

Mục lục

1. Mở đầu.

- 1.1. Lí do chọn đề tài.
- 1.2. Mục đích nghiên cứu.
- 1.3. Đối tượng nghiên cứu.
- 1.4. Phương pháp nghiên cứu.

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm.

- 2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm.
- 2.2. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm.
- 2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.

Giải pháp tổng thể.

Giải pháp cụ thể: Giới thiệu các kỹ năng thông qua các ví dụ mẫu và phân tích các kỹ năng đó.

- 2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

3. Kết luận, kiến nghị.

- 3.1. Nhận xét kết quả thu được.
- 3.2. Bài học kinh nghiệm.

Tài liệu tham khảo

Phụ lục

1. Mở đầu.

1.1. Lí do chọn đề tài:

+ Giải toán hình học không gian là bài toán cơ bản trong chương trình Hình học lớp 11, đây cũng là bài toán chính luôn có mặt trong đề thi môn Toán kỳ thi tuyển sinh Đại học từ năm 2002 đến năm 2014, kỳ thi THPT Quốc gia năm 2015 và những năm tiếp theo.

+ Bài toán hình học không gian là bài toán hay, khó, rộng và đa dạng, nó chiếm một thời lượng lớn thời gian học môn Toán trong nhà trường THPT.

+ Khi giảng dạy giáo viên quan tâm nhiều đến kiến thức và trình bày lời giải của những bài cụ thể mà chưa thực sự chú trọng nhiều đến việc rèn kỹ năng cho học sinh.

+ Khi học môn hình học không gian, học sinh học bài nào biết bài đó, chưa tìm được sự liên hệ giữa các bài, không biết vì sao lại làm như thế, các em khó khăn trong việc phân tích tìm hướng giải, không nhìn thấy con đường tư duy, khi giải xong rồi các em không phát hiện được sự đa dạng của bài toán dẫn đến mất nhiều thời gian học mà hiệu quả không cao, thậm chí có em càng học càng thấy khó và chán nản.

+ Đây là môn học không chỉ đòi hỏi học sinh phải có một tư duy khoa học, logic, biện chứng cao mà còn cần nhiều kỹ năng trong giải toán.

+ Đặc biệt hiện tại chưa có bất kỳ tài liệu nào nói về vấn đề: ***“Rèn kỹ năng cho học sinh khi giải bài toán Hình học không gian bằng phương pháp cổ truyền”***.

Từ các lí do cần thiết như vậy tôi đã chọn vấn đề này để viết sáng kiến kinh nghiệm nhằm mục đích tổng kết những kinh nghiệm của bản thân đồng thời chia sẻ cùng đồng nghiệp trong quá trình giảng dạy và giáo dục học sinh. Rất mong nhận được sự quan tâm đón nhận của đồng nghiệp.

1.2. Mục đích nghiên cứu:

+ Tôi nghiên cứu đề tài này nhằm mục đích tổng kết lại một số kỹ năng mà tôi thường sử dụng và hướng dẫn học sinh khi đi tìm lời giải cho bài toán hình học không gian.

+ Qua đây cũng là dịp giới thiệu và cùng trao đổi với đồng nghiệp để giúp nhau cùng tiến bộ, để nhận được nhiều hơn nữa sự góp ý của đồng nghiệp.

+ Giúp học sinh tự trả lời được các câu hỏi: Vì sao học hình học không gian khó? Vì sao biết cách học hình học không gian thì lại thấy dễ? và vì sao khi học hình đến một ***“Đẳng cấp”*** nhất định thì gần như mọi bài toán hình học không gian đều có thể làm được.

1.3. Đối tượng nghiên cứu:

Đề tài này sẽ nghiên cứu và tổng kết về vấn đề: ***Một kỹ năng cần thiết khi giải toán Hình học không gian bằng phương pháp cổ truyền*** từ đó gợi ý cho học sinh phương pháp học tập trong giai đoạn hiện nay không chỉ là học kiến thức mà còn là vận dụng kiến thức vào thực tế cuộc sống, qua đó hình thành được các kỹ năng môn học cũng như kỹ năng trong cuộc sống.

1.4. Phương pháp nghiên cứu:

+ Phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết: Tổng hợp các kiến thức liên quan đến các nội dung sẽ trình bày trong đề tài. Tìm các ví dụ có áp

dụng các kỹ năng đã nêu trong đề tài. Xây dựng hệ thống kỹ năng cần thiết theo một thứ tự hợp lý nhất. Hướng dẫn áp dụng và hình thành các kỹ năng cần thiết khi giải toán hình học không gian.

+ Phương pháp điều tra khảo sát thực tế, thu thập thông tin: Tiến hành điều tra nhu cầu của học sinh về nội dung đề tài, điều tra những vấn đề mà học sinh vướng mắc có liên quan đến đề tài.

+ Phương pháp thống kê, xử lý số liệu: Thống kê nhu cầu của học sinh, các vấn đề mà học sinh vướng mắc, tổng hợp và so sánh kết quả học tập, tinh thần thái độ với môn học đối với các nhóm được áp dụng và không được áp dụng hoặc trước khi áp dụng và sau khi áp dụng nội dung đề tài từ đó rút ra những kết luận. Thu thập các phản hồi của các đồng nghiệp cùng bộ môn để hoàn thiện đề tài.

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm.

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm:

Toàn bộ kiến thức cơ bản về các vấn đề của hình học không gian như:

- Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng;
- Quan hệ song song trong không gian;
- Véc tơ trong không gian;
- Quan hệ vuông góc trong không gian;
- Khoảng cách và góc trong không gian;
- Thể tích của khối đa diện;

2.2. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm.

2.2.1. Về phía giáo viên: Quan tâm nhiều đến việc trang bị kiến thức và trình bày các lời giải các bài toán cho học sinh mà chưa thực sự chú trọng việc rèn các kỹ năng cần thiết cho học sinh.

2.2.2. Về phía học sinh: Các em nắm được kiến thức nhưng kỹ năng cần thiết để giải toán còn yếu; các em chưa biết phân tích giả thiết để tìm hướng giải quyết, các em còn lúng túng trong việc lựa chọn phương pháp giải quyết; khi giải quyết xong rồi các em chưa biết phân tích kết luận cũng như thay đổi giả thiết để tìm các kết luận mới cũng như chưa tổng kết lại các kiến thức, kỹ năng đã sử dụng trong bài và tìm các bài toán quen thuộc. Đặc biệt có những em còn thấy nản trí khi học hình học không gian bởi vì các em không biết vận dụng kiến thức đã học vào giải quyết các bài toán như thế nào cho hiệu quả.

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.

Giải pháp tổng thể:

Đối tượng áp dụng là các em học sinh đã và đang học hình học không gian. Với các em đang học thì học đến đâu giới thiệu đến đó và cuối cùng dành khoảng 3 tiết để tổng hợp lại, với các em đã học xong thì dành thời gian khoảng 6 tiết để giới thiệu.

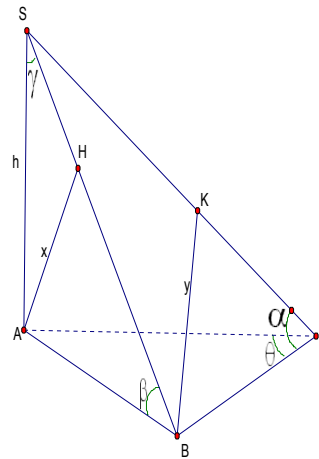
Giải pháp cụ thể: Giới thiệu cho các em các kỹ năng thông qua các ví dụ mẫu và sau đó cho các em ví dụ về nhà và kiểm tra tiến độ cũng như kết quả của các em.

2.3.1. Kỹ thuật thay đổi giả thiết:

Ví dụ mẫu:

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, góc $\angle ACB = \theta$, cạnh bên SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$. Tính $V_{S.ABC}$ biết:

- SC tạo với đáy một góc α .
- (SBC) tạo với đáy một góc β .
- Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng x.
- Khoảng cách từ B đến SC bằng y.
- SA tạo với (SBC) một góc γ .
- Diện tích tam giác SBC bằng s.



Nhận xét:

1. Yêu cầu cơ bản đối với học sinh khi giải bài toán này:

- Khi gặp một bài toán là một trong các câu a, b, c, d, e, f thì khi làm xong bài toán đó phải xem lại bài toán và thay đổi giả thiết để tạo ra bài toán mới sau đó tìm hướng giải quyết trực tiếp hoặc chuyển bài toán mới về bài toán đã làm.

- Hình thành ý thức và xây dựng kỹ năng thay đổi giả thiết của bài toán.

- Học sinh xác định được các yếu tố trong đề bài: h và góc $\angle ACB = \theta$ cho trước; góc $\angle SCA = \alpha$; góc $\angle SBA = \beta$; góc $\angle ASB = \gamma = 90^\circ - \beta$; $x = AH$ với AH vuông góc với SB, H thuộc SB; $y = BK$ với BK vuông góc với SC, K thuộc SC; $S = \frac{1}{2}SB.BC$.

2. Xây dựng mối quan hệ giữa α và β : Xét tam giác vuông SAC ta có:

$$AC = SA \cdot \cot \angle SCA = h \cdot \cot \alpha \quad (1). \text{ Xét tam giác vuông ABC ta có: } AC = \frac{AB}{\sin \theta} \quad (2). \text{ Xét}$$

tam giác vuông SAB ta có: $AB = SA \cdot \cot \beta = h \cdot \cot \beta \quad (3)$. Thay (3) vào (2) ta có:

$$AC = \frac{h \cdot \cot \beta}{\sin \theta} \quad (4). \text{ Từ (1) và (4) ta có: } \cot \alpha \cdot \sin \theta = \cot \beta.$$

Vậy quan hệ giữa α và β là: $\cot \alpha \cdot \sin \theta = \cot \beta$.

3. Xây dựng quan hệ giữa β và γ : Theo hình vẽ ta có: $\beta + \gamma = 90^\circ$.

4. Xây dựng quan hệ giữa γ và α : Áp dụng mục 2 ta có: $\cot \alpha \cdot \sin \theta = \tan \gamma$

5. Xây dựng quan hệ giữa α và x:

Xét tam giác vuông SAB vuông tại A, có đường cao AH nên: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{AB^2}. \text{ Theo mục 2 ta có: } AB = AC \cdot \sin \theta = SA \cdot \cot \alpha \cdot \sin \theta = h \cdot \cot \alpha \cdot \sin \theta \text{ nên}$$

$$\text{ta có: } \frac{1}{x^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2 \cot^2 \alpha \cdot \sin^2 \theta} \Leftrightarrow x = \frac{h \cdot \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \tan^2 \alpha}}$$

Ví dụ về nhà:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, đường cao bằng h. Tính thể tích khối chóp biết:

- Cạnh bên bằng 2h.
- Cạnh bên hợp với đáy góc 45° .
- Mặt bên hợp với đáy góc 30° .

- d. Các góc mặt bên đỉnh S bằng 60° .
 e. Góc giữa hai mặt bên bằng 120° .
 f. Đường cao SO hợp với mặt bên góc 30° .
 g. Khoảng cách từ O đến mặt bên bằng $\frac{h\sqrt{2}}{2}$.
 h. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $h\sqrt{3}$.
 i. Khoảng cách giữa AB và SC bằng h.

2.3.2. Kỹ thuật dựng hình phụ:

Ví dụ mẫu: (Đề thi học sinh giỏi tỉnh của Sở GD-ĐT Thanh Hóa năm học 2015-2016)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$ và $\angle SAB = \angle SCB = 90^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

Nhận xét:

1. Về hình thức đề bài cho một hình chóp tam giác chưa xác định rõ hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy, đây là một dạng toán khó đối với học sinh.

2. Trong quá trình dạy, ta cần hình thành ý thức tách một khối đa diện ra nhiều khối đa diện; ghép thêm các khối đa diện vào một hình để sau này ghép các hình có những tính chất đặc biệt ta có thể dựng thêm hình phụ để đưa bài toán lạ về bài toán quen thuộc đã gặp, đã làm.

3. Một dạng quen thuộc ta hay gặp là bổ sung hình chóp tam giác thành hình chóp tứ giác trong đó dạng đặc biệt là bổ sung hình chóp có đáy là tam giác vuông cân thành hình chóp có đáy là hình vuông. Rất có thể điểm thêm vào là hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy.

4. Hướng dẫn học sinh bổ sung để có hình chóp sau:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABC).

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SH \perp (ABC) \\ SA \perp AB \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow HA \perp AB.$$

Tương tự $HC \perp BC$

Suy ra tứ giác HABC là một hình vuông

+Ta có:

$$AH \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow AH \parallel (SBC)$$

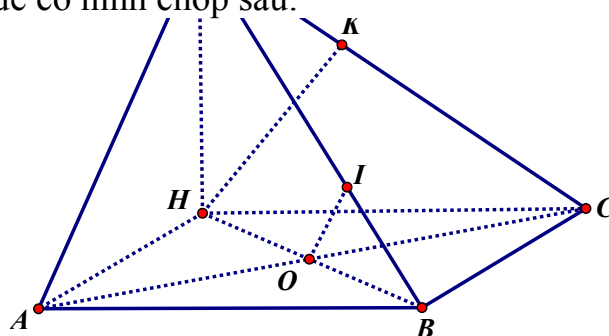
$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = d(H, (SBC)) = a\sqrt{2}$$

$$\text{Dựng } HK \perp SC \text{ tại } K \text{ (1)}. \text{ Do } \left. \begin{array}{l} BC \perp HC \\ BC \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SHC) \Rightarrow BC \perp HK \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SBC)$, nên $d(H, (SBC)) = HK = a\sqrt{2}$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{6a^2} \Rightarrow HS = a\sqrt{6}$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ được tính bởi: $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot SH$



$\Leftrightarrow V = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là hình chiếu của O lên SB khi đó

$d(AC; SB) = OI$. Trong tam giác vuông OIB ta có: $OI = OB \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy

khoảng cách giữa AC và SB là $d(AC; SB) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ về nhà:

1. Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = x; BC = y, các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Tính thể tích khối chóp theo x và y.

2. Cho tứ diện ABCD có các cạnh $AB = BC = a$, $AC = BD = b$, $AD = CD = c$. Tính thể tích khối tứ diện theo a, b, c.

2.3.3. Kỹ thuật bảo toàn khoảng cách:

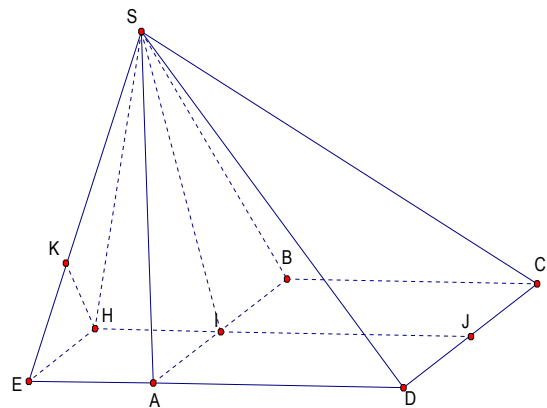
Ví dụ mẫu:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB là tam giác đều và $SD = SC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Nhận xét:

Đây là một kỹ thuật rất phổ biến trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc mặt phẳng mà không cần xác định hình chiếu. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau mà không cần xác định độ dài đoạn vuông góc chung.

Cách 1: Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi H là hình chiếu của S trên IJ, ta có $AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp SH$ vậy $SH \perp (ABCD)$, lại có $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $IJ = a$, $SJ^2 = \frac{11a^2}{4}$, ta có $\cos \angle SIJ = \frac{SI^2 + IJ^2 - SJ^2}{2SI \cdot IJ} = \frac{-1}{\sqrt{3}} < 0$ vậy góc $\angle SIJ$ tù. Vậy điểm H nằm ở ngoài đoạn



IJ và $\cos \angle SIH = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \angle SIH = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Vậy $SH = SI \cdot \sin \angle SIH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Gọi E là hình chiếu của H trên AD thì HE // IA, gọi K là hình chiếu của H trên SE ta có $BC \parallel (SAD)$ nên $d(BC, SA) = d(B, (SAD)) = 2 \cdot d(H, (SAD)) = 2HK$ (1). Ta lại có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{6}{a^2}$. Thay vào (1) ta có: $d(BC, SA) = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cách 2: Bảo toàn thể tích:

Do $BC \parallel (SAD)$ nên: $d(BC, SA) = d(B, (SAD)) = \frac{3V_{S.ABD}}{S_{\Delta SAD}} \Rightarrow d(BC, SA) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Nhận xét:

Rõ ràng so với cách giải quyết ở cách 1 cách giải quyết này rất hiệu quả.

Ví dụ mẫu: (Đề thi Đại học khối D năm 2008)

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

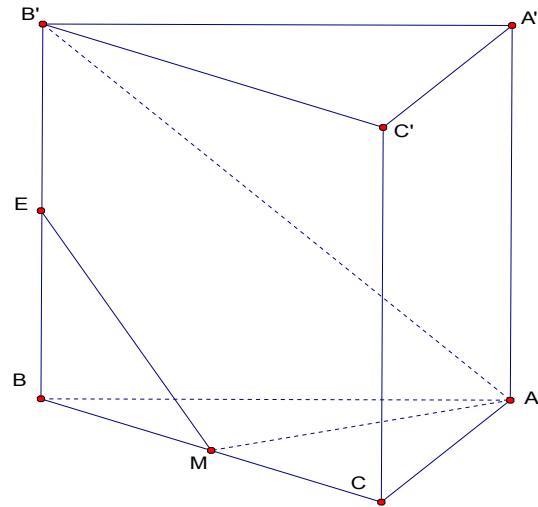
Lời giải:

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B . Thể tích khối lăng trụ

$$\text{là: } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

Cách 1:

Gọi E là trung điểm của BB' . Khi đó mặt phẳng (AME) song song với $B'C$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng khoảng cách giữa $B'C$ và mặt phẳng (AME) . Nhận thấy khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME) bằng khoảng cách từ



C đến mặt phẳng (AME) . Gọi h là khoảng cách từ B đến (AME) . Do tứ diện $BAME$ có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Cách 2: Bảo toàn thể tích:

$$d(AM, B'C) = d(B'C; (AME)) = d(C; (AME)) = \frac{3V_{C.AME}}{S_{\triangle AME}} = \frac{3V_{E.ACM}}{S_{\triangle AME}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Nhận xét:

Rõ ràng so với cách giải quyết ở cách 1, cách giải quyết này rất hiệu quả, vừa ngắn gọn lại vừa dễ hiểu, ta không cần phải phát hiện tứ diện $BEAM$ vuông tại đỉnh B . Nếu học sinh không biết cách chuyển khoảng cách từ C đến (AME) bằng khoảng cách từ B đến (AME) hoặc nếu học sinh không nhớ tính chất của tứ diện vuông thì làm theo cách 1 quả là gian nan vô cùng.

Ví dụ mẫu: (Đề thi học sinh giỏi tỉnh của Sở GD-ĐT Thanh Hóa năm học 2011-2012)

Cho hình chóp $S.ABCD$. Đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = 2a$, (SAB) vuông góc với đáy, các mặt (SBC) và (SCD) cùng tạo với đáy một góc bằng nhau. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{6}}$.

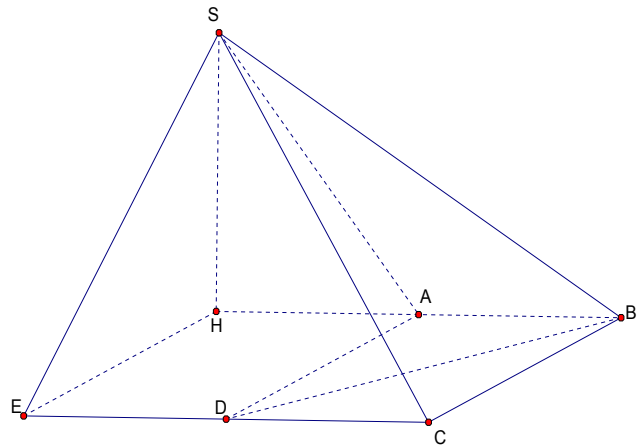
a. Tính $V_{S.ABCD}$

b. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BD .

Lời giải

Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ nên ta gọi H là hình chiếu của S trên AB thì H cũng là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Gọi E là điểm sao cho $HBCE$ là hình vuông, vì các mặt

(SBC) và (SCD) cùng tạo với đáy một góc bằng nhau suy ra $\angle SBH = \angle SEH \Rightarrow \tan \angle SBH = \tan \angle SEH \Rightarrow HB = HE = 2a \Rightarrow A$ là trung điểm của HB.



Đặt $SH = h$ để giải ví dụ 4 ta chỉ cần đi xác định h và dựa vào giả thiết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{6}}$.

Cách 1: Xác định đoạn vuông góc chung của SA và BD.

Cách 2: Bảo toàn thể tích để xác định h .

khoảng cách giữa SA và BD = khoảng cách giữa BD và (SAE)

Gắn với h/c S.ABE $\Rightarrow V_{S.ABE} = V_{B.SAE}$

$$V_{SABE} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3} h \cdot S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3} h \cdot (4a^2 - a^2 - 2a^2) = \frac{a^2 h}{3}$$

$$SE = \sqrt{h^2 + 4a^2}; SA = \sqrt{h^2 + a^2}; AB = 3a^2 \Rightarrow SA^2 + AB^2 = SE^2$$

$$\Rightarrow \triangle SAE \text{ vuông tại A} \Rightarrow S_{\triangle SAE} = \frac{1}{2} SA \cdot AE = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + a^2} \cdot a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow d(B; (SAE)) = \frac{3V}{S_{\triangle SAE}} = \frac{a^2 h}{\frac{a}{2} \sqrt{3h^2 + 3a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \sqrt{6}h = \sqrt{3h^2 + 3a^2}$$

$$\Leftrightarrow bh^2 = 3h^2 + 3a^2 \Leftrightarrow h = a \Rightarrow \text{bài toán được giải quyết.}$$

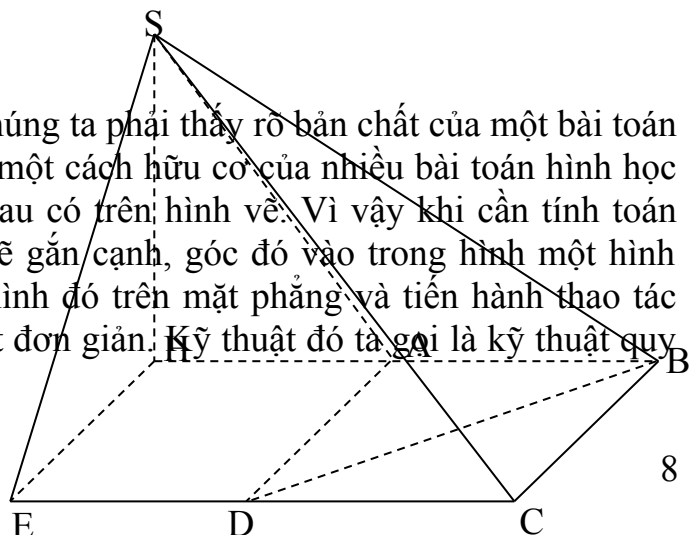
Nhận xét:

Ở đây các bạn có thể tham khảo cách giải thứ nhất và đáp án đầy đủ của ví dụ này trong hướng dẫn chấm của sở GD-ĐT, mục đích của tôi khi đưa ra ví dụ nhằm củng cố thêm niềm tin cho các em về ứng dụng rộng rãi của kỹ thuật bảo toàn thể tích để tính khoảng cách, nó không chỉ áp dụng trong các bài toán thông thường trong SGK, SBT mà trong các kỳ thi Đại học, thậm chí cả các kỳ thi HSG nữa.

2.3.4. Kỹ thuật quy về phẳng:

Nhận xét:

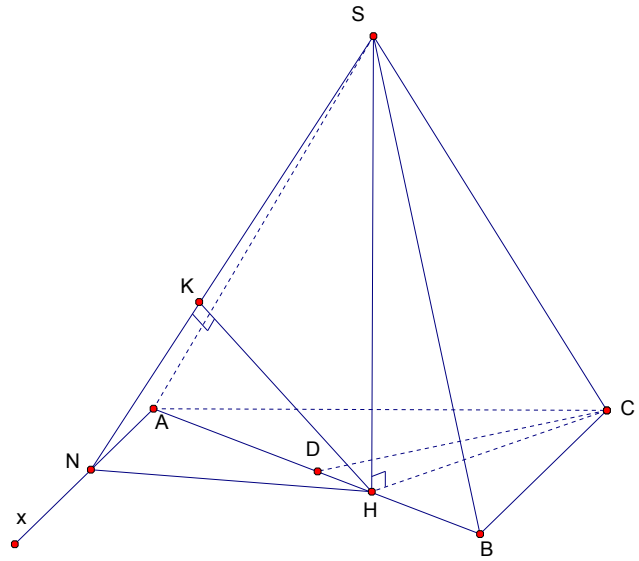
Cốt lõi của kỹ thuật này là chúng ta phải thấy rõ bản chất của một bài toán hình học không gian là sự kết hợp một cách hữu cơ của nhiều bài toán hình học phẳng trên các mặt phẳng khác nhau có trên hình vẽ. Vì vậy khi cần tính toán một cạnh hay một góc nào đó ta sẽ gắn cạnh, góc đó vào trong hình một hình trên một mặt phẳng xác định, vẽ hình đó trên mặt phẳng và tiến hành thao tác tính toán thì công việc trở thành rất đơn giản. Kỹ thuật đó ta gọi là kỹ thuật quy



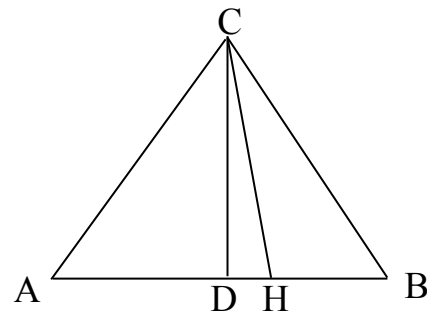
về mặt phẳng, có thể hiểu ngắn gọn là ***làm việc với mặt phẳng nào thì ta tách mặt phẳng đó ra.***

Ví dụ mẫu: (Đề thi Đại học khối A và A1 năm 2012)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.



Muốn tính thể tích khối chóp S.ABC ta cần tính chiều cao SH và diện tích đáy ABC. Do tam giác ABC là tam giác đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; muốn tính SH ta phải gắn vào tam giác SHC. Ta có góc $\angle SCH$ là góc giữa SC và mặt phẳng (ABC), suy ra $\angle SCH = 60^\circ$. Bây giờ ta còn phải tìm HC. Để tìm HC ta gắn vào tam giác ABC và tách mặt phẳng (ABC).



Gọi D là trung điểm của AB. Xét tam giác vuông CDH vuông tại D ta có $HD = \frac{a}{6}$; $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Suy ra $SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}.$$

Muốn tính khoảng cách giữa SA và BC ta kẻ $Ax \parallel BC$. Gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN. Ta có $BC \parallel (SAN)$ và $BA = \frac{2}{3}HA$ nên $d(SA, BC) = d(B, (SAN)) = \frac{3}{2}d(H, (SAN))$. Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$. Do đó $HK \perp (SAN)$. Suy ra $d(H, (SAN)) = HK$. Muốn tìm HK ta gắn vào tam giác SNH và tách mặt phẳng (SNH).

$$\text{Ta có } AH = \frac{2a}{3}, HN = AH \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$

$$\Rightarrow d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Ví dụ về nhà: (Đề thi Đại học khối D năm 2010)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC.

Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

2.3.5. Kỹ thuật “thượng” đường vuông góc:

Chúng ta thường quá quen thuộc với cụm từ hạ đường vuông góc, nhưng thực tế trong giải toán ta lại thường xuyên phải thượng đường vuông góc. Đặc biệt là bài toán định lượng có liên quan đến hình chiếu của đỉnh hình chóp trên mặt phẳng đáy nhưng đề bài chưa cho vị trí của hình chiếu, ta phải cần căn cứ vào giả thiết để xác định xem hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy nằm ở đâu. Với bài toán này ta giải quyết theo các bước sau:

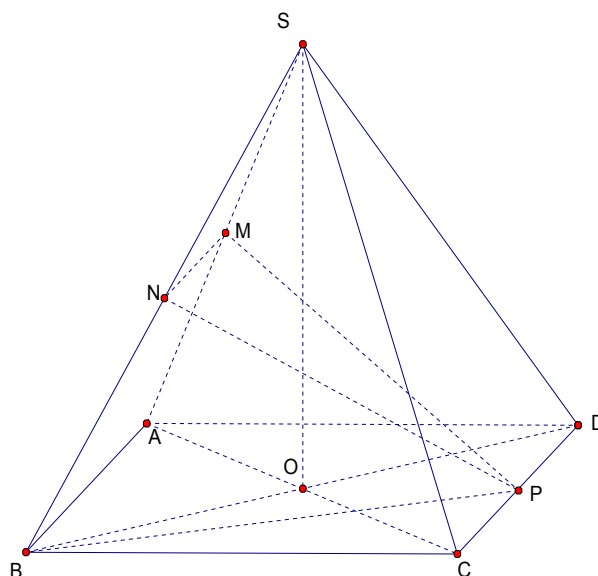
- Vẽ đáy.
- Phân tích giả thiết để xác định hình chiếu của đỉnh hình chóp trên mặt đáy.
- Từ hình chiếu đó thượng đường vuông góc để lấy đỉnh hình chóp (thường ta kẻ song song với lề để dễ nhìn).
- Sau đó mới vẽ các cạnh bên và tính toán theo yêu cầu của đề bài.

Ví dụ mẫu: (Đề thi Cao đẳng khối A năm 2009)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP. Tính theo a thể tích khối tứ diện AMNP.

Nhận xét:

Với bài toán cho hình chóp đều bao giờ ta cũng phải vẽ hình như kỹ thuật này mới đảm bảo hình dễ nhìn, dễ tưởng tượng.



Như vậy với bài toán này ta phải vẽ đáy ABCD trước, sau đó vẽ giao điểm O của hai đường chéo, do S.ABCD là hình chóp đều nên O là hình chiếu của đỉnh S trên (ABCD), từ O thượng đường vuông góc (thường kẻ song song với lề giấy) và trên đó ta lấy điểm S làm đỉnh, nối S với các đỉnh A, B, C, D vẽ thêm các điểm, cạnh,... và thực hiện các phép toán theo yêu cầu của đề bài.

Ví dụ về nhà: (Đề thi Đại học khối D năm 2010)

Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC.

Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

2.3.6. Kỹ thuật suy luận ngược và loại trừ:

Nhận xét:

Cách làm này thường được giáo viên hướng dẫn cho học sinh khi mới bắt đầu chứng minh hình học không gian. Khi học Hình không gian học sinh có một “**ngưỡng**” nhất định, khi đạt đến “**ngưỡng**” đó thì học sinh nhìn vào hình vẽ là có thể hình dung con đường để chứng minh, và vì sao lại đi theo con đường đó. Để có được điều đó cần cả một quá trình luyện tập lâu dài, còn trước hết giáo viên cần tập cho học sinh kỹ thuật suy luận ngược và loại trừ.

Ví dụ mẫu: (Ví dụ trang 101 SGK HH-11 nâng cao)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; $SA \perp mp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên các đường thẳng SB, SD. Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$.

Hướng dẫn:

- Đặt câu hỏi 1 cho học sinh: Để chứng minh $d \perp (P)$ ta cần chứng minh điều gì? Mục đích để cho học sinh trả lời được: Ta cần chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P).

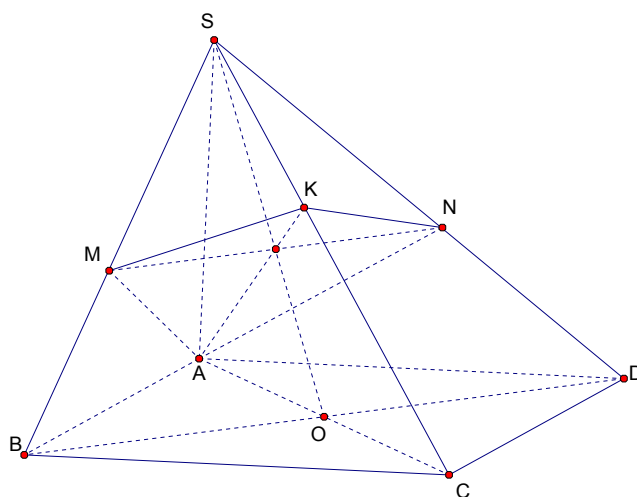
- Tiếp tục đặt câu hỏi 2: Trong mặt phẳng (AMN) có những đường thẳng nào có tên trên hình? Mục đích để học sinh trả lời được: chỉ gồm các đường: AM, AN, MN.

- Đặt vấn đề ta sẽ thử chứng minh lần lượt từng đường. Đầu tiên ta chứng minh $SC \perp AM$.

- Đặt câu hỏi 3 cho học sinh: Để chứng minh $a \perp b$ ta cần chứng minh điều gì? Mục đích để cho học sinh trả lời: Ta cần chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia. Vậy để chứng minh $SC \perp AM$ ta có hai con đường, một là chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng chứa AM, hai là chứng minh AM vuông góc với mặt phẳng chứa SC. Trước hết ta chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng chứa AM.

- Đặt câu hỏi 4 cho học sinh: Nêu các mặt phẳng chứa đường AM? Mục đích cho học sinh trả lời: Có hai mặt phẳng là (AMN) và (SAB).

- Vì ta đang phải chứng minh $SC \perp (AMN)$ nên ta chỉ còn con đường chứng minh được $SC \perp (SAB)$. Giả sử chứng minh được $SC \perp (SAB)$ thì $SC \perp SA$ dẫn đến tam giác SAC có hai góc vuông (vô lý). Vậy loại trừ đi khả năng này.



- Đặt vấn đề ngược lại: Ta đi chứng minh AM vuông góc với mặt phẳng chứa SC.

- Đặt câu hỏi 5 cho học sinh: Nêu các mặt phẳng chứa SC? Mục đích cho học sinh trả lời: Gồm các mặt phẳng sau (SBC), (SAC), (SDC).

- Đặt vấn đề cho học sinh suy nghĩ xem có cơ sở nào ở giả thiết có thể dẫn đến $AM \perp (SAC)$ hay không? Mục đích câu trả lời là không vì không có mối liên quan gì. Tương tự không có cơ sở để suy ra $AM \perp (ADC)$. Vậy hai khả năng này bị loại trừ.

- Đặt câu hỏi 6 cho học sinh: Chứng minh $AM \perp (SBC)$ bằng các giả thiết hiện có? Mục đích học sinh trả lời: $AM \perp SB$ (1).
$$\begin{cases} BC \perp BA(gt) \\ BC \perp SA(do SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM \text{ (2). Từ (1) và (2) suy ra: } AM \perp (SBC).$$

- Đặt vấn đề tương tự để học sinh tiếp tục chứng minh $SC \perp AN$ vì vai trò của AM và AN như nhau. Đó là quá trình suy luận ngược và xét tất cả các khả năng có thể xảy ra rồi loại trừ những khả năng không thể xảy ra từ đó dẫn đến điều cần chứng minh. Còn lời giải của bài toán thì trình bày ngược lại.

Kết luận: Quá trình trên được lập lại nhiều lần, làm nhiều đến một lúc nào đó khi nhìn vào hình các em sẽ hình dung ra con đường để đi đến kết quả mà không phải đi hết các con đường rồi loại trừ dần. Làm nhiều ví dụ như trên học sinh sẽ trả lời được câu hỏi vì sao học hình khó? Hay vì sao khi không hiểu bài hình mà đọc lời giải thì càng không hiểu? và vì sao biết học hình thì học dễ hơn học các phân môn khác như Đại số hay Giải tích.

Ví dụ về nhà: (Bài 27 trang 119 SBT HH-11 nâng cao)

Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường chéo AC và BF vuông góc. Gọi CH và FK lần lượt là hai đường cao của tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng:

a. ACH và BFK là các tam giác vuông.

b. $BF \perp AH$; $AC \perp BK$.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giảng dạy và giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

Sáng kiến kinh nghiệm đã giúp tôi hệ thống lại các kỹ năng cần thiết nhất khi giải một bài toán Hình học không gian, đồng thời giúp tôi tự tin hơn trong việc giúp các em học sinh tiếp thu kiến thức, hình thành kỹ năng giải toán Hình học không gian.

Đặc biệt sáng kiến kinh nghiệm đã giúp các em học sinh tiếp cận với một vấn đề khó của Toán học một cách đơn giản nhất, các em chủ động trong tiếp thu kiến thức và hình thành kỹ năng giải toán, chất lượng điểm số bài thi của các em tăng rõ rệt.

3. Kết luận, kiến nghị.

3.1. Nhận xét kết quả thu được:

Qua giảng dạy và kiểm tra thực nghiệm với các đối tượng học sinh khác nhau tôi nhận thấy rằng:

- Đối với các đối tượng học sinh chưa được tìm hiểu chuyên đề dù là ở nhóm học sinh được đánh giá là học lực khá như lớp 12A1 nhưng các em có kết quả chưa cao. Lý do là các em chưa nắm vững kiến thức, và chưa có kỹ năng cần

thiết về hình học không gian. Tuy nhiên vẫn có một số em thực hiện khá tốt các bài đánh giá bởi các em này đa phần là các học sinh có kiến thức nền tốt, khả năng tư duy và ham học hỏi nên có sự, tìm tòi và tìm hiểu tốt. Nhưng qua tiếp xúc với các em học sinh này tôi nhận thấy phần lớn các em chưa có khả năng tổng quát hoá được các kỹ năng vì vậy mức độ nhớ lâu của các em là ít, điều này ảnh hưởng đến khả năng phân tích của các em sau này khi đụng phải dạng toán ứng dụng mở rộng hơn.

- Với các đối tượng đã được tôi giới thiệu và cùng các em tìm hiểu chuyên đề này thì phần lớn các em đã làm được bài và biết cách phân tích để làm các bài toán khó hơn qua đó hình thành được một số kỹ năng cần thiết. Số em được điểm cao nâng lên rõ rệt và số em ở trình độ trung bình sau khi được tiếp xúc và tìm hiểu chuyên đề cũng có khả năng làm được bài cao hơn.

Như vậy qua đây bản thân Tôi nhận thấy rằng: Chất lượng học sinh ở các nhóm lấy làm đối chứng có trình độ và khả năng tiếp thu tuy khác nhau, nhưng nếu được giáo viên tạo điều kiện tiếp xúc và giới thiệu cho các em tìm hiểu các kỹ năng thì các em không những nắm vững kiến thức mà các em còn vận dụng linh hoạt kiến thức vào các bài toán. Qua đó bản thân tôi có thể rút ra một số bài học kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy.

3.2. Bài học kinh nghiệm:

- Dạy học là một nghệ thuật và là một quá trình tích lũy kinh nghiệm lâu dài vì vậy để nâng cao trình độ và khả năng chuyên môn thì việc đưa ra các sáng kiến kinh nghiệm cho quá trình giảng dạy của mình để rút kinh nghiệm đồng thời học hỏi đồng nghiệp là việc làm thường xuyên và cần thiết.

- Thường xuyên tìm hiểu sâu các bài toán trong chương trình để nhằm giúp học sinh khái quát và tổng hợp thành những dạng toán chung dễ nhớ.

- Luôn có ý thức liên hệ và ôn tập các phần đã học để giúp học sinh ôn tập và thấy được mối quan hệ hữu cơ giữa các phần đã học và kiến thức mới.

- Ngoài việc truyền tải kiến thức cho các em, cần quan tâm nhiều đến việc hình thành các kỹ năng.

- Việc phân loại đối tượng học sinh để đôi khi giảng dạy đúng đối tượng là rất cần thiết nhằm giúp các em có trình độ phù hợp hơn với lớp học.

Trên đây là toàn bộ một số điều rút ra từ kinh nghiệm giảng dạy của bản thân mình về một vấn đề rất nhỏ trong chương trình. Vì điều kiện khả năng có hạn vì vậy không thể tránh khỏi thiếu sót. Rất mong được sự góp ý của các đồng nghiệp.

Cuối cùng tôi xin gửi lời chân thành cảm ơn các đồng nghiệp trong tổ Toán trường THPT Vĩnh Lộc - Thanh Hóa đã giúp đỡ tôi trong quá trình tiến hành kiểm nghiệm và hoàn thành SKKN, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến Hội đồng khoa học Trường THPT Vĩnh Lộc - Thanh Hóa, Hội đồng khoa học ngành đã đọc SKKN này và góp nhiều ý kiến sâu sắc cho sáng kiến.

Nguyễn Thị Hà	Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Trịnh Đình Hiếu
-----------------------------	--

Tài liệu tham khảo:

1. Đề kiểm tra theo chuẩn kiến thức, kỹ năng ĐS-GT11 và HH11 của tác giả Nguyễn Thế Thạch chủ biên.
2. Đề thi ĐH của Bộ GD-ĐT các năm từ 2002 đến nay.
3. Đề thi HSG tỉnh Thanh Hóa các năm gần đây.
4. Giải toán Hình học 11,12 của Lê Hồng Đức – Nhóm cự môn.
5. Sách HH 11,12 cơ bản và nâng cao.
6. Sách BTHH 11,12 cơ bản và nâng cao.
7. Sách giáo viên HH 11,12 cơ bản và nâng cao.
8. Tài liệu bồi dưỡng giáo viên thực hiện chương trình và sách giáo khoa lớp 11,12.

Phụ lục

1. Phiếu điều tra nhu cầu của học sinh về nội dung đề tài.

Câu hỏi 1: Theo em việc rèn kỹ năng trong giải toán Hình học không gian có quan trọng không ? Vì sao?

Câu hỏi 2: Em đã được thầy cô giảng dạy bộ môn Toán của mình giới thiệu những kỹ năng nào trong giải toán Hình học không gian?

2. Phiếu điều tra những vấn đề mà học sinh vướng mắc có liên quan đến đề tài.

Câu hỏi 1: Theo em việc tiếp thu kiến thức hay việc rèn các kỹ năng trong giải toán Hình học không gian là khó khăn hơn?

Câu hỏi 2: Trong các kỹ năng được giới thiệu em thấy kỹ năng nào khó tiếp thu nhất? kỹ năng nào hay sử dụng nhất?

3. Phiếu kiểm nghiệm kết quả học tập; tinh thần thái độ trước và sau khi áp dụng đề tài.

Trong qua trình giảng dạy nhằm đánh giá tư duy của học sinh và so sánh kết quả việc thực hiện nhằm rút ra kinh nghiệm cho bản thân, tôi đã thực hiện thử nghiệm trên các đối tượng học sinh mình trực tiếp giảng dạy ở hai lớp 12A1 và 12A6 kết quả thu được thông qua hai đề kiểm tra sau:

Nhận xét: Với hai đề bài trên tiến hành kiểm tra trên hai lớp ở hai lần với hai đối tượng khác nhau. Lần một với đối tượng ngẫu nhiên chưa được nghiên tìm hiểu chuyên đề dưới sự hướng dẫn của giáo viên. Lần hai với đối tượng ngẫu nhiên với các em đã được sự hướng dẫn của giáo viên. Kết quả thu được như sau:

Lần 1: Kiểm tra trên đối tượng lớp 12A6 là một lớp cơ bản với kiến thức cơ bản chỉ ở trình độ trung bình với nhóm 1 là nhóm chưa được tìm hiểu chuyên đề, nhóm 2 là nhóm đã được hướng dẫn tìm hiểu chuyên đề.

Nhóm 1:

Loại điểm	9 - 10		7 - 8		5 - 6		Dưới 5.	
	Slượng	%	Slượng	%	Slượng	%	Slượng	%
Kết quả	0	0	3	7,5	12	30	25	62,5

Nhóm 2:

Loại điểm	9 - 10		7 - 8		5 - 6		Dưới 5.	
	Slượng	%	Slượng	%	Slượng	%	Slượng	%
Kết quả	4	10	8	20	15	37,5	13	32,5

Lần 2: Kiểm tra trên đối tượng lớp 12A1 là một lớp nâng cao với kiến thức cơ bản ở trình độ khá với nhóm 1 là nhóm chưa được tìm hiểu chuyên đề, nhóm 2 là nhóm đã được hướng dẫn tìm hiểu chuyên đề.

Nhóm 1:

Loại điểm	9 - 10		7 - 8		5 - 6		Dưới 5.	
	Slượng	%	Slượng	%	Slượng	%	Slượng	%
Kết quả	1	2,5	7	17,5	17	42,5	15	37,5

Nhóm 2:

Loại điểm	9 - 10		7 - 8		5 - 6		Dưới 5.	
	Slượng	%	Slượng	%	Slượng	%	Slượng	%
Kết quả	7	17,5	12	30	15	37,5	6	15