo ra một góc 45° bằng tổng của hai góc trên. Để có góc 45°, ta phải có tam giác vuông cân.

Giải:

Dựng hình vuông ABNM. Dễ dàng có $\triangle DMN = \triangle GBN (c.g.c)$ do đó ta có DN=GN và $\angle MND = \angle BNG$

$\Rightarrow \triangle DNG$ vuông cân tại N.

Mặt khác $\triangle GBN = \triangle EAD (c.g.c)$ nên $\angle BGN = \angle AED$

Vậy $\angle AED + \angle AGD = \angle NGB + \angle AGD = 45^o$ (đpcm)

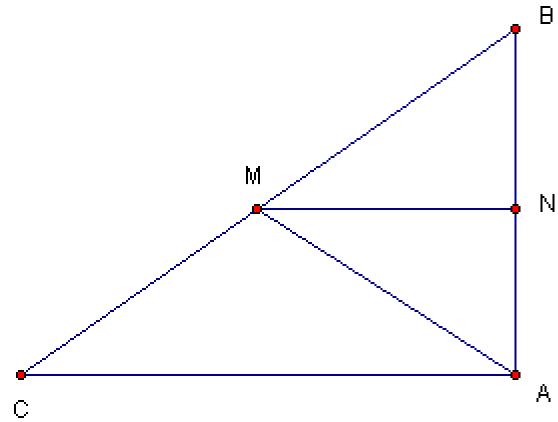
Chú ý:

Thay vì dựng hình vuông ABNM, các bạn có thể tạo ra các hình vuông khác dựng trên cạnh CD, CF, FH... Từ đó chúng ta có những cách giải mới rất thú vị.

III. Chú ý khi vẽ đường phụ:

1. Muốn đường phụ giúp ích cho việc chứng minh thì vẽ đường phụ phải có mục đích, không nên vẽ tuỳ tiện. Nếu không thì chẳng giúp được gì cho việc chứng minh, lại làm cho hình vẽ trở nên rối ren, hoa mắt, khó tìm ra cách giải đúng.

2. Vẽ đường phụ phải tuân theo các phép dựng hình cơ bản. Những đường không có trong phép dựng hình cơ bản tuyệt đối không được sử dụng.



Trở lại bài toán (*)

Nếu thay cách nói "lấy trung điểm N của AB" bằng các cách nói sau:

+Vẽ trung trực MN của đoạn AB.

+Qua M kẻ MN song song với AB sao cho BN=AN.

+Kẻ MN$\perp$AB sao cho NA=NB.

thì đều không hợp lý. Trong cách nói thứ nhất, M chưa chắc thuộc trung trực của đoạn AB, còn cách nói thứ 2 và thứ 3 chưa xác định được các đường đó có đi qua trung điểm AB hay không, vì vậy trái với phép dựng hình.

3. Có khi đường phụ vẽ thêm cùng là một đường nào đó, nhưng vì cách dựng khác nhau nên cách chứng minh cũng khác nhau.

Như ở trong bài toán (**), nếu thay cách vẽ bằng "từ M dựng MN//BC" thì phải sử dụng định lý đường trung bình trong tam giác để suy ra NA=NB, hoặc nếu thay bằng "từ M dựng MN$\perp$AB" thì phải sử dụng quan hệ giữa vuông góc và song song để suy ra MN//AC rồi chứng minh NA=NB. Thực ra trong trường hợp nào, MN vẫn chỉ là một.

THE END