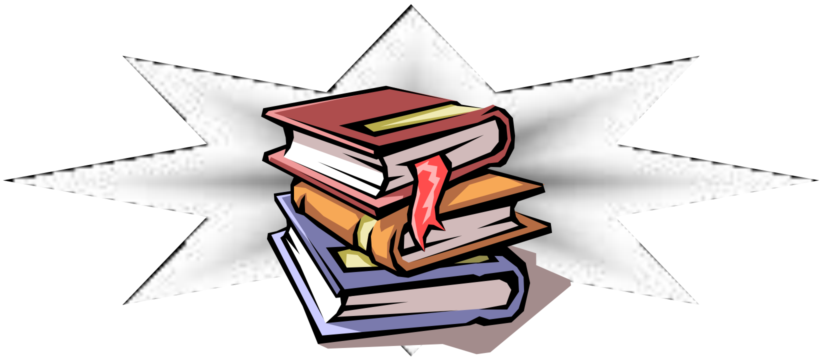
Tailieumontoan.com

Văn Phú Quốc



CHUYÊN ĐỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

ĐỘT PHÁT ĐỈNH CAO SỐ HỌC

Sưu tầm

LŨY THỪA CỦA SỐ NGUYÊN (POWERS OF INTEGERS)

CHUYÊN ĐỀ 2.1: SỐ CHÍNH PHƯƠNG (SQUARE NUMBER)

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa. Số nguyên a được gọi là số chính phương nếu nó là bình phương của một số nguyên, tức là $a=b^2$ với b là số nguyên.

2. Tính chất

a) Nếu a chẵn thì $a^2 \vdots 4$

b) Nếu a lẻ thì $\left(a^2-1\right) \vdots 8$

c) Nếu $a \vdots 3$ thì $a^2 \vdots 9$

d) Nếu $a \vdots 3$ thì $\left(a^2-1\right) \vdots 3$

e) Nếu $(a-1) \vdots 3$ thì $\left(a^3-1\right) \vdots 9$; Nếu $(a+1) \vdots 3$ thì $\left(a^3+1\right) \vdots 9$

f) Nếu a là một số chính phương, a chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p^2.

g) Nếu a^2 chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p

h) Nếu tích hai số a và b là một số chính phương thì các số a và b có dạng $a=mp^2; b=mq^2$

i) Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

3. Một số kết quả "đẹp"

a) Số chính phương chỉ có chữ số tân cùng thuộc tập hợp: $\{1;2;4;5;6;9\}$.

b) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

c) Số chính phương chỉ có một trong các dạng $4k$ hoặc $4k+1$. Không có số chính phương nào có dạng $4k+2$ hoặc $4k+3$ với $k \in \mathbb{N}$.

d) Số chính phương chỉ một trong các dạng $3k$ hoặc $3k+1$. Không có số chính phương nào có dạng $3k+2$ với $k \in \mathbb{N}$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG HOẶC LÀ TỔNG CỦA NHIỀU SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Ví dụ 1. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: $A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

Lời giải:

Ta có:

$$A=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1=\left(n^2+3n\right)^2+2\left(n^2+3n\right)+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$$

Vì $n\in\mathbb{N}$ nên $n^2+3n+1\in\mathbb{N}$. Vậy A là số chính phương.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:

a) $A=224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9$ b) $B=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6$

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}A&=224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9\\&=224.10^{2n}+99...9.10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=224.10^{2n}+\left(10^{n-2}-1\right).10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=224.10^{2n}+10^{2n}-10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=225.10^{2n}-90.10^{n}+9\\&=\left(15.10^{n}-3\right)^2\end{aligned}$$

Vậy A là số chính phương.

b) Ta có :

$$\begin{aligned}B&=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6\\&=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n}+1\\&=\underbrace{11...1}_{n}.10^{n}+5.\underbrace{11...1}_{n}+1\\&=\frac{10^{n}-1}{9}.10^{n}+5.\frac{10^{n}-1}{9}+1\\&=\frac{10^{2n}-10^{n}+5.10^{n}-5+9}{9}\\&=\frac{10^{2n}+4.10^{n}+4}{9}\\&=\left(\frac{10^{n}+2}{3}\right)^2\end{aligned}$$

Do đó B là số chính phương.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $A=\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5$ là một số chính phương

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}A&=\underbrace{11...11}_{1997}.10^{1999}+\underbrace{22...22}_{1998}.10+5\\&=\frac{1}{9}\left(10^{1997}-1\right).10^{1999}+\frac{2}{9}\left(10^{1998}-1\right).10+5\\&=\frac{1}{9}\left(10^{1996}+2.5.10^{1998}+25\right)=\left[\frac{1}{3}\left(10^{1998}+5\right)\right]^2\\&=\left(\frac{\overbrace{100...00}^{1997}5}{3}\right)^2=\underbrace{33...33}_{1997}5^2\end{aligned}$$

Vậy A là số chính phương.

Ví dụ 4. Cho $x,y\in\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng: $A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ là số chính phương.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}A&=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4\\&=\left(x^2+5xy+4y^2\right)\left(x^2+5xy+6y^2\right)+y^4\end{aligned}$$

Đặt $u=x^2+5xy+5y^2\in\mathbb{Z}$

Khi đó $A=(u-y)^2(u+y)^2+y^4=u^2-y^4+y^4=u^2$

Vậy A là số chính phương.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số liên tiếp không thể là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử: $n-2;n-1;n;n+1;n+2$ với $2\le n\in\mathbb{N}$ là 5 số tự nhiên liên tiếp

Ta có: $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5\left(n^2+2\right)$

Vì n^2 không thể có chữ số tận cùng là 3 hoặc 8 nên $\left(n^2+2\right)\not\vdots\,5\Rightarrow5\left(n^2+2\right)$ không là số chính phương.

Vậy tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không phải số chính phương.

Ví dụ 6. Cho $2 \le n \in \mathbb{N}$, Chứng minh rằng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không thể là số chính phương

Lời giải

Ta có $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right)$

$$= n^2\left[n^2\left(n^2-1\right) + 2\left(n+1\right)\right]$$

$$= n^2\left[n^2\left(n-1\right)\left(n+1\right) + 2\left(n+1\right)\right]$$

$$= n^2\left(n+1\right)^2\left(n^2 - 2n + 2\right)$$

Với $2 \le n \in \mathbb{N}$, ta có $n^2 - 2n + 2 > n^2 - 2n + 1 = \left(n+1\right)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2\left(n-1\right) < n^2$. Do đó $\left(n-1\right)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$

Như vậy $n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương nên A không phải là số chính phương.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử: $a = 2m + 1,\ b = 2n + 1$, với $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $a^2 + b^2 = \left(2m+1\right)^2 + \left(2n+1\right)^2 = 4\left(m^2 + m + n^2 + n\right) + 2 = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Không có số chính phương nào có dạng $4k + 2$ vì vậy $a^2 + b^2$ không phải số chính phương.

Ví dụ 8. (Romanian MO 2003)

Cho k là một số nguyên dương và $a = 3k^2 + 3k + 1$

a) Chứng minh rằng $2a$ và a^2 là tổng của ba số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu a là một ước của một số nguyên duong b và b là một tổng gồm ba số chính phương thì b^n là một tổng của bà số chính phương.

Lời giải

a) Ta có $2x = 6k^2 + 6k + 2 = \left(2k+1\right)^2 + \left(k+1\right)^2 + k^2$

và $a^2 = 9k^4 + 18k^3 + 15k^2 + 6k + 1 = \left(k^2 + k\right)^2 + \left(2k^2 + 3k + 1\right)^2 + \left(2k^2 + k\right)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

b) Vì $a | b$ nên đặt $b = ca$.

Vì b là tổng của ba số chính phương nên đặt $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Khi đó $b^2 = c^2.a^2 = c^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

Để kết thúc việc chứng minh, ta tiến hành như sau: cho $n=2p+1$ ta được:

$b^{2p+1}=\left(b^{p}\right)^{2}\left(b_{1}^{2}+b_{2}^{2}+b_{3}^{2}\right)$ và cho $n=2p+2$ ta được $b^{n}=\left(b^{p}\right)^{2}b^{2}\left(a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+a_{3}^{2}\right)$

Dạng 2. Tìm giá trị của biến để một biểu thức là số chính phương

Ví dụ 1. (Đề thi vào lớp 10 chuyên, trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội năm 1992).

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

Lời giải

Vì $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương nên:

$n^4+2n^3+2n^2+n+7=m^2,\ m\in\mathbb{N}.$

Ta có:

$$m^2=\left(n^2+n\right)^2+n^2+n+7>\left(n^2+n\right)^2\Rightarrow m>\left|n^2+n\right|\Rightarrow m\geq\left|n^2+n\right|+1$$

$$\Rightarrow m\geq\left|n^2+n+1\right|\Rightarrow m^2\geq\left(n^2+n+1\right)^2.$$

Khi đó

$$n^4+2n^3+2n^2+n+7\geq\left(n^2+n+1\right)^2\Leftrightarrow n^2+n-6\leq0\Leftrightarrow-3\leq n\leq2.$$

Vì $n\in\mathbb{Z}$ nên $n\in\left\{-3;-2;-1;0;1;2\right\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $n=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. (Romanian MO 2004). Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho có các số nguyên $a,\ b$ thỏa mãn $n^2=a+b$ và $n^3=a^2+b^2$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $2\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a+b\right)^2$ ta có được $2n^3\geq n^4$ hay $n\leq2$.

- Với $n=0,$ ta chọn $a=b=0.$
- Với $n=1,$ ta chọn $a=1,\ b=0.$
- Với $n=2,$ ta chọn $a=b=2.$

Vậy các giá trị của n cần tìm là $0;\ 1;\ 2.$

Ví dụ 3. Tìm số nguyên n sao cho $n+1955$ và $n+2014$ là một số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $n+1955=a^2;\ n+2014=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}$ và $a<b.$

Khi đó $b^2-a^2=59\Leftrightarrow\left(b-a\right)\left(b+a\right)=59\Leftrightarrow\begin{cases}b-a=1\\b+a=59\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=29\\b=30\end{cases}.$

Dễ dàng suy ra $n=-1114.$

Ví dụ 4. Tìm số tự nhiên n sao cho 2^n+9 là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $2^n+9=m^2,\ m\in\mathbb{N}\Leftrightarrow(m-3)(m+3)=2^n.$

Vì $m-3<m+3$ nên $\begin{cases}m-3=2^a\\m+3=2^b\end{cases}$, với $a,\ b\in\mathbb{N}$ và $a<b.$

Ta có $2^b-2^a=6\Leftrightarrow 2^a\left(2^{b-a}-1\right)=6.$

Vì $2^a\left(2^{b-a}-1\right)\,\vdots\,2$ mà $2^a\left(2^{b-a}-1\right)\,\not\vdots\,4$ nên $a=1.$ Điều này dẫn đến $m=5$ và $n=4.$

Ví dụ 5. Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $A=1!+2!+3!+...+n!$ là một số chính phương.

Lời giải:

Xét $n=1$ ta có $A=1!=1=1^2$ là số chính phương.

Xét $n=2$ ta có $A=1!+2!=1+2=3$ không phải là số chính phương.

Xét $n=3$ ta có $A=1!+2!+3!=1+2+6=9=3^2$ là số chính phương.

Xét $n\ge 4$ ta có $1!+2!+3!+4!=33$ và $5!;\ 6!;\ \ldots;\ n!$ đều có chữ số tận cùng là chữ số 0 nên A có chữ số tận cùng là chữ số 3 nên A không phải là số chính phương.

Vậy $n=1,\ n=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6. Tìm $3\le a\in\mathbb{N}$ sao cho $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}.$

Lời giải:

Ta có $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}\Leftrightarrow\overline{a(a-1)}^2=\overline{(a-2)aa(a-1)}.$ (*)

Vì VT(*) là số chính phương nên VP(*) cũng là số chính phương.

Vì số chính phương chỉ có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{0;1;4;5;6;9\}$

nên a có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{1;2;5;6;7;0\}$.

Do a là chữ số nên $a\le 9.$ Kết hợp với $3\le a\in\mathbb{N}$ nên $a\in\{5;6;7\}.$

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $a=7$ thỏa mãn $76^2=5776.$

Ví dụ 7. Tìm tất cả các bộ ba nguyên dương $(x;y;z)$ sao cho
$A=x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)$ là số chính phương.

Lời giải:

Ta có $(x+y+z\pm1)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z\pm1)+2y(z\pm1)\pm2z+1.$

Mà $A=x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)$ nên ta có đánh giá sau

$(x+y+z-1)^2<A<(x+y+z+1)^2.$

Suy ra $A=(x+y+z)^2$.

Khi đó $x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)=(x+y+z)^2$

$$\Leftrightarrow 2y-2x=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Vậy $(x;y;z)=(a;a;b)$ với $a,\ b$ là các số nguyên dương tùy ý.

DẠNG 3: TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ.

Ví dụ 1. Hãy tìm tất cả các số chính phương gồm bốn chữ số biết rằng hai chữ số đầu lớn hơn hai chữ số sau 1 đơn vị.

Lời giải:

Đặt $\overline{abcd}=x^2$, với $32 \le x < 100$.

Theo đề ta có $\overline{ab}-\overline{cd}=1$.

Điều này dẫn đến $100\overline{ab}+\overline{cd}=x^2 \Leftrightarrow 100\left(\overline{cd}+1\right)+\overline{cd}=x^2$

$$\Leftrightarrow 101\overline{cd}=x^2-100 \Leftrightarrow 101\overline{cd}=(x-10)(x+10).$$

Suy ra $101|x+10$ hoặc $101|x-10$.

Lại vì $\gcd(x-10;101)=1$ nên $101|x+10$.

Ta thấy $32 \le x < 100 \Rightarrow 42 \le x+10 < 110 \Rightarrow x+10=101 \Rightarrow x=91$.

Như vậy $\overline{abcd}=91^2=8281$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Hãy tìm tất cả các số chính phương có bốn chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau và 2 chữ số cuối giống nhau.

Lời giải:

Gọi số chính phương cần tìm là $\overline{aabb}=x^2$

Với $a \in \{1;2;...;9\}$, $b \in \{1;2;...;9\}$ và $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó $x^2=11.\overline{a0b}=11(100a+b)=11(99a+a+b)$. (*)

Theo dấu hiệu chia hết cho 11 ta dễ dàng suy ra $x^2 \vdots 11$. Điều này dẫn đến $(a+b)\vdots 11$.

Vì $1 \le a \le 9,\ 0 \le b \le 9$ với $a,\ b \in \mathbb{N}$

nên $1 \le a+b \le 18 \Rightarrow a+b=11 \Rightarrow b=11-a$.

Thay vào (*) ta được $x^2=11^2(9a+1)$.

Lại vì x^2 và 11^2 là các số chính phương nên $9a+1$ phải là số chính phương.

Thử lần lượt các giá trị trong tập $\{1;2;...;9\}$ chỉ có $a=7(\Rightarrow b=4)$.

Vậy số chính phương cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là 7744.

Ví dụ 3. Hãy tìm số chính phương lớn nhất có chữ số cuối khác 0 sao cho khi xóa bỏ hai chữ số cuối thì nhận được một số chính phương.

Lời giải:

Gọi số chính phương cần tìm là $\overline{abc}=x^2$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{N}$ và $b\le 0,\ c\le 9,\ c\ne 0.$

Theo đề $a=y^2$.

Ta có $x^2>100y^2\Rightarrow x>10y\Rightarrow x\ge 10y+1.$

Suy ra $100>\overline{bc}=x^2-100y^2\ge(10y+1)^2-100y^2=20y+1\Rightarrow y\le 4.$

Đến đây ta dễ dàng tìm được số chính phương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1681.

Ví dụ 4. Tìm một số chính phương có 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Lời giải:

Gọi số chính phương cần tìm là $\overline{abcd}$ với $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{N}$ và $1\le a\le 9,\ 0\le b,c,d\le 9.$

Vì $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $d\in\{0;1;4;5;6;9\}$. Lại vì d nguyên tố nên $d=5.$

Đặt $\overline{abc5}=x^2<10000\Rightarrow 32\le x<100.$

Do x là một số có hai chữ số và x^2 có chữ số tận cùng bằng 5 nên x cũng có chữ số tận cùng bằng $5.$ Tổng các chữ số của x là một số chính phương nên chỉ có thể là $x=45.$ Suy ra $\overline{abcd}=45^2=2025.$

Vậy số cần tìm là $2025.$

Ví dụ 5. Hãy tìm hai số chính phương phân biệt $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ biết rằng $a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$.

Lời giải:

Đặt $\overline{a_1a_2a_3a_4}=a^2$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}.$

Giả sử rằng $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}$. Khi đó $32\le b<a<100$ và $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}=a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1111c=11.101c$ (do việc đặt $c=a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$).

Do 11; 101 là các số nguyên tố và $a+b<200,\ a-b<100$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=101\\ a-b=11c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=(101+11c)\,\vdots\,2\\ b=(101-11c)\,\vdots\,2\end{cases}.$$

Vì $b \geq 32$ nên $c \leq 3$. Kết hợp với $a+b=101$ (số lẻ) nên c lẻ, nghĩa là $c=1$ hoặc $c=3$.

Điều này dẫn đến $\begin{cases} a=56 \\ b=45 \end{cases}; \begin{cases} a=67 \\ b=34 \end{cases}$.

Do đó các cặp số chính phương phải tìm là: 3136 và 2025; 4489 và 1156.

Trong trường hợp $a+b=11c$ thì $c=1$ (bị loại).

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. (Kurschák 1953). Cho $n, d \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $d \mid 2n^2$. Chứng minh rằng n^2+d không thể là số chính phương.

Lời giải:

Ta có $d \mid 2n^2 \Rightarrow 2n^2 = kd$.

Giả sử có số nguyên m sao cho:

$$n^2+d=m^2 \Rightarrow n^2k^2+dk^2=m^2k^2 \Rightarrow \left(\frac{mk}{n}\right)^2 = k^2+2k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra k^2+2k là số chính phương. Vô lý vì $k^2 < k^2+2k < (k+1)^2$.

2. Có tồn tại hay không 2013 số nguyên dương $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2013}$ sao cho các số $a_1^2+a_2^2,\ a_1^2+a_2^2+a_3^2,\ a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2013}^2$ đều là số chính phương?

Lời giải:

Xuất phát từ đồng nhất thức $(2a+1)^2+(2a^2+2a)^2=(2a^2+2a+1)^2$;

Ta chọn $a=1$ và $a_1=3=2a+1,\ a_2=4=2a^2+2a,$ ta được:

$$a_1^2+a_2^2=(2a^2+2a+1)^2=5^2.$$

Chọn $a_3=2(a^2+a)^2+2(a^2+a)=12$ ta có:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left(2(a^2+a)+1\right)^2+\left(2(a^2+a)^2+2(a^2+a)\right)^2$$

$$=\left(2(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1\right)^2=13^2.$$

Cứ như vậy ta chọn được 2013 số thỏa mãn.

3. (Komal – Hungary C.640, 2001). Tìm tất cả các số tự nhiên thỏa mãn tính chất sau: Nếu thay đổi hai chữ số cuối cùng của bình phương số tự nhiên đó, ta nhận được bình phương của số tự nhiên liền sau nó.

Lời giải:

Giả sử n^2 có hai chữ số tận cùng là A và B (theo thứ tự là phải sang trái) thì hai chữ số tận cùng của $(n+1)^2$ là B và A (theo thứ tự).

Suy ra: $2n+1=(n+1)^2-n^2=(10B+A)-(10A+B)=9(B-A)$.

Suy ra $B-A$ lẻ.

Nếu $A=0$ thì $(n+1)^2=0$ nên phải có $B=0$, tuy nhiên $2n+1$ không thể bằng 0. Do đó $A\neq 0$. Suy ra: $B>A$. Ta có: $B\leq 9$ nên $B-A\leq 9-1=8$. Vì $B-A$ lẻ nên $B-A=\{1;3;5;7\}$. Vì vậy $n\in\{4;13;22;31\}$. Khi đó: n^2 và $(n+1)^2$ là các cặp: 16 và 25; 169 và 196; 484 và 529; 961 và 1024.

Số tự nhiên duy nhất thỏa mãn là: 13.

4. (Komal – Hungary C.676, 2002). Tìm số nguyên a, b sao cho $a^4+(a+b)^4+b^4$ là số chính phương.

Lời giải

Khi chia cho 4, một số chính phương (chẵn, lẻ) cho số dư 0 hoặc 1 (tương ứng: chẵn, lẻ). Suy ra: trong các số a, b và $a+b$ có nhiều nhất là một số lẻ. Điều này xảy ra khi và chỉ khi a, b đều là số chẵn, tức là: $a=2m$, $b=2n$.

Suy ra $a^4+(a+b)^4+b^4=16\left(m^4+(m+n)^4+n^4\right)$ và nếu số này chính phương thì $m^4+(m+n)^4+n^4$ cũng là chính phương. Khi đó m, n đều là số chẵn.

Ta tiếp tục lý luận như thế. Từ đó suy ra a và b chia hết cho mọi lũy thừa của 2. Điều này chỉ xảy ra khi $a=b=0$.

Vậy ta tìm được $a=b=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

5. (APMO 1999). Xác đinh tất cả các cặp số nguyên $(a;b)$ sao cho hai số a^2+4b và b^2+4a đều là những số chính phương.

Lời giải 1:

Các cặp số nguyên thỏa mãn đề bài là:

$(a;b)=(k^2;0)$, $(0;k^2)$, $(-4;-4)$, $(-5;-6)$, $(-6;-5)$ và $(a;b)=(k;1-k)$, với mọi $k\in\mathbb{Z}$.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|a|\geq|b|$.

- Nếu $b=0$ thì $a=k^2$ với $k\in\mathbb{Z}$.

- Nếu $b\neq 0$, phương trình bậc hai $x^2+ax-b=0$ sẽ có nghiệm nguyên khác 0 là x_1; x_2.

Hơn nữa ta có: $\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}\ge\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ge 1$ nên một trong hai nghiệm, chẳng hạn x_1 thỏa mãn $|x_1|\le 2$ tức là $x_1\in\{2;-2;1;-1\}$. Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Nếu $x_1=2$ ta có $b=2a+4$ và $b^2+4a=4a^2+20a+16=\left(2a+5^2\right)-9$ là một số chính phương. Ta xét phương trình $x^2-9=y^2$ với các số nguyên $x,\ y$. Nghiệm của phương trình này là $(\pm3;0)$. Do đó $2a+5=\pm3$. Điều này cho ta $(a;b)=(-4;-4)$ hay $(-1;2)$. Nghiệm $(-1;2)$ loại bỏ vì ta giả thiết $|a|\ge|b|$.

TH2: Nếu $x_1=-2$ thì $b=4-2a$ và $b^2+4a=4a^2-12a+16=(2a-3)^2+7$ là một số chính phương.

Ta xét phương trình $x^2+7=y^2$ với các số nguyên $x,\ y$. Nghiệm của phương trình này là: $(\pm3;\pm4)$. Do đó $2a-3=\pm3$. Suy ra $(a;b)=(3;-2)$ hay $(0;4)$. Nghiệm $(0;4)$ bị loại bỏ vì ta có giả thiết $|a|\ge|b|$.

TH3: Nếu $x_1=1$ thì $b=a+1$ và $b^2+4a=a^2+6a-1=(a+3)^2-8$ là một số chính phương. Ta xét phương trình $x^2-8=y^2$ với các số nguyên $x,\ y$. Nghiệm của phương trình này là: $(\pm3;\pm1)$. Do đó: $a+3=\pm3$. Suy ra $(a;b)=(-6;-5)$ hay $(0;1)$. Nghiệm $(0;1)$ bị loại bỏ theo giả thiết $|a|\ge|b|$.

TH4: Nếu $x_1=-1$ ta có $b=1-a$. Bây giờ $b^2+4a=a^2+2a+1=(a+1)^2$; $a^2+4b=a^2-4a+4=(a-2)^2$ đều là những số chính phương. Từ đó $(a;b)=(k;1-k)$ với mọi số nguyên k.

Nhận xét: Nếu $(a;b)$ là một nghiệm thì $(b;a)$ cũng là nghiệm nên ta suy ra được các nghiệm đã nêu ở đầu bài giải.

Lời giải 2

Nếu $a=0$ thì b là số chính phương và ngược lại.

Ta giả sử cả a lẫn b đều khác 0. Ta để ý rằng a^2+4b và a^2 cùng tính chẵn lẻ. Tương tự b^2+4a và b^2 cũng thế.

Nếu $b>0$ ta có: $a^2+4b\ge\left(|a|+2\right)^2=a^2+4|a|+4\Rightarrow|b|\ge|a|+1$.

Nếu $b<0$ ta có: $a^2+4b\le\left(|a|-2\right)^2=a^2-4|a|+4\Rightarrow|b|\ge|a|-1$.

Hoàn toàn tương tự: $a>0\Rightarrow|a|\ge|b|+1$ và $a<0\Rightarrow|a|\ge|b|-1$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $b>a$. Theo trên, nếu a và b cùng dương ta suy ra: $b\ge a+1$ và $a\ge b+1$ mâu thuẫn.

Nếu a và b cùng âm, ta suy ra: hoặc $b=a$ hoặc $a=b-1$. Khi $b\ge -5$ nên ta chỉ có $(a;b)=(-4;-4)$, $(-6;-5)$ là thỏa mãn đề bài. Còn nếu $b<-5$ ta có điều mâu thuẫn, bởi vì khi đó $(b+4)^2<b^2+4a<(b+2)^2$.

Cuối cùng $a<0$ và $b>0$ ta có: $|b|\ge |a|+1$ và $|a|\ge |b|-1$. Suy ra rằng ta phải có: $|b|=|a|+1\Leftrightarrow a+b=1$.

Trong trường hợp này mọi cặp $(a;b)$ đều thỏa mãn điều kiện bài toán, bởi vì $a^2+4b=(a-2)^2$ và $b^2+4a=(b-1)^2$.

Tóm lại các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$(a;b)=(k^2;0),(0;k^2),(-4;-4),(-5;-6),(-6;-5)$ và $(a;b)=(k;1-k)$, với mọi $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải 3:

Cũng như trên, để ý rằng a^2+4b và a^2 có cùng tính chẵn lẻ. Tương tự b^2+4a và b^2 cũng thế. Từ đó $a^2+4b\ne(|a|+1)^2$ nên $a^2+4b\le a^2$. (1)

Xét 3 trường hợp sau:

TH1: $a^2+4b=a^2$. Khi đó $b=0$, suy ra a luôn là số chính phương.

TH2: $a^2+4b=(|a|-2)^2$. Khi đó: $b=1-|a|$ suy ra: $b^2+4a=a^2-2|a|+4a+1$

Nếu $a>0$ thì b^2+4a là số chính phương với mọi a nguyên dương.

Nếu $a=0$ thì $b=1$ mâu thuẫn với (1).

Nếu $a<0$ ta có: $b^2+4a=m^2-6m+1$ với $m=-a>0$.

Khi $m\ge 8$ ta có: $(m-3)^2>m^2-6m+1>(m-4)^2$, do đó $m<8$.

Với $m\in\{1;2;3;4;5\}$ thì $m^2-6m+1<0$.

Với $m=6$ ta có: $m^2-6m+1=1$ là số chính phương.

Với $m=7$ ta có $m^2-6m+1=8$ không là số chính phương.

TH3: $a^2+4b\le(|a|-4)^2$. Khi đó vì $|b|\le|a|$ nên $b\ge -|a|$, suy ra: $a^2-4|a|\le a^2+4b\le(|a|-4)^2$, vậy $|a|\le 4$.

- Xét $|a|=4$. Ta có: $16+4b=0\Leftrightarrow b=-4$, suy ra b^2+4a là số chính phương. Vậy $(a;b)=(-4;-4)$ thỏa mãn đề bài.

- Xét $|a|=3$. Ta có: $a^2+4b=9+4b\le 1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}9+4b=0\\9+4b=1\end{array}\right.\Rightarrow b=-2$.

Khi đó b^2+4a là số chính phương và suy ra: $a=3$.

- Xét $|a|=2$. Ta có $a^2+4b=4+4b\le 4$. Số $4+4b$ chẵn nên nó là số chính phương khi $\left[\begin{array}{l}4+4b=4\\4+4b=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=-1\end{array}\right.$. Từ đây ta thu được nghiệm $(a;b)=(2;-1)$.

- Xét $|a|=1$. Ta có $a^2+4b=4b+1\le 9$. Để $4b+1$ là số chính phương lẻ, ta có $\left[\begin{array}{l}4b+1=1\\4b+1=9\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=2\end{array}\right.$.

Suy ra nghiệm $(a;b)=(1;0)$.

- Xét $|a|=0$. Vì $|b|\le|a|$ nên $b=0$.

Để ý đến tính đối xứng trong vai trò của a,b ta thu được nghiệm như sau: $(a;b)=(k^2;0),(0;k^2),(-4;-4),(-5;-6),(-6;-5)$ và $(a;b)=(k;1-k)$, với mọi $k\in\mathbb{Z}$.

6. (Singapore 1995 – 1996). Với mỗi số nguyên dương k. Hãy chứng minh rằng tồn tại một số chính phương có dạng: $n2^k-7$, trong đó n là số nguyên dương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số chính phương a^2 có dạng $n2^k-7$ với n là số nguyên dương nào đó. Lúc đó, a phải là số lẻ. Ta chứng minh rằng ứng với $k+1$, sẽ tồn tại số chính phương có dạng $n_0 2^{k+1}-7$ với n_0 là số nguyên dương nào đó.

Thật vậy nếu n là số chẵn thì $a^2=\frac{n}{2}2^{k+1}-7$ là số chính phương thỏa mãn yêu cầu. Ta giả sử n là số lẻ. Ta muốn chọn số nguyên dương m sao cho $(a+m)^2$ có dạng như đòi hỏi.

Ta có: $(a+m)^2=a^2+2am+m^2=-7+n2^k+m(m+2a)$.

Nếu chọn $m=2^{k-1}$ thì $m(m+2a)$ là một bội số của 2^k. Khi đó ta được $(a+m)^2$ có dạng $n_0 2^{k+1}-7$ với n_0 là số nguyên dương nào đó. Đến đây ta có thể hoàn thành lời giải bằng quy nạp theo k.

7. Chứng minh rằng nếu x^2+2y là một số chính phương với $x,y\in\mathbb{Z}^+$ thì x^2+y là tổng của hai số chính phương.

Lời giải

Ta có: $x^2+2y>x$.

Từ giả thiết suy ra : $x^2+2y=(x+t)^2$ với $t\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow 2y=t^2+2tx\Rightarrow t$ chẵn $\Rightarrow$ $t=2k,k\in\mathbb{Z}^+$.

Do đó: $2y=4k^2+4kx$ $\Rightarrow$ $y=2k^2+2kx$ $\Rightarrow$ $x^2+y=(x+k)^2+k^2$ (đpcm).

Bài 8. Tìm tất cả các số nguyên m sao cho m^4+m^3+1 là một số chính phương.

Lời giải

Ta có: $m^4+m^3+1=n^2 \Leftrightarrow 64m^4+64m^3+64=(8n)^2$

$$\Leftrightarrow (8m^2+4m-1)^2+8m+63=(8n)^2 .$$

Nếu $m=0$ thì rõ ràng thỏa mãn.

Nếu $m\neq 0$ và $m>-8$ thì: $(8m^2+4m-1)^2+8m+63=(8n)^2 \Rightarrow (8n)^2>(8m^2+4m-1)^2$.

Do $8m^2+4m-1\geq 0$, ta có: $(8n)^2\geq (8m^2+4m)^2$.

Vậy $(8m^2+4m-1)^2+8m+63\geq (8m^2+4m)^2$.

Vì thế $m^2\leq 4 \Rightarrow m\in\{-2,-1,1,2\}$.

Kiểm tra thấy rằng: $m\in\{-2,-1,2\}$ thỏa mãn.

Nếu $m\leq -8$ thì :

$(8m^2+4m-1)^2+8m+63=(8n)^2 \Rightarrow (8n)^2<(8m^2+4m-1)^2$.

Do $(8m^2+4m-1)^2\geq 0$, ta có $(8n)^2\leq (8m^2+4m-2)^2$.

Vậy $(8m^2+4m-1)^2+8m+63\leq (8m^2+4m-2)^2$ và $4m^2+4m+15\leq 0$ (vô lý)

Từ đó ta tìm được các nghiệm là : $m\in\{-2,-1,0,2\}$.

Bài 9. Số A có $2m$ chữ số và gồm toàn các chữ số 1. Số B có m chữ số và gồm toàn các chữ số 4. Chứng minh rằng $A+B+1$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có $A=\dfrac{10^{2m}-1}{9}$ và $B=4.\dfrac{10^m-1}{9}$ nên:

$A+B+1=\dfrac{10^{2m}+4.10^m+4}{9}=\left(\dfrac{10^m+2}{3}\right)^2$ là một số chính phương.

Bài 10. Cho a,b là các số nguyên dương và $b\leq a$. Biết rằng tồn tại cặp số nguyên dương $(u;v)$ sao cho $u^2+v^2-auv=b$. Chứng minh rằng b là số chính phương.

Lời giải

Chọn cặp $(u;v)$ sao cho $u+v$ nhỏ nhất. Giả sử: $u\geq v$.

Xem $u^2+v^2-auv=b$ là phương trình bậc hai đối với u và gọi u' là nghiệm thứ hai.

Vì $u'+u=av$ nên $u'\in\mathbb{Z}$.

Vì $u'^2+v^2\le a(u'v+1)$ nên $u'\ge 0$

- Nếu $u'=0$ thì $b=v^2$ là số chính phương.

- Nếu $u'>0$ thì $uu'=v^2-b$ ta suy ra $u'<v\le u$.

- Suy ra: $u'+v<u+v$ vô lý.

Bài 11. Cho $k\in\mathbb{N},k>1$. Xét dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0=4,a_1=a_2=\left(k^2-2\right)^2 \\ a_{n+1}=a_na_{n-1}-2\left(a_n+a_{n-1}\right)-a_{n-2}+8 \end{cases} \quad \forall n\ge 2 .$$

Chứng minh rằng : $2+\sqrt{a_n}$ là số chính phương với mọi $n\ge 0$.

Lời giải

Gọi α,β là nghiệm của phương trình: $x^2-kx+1=0$.

Theo định lý Viet ta có: $\alpha+\beta=k,\alpha\beta=1$.

Chứng minh theo quy nạp: $a_n=\left(\alpha^{2F_n}+\beta^{2F_n}\right)^2$ với mọi $n\ge 0$.

Khẳng định trên đúng đến n .

Ta có: $a_{n+1}-2=\left(a_n-2\right)\left(a_{n-1}-2\right)-\left(a_{n-2}-2\right)$

$$=\left(\alpha^{4F_n}+\beta^{4F_n}\right)^2\left(\alpha^{4F_{n-1}}+\beta^{4F_{n-1}}\right)^2-\left(\alpha^{4F_{n-2}}+\beta^{4F_{n-2}}\right)^2$$

$$=\alpha^{4F_{n+1}}+\beta^{4F_{n+1}}$$

Suy ra: $a_n=2+\alpha^{4F_{n+1}}+\beta^{4F_{n+1}}=\left(\alpha^{2F_{n+1}}+\beta^{2F_{n+1}}\right)^2$

Khi đó: $2+\sqrt{a_n}=2+\alpha^{2F_{n+1}}+\beta^{2F_{n+1}}=\left(\alpha^{F_n}+\beta^{F_n}\right)^2$ là số chính phương.

Bài 12. (WMSETS 2000-2001). Cho $a_1=14,a_2=144$ và $a_n=\overline{1444...4}$ với n số 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho a_n là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $a_2=144=12^2,a_3=1444=38^2$, còn a_1 không phải là số chính phương.

Ta xét với $n\ge 4$. Khi đó giả sử $a_n=b^2$ với $b\in\mathbb{Z}$ nào đó. Do $n\ge 4$ nên a_n tận cùng là 4444 và do 10000 chia hết cho 16, số dư khi chia a_n cho 16 bằng số dư khi chia 4444 cho 16, tức bằng 12. Suy ra: b là số chẵn nhưng không chia hết cho 4. Vậy $b=2(2c+1)$ với $c\in\mathbb{Z}$. Từ đó: $b^2=16\left(c^2+c\right)\vdots 16$. Điều này mâu thuẫn.

Tóm lại chỉ có $n=2,3$ thì a_n là chính phương.

13. Chứng minh rằng: $N=\underbrace{11...1}_{1997}\underbrace{22...2}_{1998}5$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có $N=\underbrace{11...1}_{1997}\underbrace{22...2}_{1998}5$

Vậy N là số chính phương.

Bài 14. Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, đặt $A_n=\left(10^n+10^{n-1}+...+10+1\right)\left(10^{n+1}+5\right)+1$. Chứng minh rằng A_n là số chính phương.

Lời giải

A_n được viết lại như sau: $A_n=111...1\left(10^{n+1}+5\right)+1$ ($n+1$ chữ số 1). Đặt $t=111...1$ (n chữ số 1). Suy ra $9t+1=10^{n+1}$ $\Rightarrow$ $A=t\left(9t+1+5\right)+1=9t^2+6t+1=\left(3t+1\right)^2$. Vậy A_n là một số chính phương.

Bài 15: Cho $n\in\mathbb{N}$ sao cho $\frac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải

Giả sử ta có: $\frac{n^2-1}{3}=a\left(a+1\right)$.

Từ đó có $n^2=3a^2+3a+1$ $\Rightarrow$ $4n^2-1=12a^2+12a+3$

$\Rightarrow$ $\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)=3\left(2a+1\right)^2$.

Vì $2n+1;2n-1$ là hai số lẻ liên tiếp nên ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases}2n-1=3p^2\\2n+1=q^2\end{cases}$.

Khi đó $q^2=3p^2+2$ (Vô lí). Vậy trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 2: $\begin{cases}2n-1=p^2\\2n+1=3q^2\end{cases}$.

Từ đó p là số lẻ nên $p=2k+1$.

Từ đó $2n=\left(2k+1\right)^2+1$ $\Rightarrow$ $n=k^2+\left(k+1\right)^2$ (đpcm).

16.(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP.HCM năm 1994).

Có hay không các số x, y phân biệt thuộc khoảng $(988;1994)$ sao cho $xy+x$ và $xy+y$ đều là các số chính phương ?

Lời giải

Giả sử tồn tại $y > x \geq 1$ sao cho $xy+x=m^2$, $xy+y=n^2$ với $m,n \in \mathbb{N}^*$. Vì $y > x$ nên $xy+x > x^2$ $\Rightarrow$ $m^2 > x^2$ $\Rightarrow$ $m > x$ $\Rightarrow$ $m \geq x+1$. Ta có: $y-x=n^2-m^2$ $\geq$ $(m+1)^2-m^2$ $\Rightarrow$ $y-x > (x+1)^2-x^2$ $\Rightarrow$ $y > 3x+1$. Lúc này $y \notin (988;1994)$. Vậy không tồn tại các số x, y phân biệt thuộc khoảng $(988;1994)$ sao cho $xy+x$ và $xy+y$ đều là các số chính phương.

17. Giả sử rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $5n+3$ là một hợp số.

Lời giải

Giả sử $2n+1=a^2$ và $3n+1=b^2$ với $a,b \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4a^2-b^2$ $=(2a-b)(2a+b)$.

Do $a^2 \equiv 1(mod 2)$ nên $a^2 \equiv 1(mod\ 4)$. Suy ra $n \equiv 0 \pmod 2$ và $b \equiv 1 \pmod 2$. Do đó $2a-b>1$ và $2a+b>1$. Vậy $5n+3$ là hợp số.

18. Cho a,b là hai số nguyên sao cho tồn tại hai số nguyên liên tiếp c và d để $a-b=a^2c-b^2d$. Chứng minh rằng $|a-b|$ là số chính phương.

Lời giải

Vì c và d là hai số nguyên liên tiếp nên $d=c+1$. Thay vào đẳng thức $a-b=a^2c-b^2d$ ta được $a-b=a^2c-b^2(c+1)$ $\Leftrightarrow$ $(a-b)\big(c(a+b)-1\big)=b^2$.

Dễ dàng chứng minh được $gcd\big(a-b,c(a+b)-1\big)=1$ nên $|a-b|$ phải là số chính phương.

19. Thi HSG TP.HCM 2011 – 2012

Tìm tất cả các số nguyên dương a,b sao cho $a^2b^2-4(a+b)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

Đặt $a^2b^2-4(a+b)=x^2$ với $x \in \mathbb{N}$. Suy ra $x < ab$.

Nếu $x=ab-1$ thì:

$a^2b^2-4(a+b)=(ab-1)^2$ $\Leftrightarrow$ $-4(a+b)=-2ab+1 \Leftrightarrow 4(a+b)=2ab-1 (*)$.

Điều này vô lí vì 2 vế của (*) không tính chẵn lẽ.

Nếu $x < ab-2$ thì $x^2 \leq (ab-2)^2$.

Hay $a^2b^2-4(a+b) \leq (ab-2)^2$ $\Leftrightarrow$ $ab \leq a+b+1$.

Giả sử $a \le b$. Với $a \ge 3$ thì $ab \ge a+b+b > a+b+1$: sai.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \end{array}\right.$.

* Với $a=1$ thì $b^2-4(b+1)=x^2 \Leftrightarrow (b-2-x)(b-2+x)=8$.

Vì $b-2-x, b-2+x$ cùng chẵn và $b-2-x<b-2+x$ nên chỉ có thể là $\begin{cases} b-2-x=2 \\ b-2+x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ x=1 \end{cases}$.

* Với $a=2$ thì $4b^2-4(b+2)=x^2 \Leftrightarrow (2b-1-x)(2b-1+x)=9$.

Xét hai khả năng sau:

$\begin{cases} 2b-1-x=3 \\ 2b-1+x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ x=0 \end{cases}; \begin{cases} 2b-1-x=1 \\ 2b-1+x=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ x=4 \end{cases}$.

Vậy các cặp số $(a;b)$ thỏa mãn bài toán là : $(1;5),(5;1),(2;2),(2;3),(3;2)$.

20. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho 2^m+3^n là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

Giả sử $2^m+3^m=a^2$ thì a là số lẻ và $a^2 \equiv (-1)^m \pmod 3$.

Do $a^2 \equiv 0;1 \pmod 3$ nên suy ra m phải là số chẵn.

Mặt khác, do $(-1)^n \equiv 2^m+3^n=a^2 \equiv 1 \pmod 4$ nên n cũng phải là số chẵn.

Đặt $n=2k, k \ge 1$, thế thì $2^m=\left(a+3^k\right)\left(a-3^k\right)$.

Như vậy, $a+3^k=2^r$, $a-3^k=2^s$ với $r>s \ge 0, r+s=m$.

Ta có: $2.3^k=2^r-2^s \Rightarrow s=1$, do vậy $2^{r-1}+1=3^k$. Vì $r+1=m$ nên r lẻ.

Khi đó : $\left(2^{\frac{r-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{r-1}{2}}+1\right)=3^k$. Do hiệu của hai nhân tử bằng 2 và cả hai số đều không chia hết cho 3 nên $2^{\frac{r-1}{2}}-1=1 \Rightarrow r=3$, dẫn đến $k=1$.

Vậy cặp $(m;n)=(4;2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

21. (Thi chọn HSG TP.HCM 2012-2013)

Giả sử số nguyên dương n có tất cả k ước số dương là $d_1, d_2, ..., d_k$. Chứng minh rằng nếu $d_1+d_2+d_3+...+d_k+k=2n+1$ thì $\frac{n}{2}$ là số chính phương.

Lời giải

Gọi $l_1, l_2, ..., l_s$ là các ước lẻ của n và 2^m là lũy thừa lớn nhất của 2 trong khai triển của n $(s \ge 1, m \ge 0)$.

Từ đó các ước của n là $l_1, l_2, ..., l_s, 2l_1, 2l_2, ..., 2l_s, ..., 2^m l_1, 2^m l_2, ..., 2^m l_s$.

Theo đề bài ta có: $l_1 + l_2 + l_3 + ... + l_s + 2l_1 + 2l_2 + ... + 2l_s + ... + 2^m l_1 + ... + 2^m l_2 + (m+1)s = 2n+1$.

$\Leftrightarrow (l_1 + l_2 + ... + l_s)(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^m) + (m+1)s = 2n+1$. $\qquad (*)$

$\Leftrightarrow (l_1 + l_2 + ... + l_s)(2^{m+1} - 1) + (m+1)s = 2n+1$.

Nếu s chẵn thì vế trái của $(*)$ chẵn, vô lý. Suy ra s lẻ.

Nếu s lẻ mà m chẵn thì vế trái của $(*)$ cũng chẵn, vô lý. Do đó m lẻ tức $m = 2t+1$. Suy ra $\frac{n}{2^m}$ có số ước lẻ.

Số $\frac{n}{2^m} = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$ có ước là $(k_1+1)(k_2+1)...(k_m+1)$ suy ra k_i chẵn $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

$\Rightarrow \frac{n}{2^m}$ là số chính phương $\Rightarrow n = 2^{2t+1}x^2 \Rightarrow \frac{n}{2} = (2'r)^2$ với $t, r \in \mathbb{N}$.

22. (IMO 1996). Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $15a + 16b$ và $16a - 15b$ đều là số chính phương khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nhỏ hơn trong hai số chính phương đó.

Lời giải 1

Giả sử $15a + 16b = m^2; 16a - 15b = n^2$ với $m, n \in \mathbb{N}$.

Dễ dàng có được $15m^2 + 16n^2 = 481a = 13.37a$.

Để ý rằng $15m^2$ chia cho 13 có số dư là $0; \pm 2; \pm 5; \pm 6$ và $16n^2$ chia cho 13 có số dư là $0; \pm 1; \pm 3; \pm 4$. Suy ra cả m và n đều chia hết cho 13.

Tương tự khi $15m^2$ chia cho 37 có số dư là : $0; \pm 2; \pm 5; \pm 6; \pm 8; \pm 13; \pm 14; \pm 15; \pm 17; \pm 18$ và khi $16n^2$ chia cho 37 có số dư là $0; \pm 1; \pm 3; \pm 4; \pm 7; \pm 9; \pm 10; \pm 11; \pm 12; \pm 16$. Suy ra m và n đều chia hết cho 37.

Do đó m và n đều chia hết cho 481.

Đặt $m = 481u, n = 481v$. Khi đó $a = 481(15u^2 + 16v^2)$.

Lại có $481b = 16m^2 - 15n^2$, suy ra $b = 481(16u^2 - 16v^2)$.

Như vậy giá trị cần tìm là $b^2 = 481^2 = 231361$ khi $u = v = 1$.

Lời giải 2

Giả sử $15a + 16b = m^2; 16a - 15b = n^2$ với $m, n \in \mathbb{N}$.

Khi đó $m^4+n^4=481\left(a^2+b^2\right)$.

Áp dụng định lý Fermat nhỏ ta dễ dàng chứng minh được m và n đều chia hết cho 481. Vậy số cần tìm là $481^2=231361$.

23. Chứng minh rằng với mọi bộ ba số nguyên $(a;b;c)$ luôn luôn tồn tại số nguyên dương n sao cho n^3+an^2+bn+c không phải là số chính phương.

Lời giải

Đặt $f(n)=n^3+an^2+bn+c$.

Nếu $f(n)$ là số chính phương thì $f(n)\equiv 0(\bmod 4)$ hoặc $f(n)\equiv 1(mod4)$.

Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ sao cho với mọi số nguyên dương n thì $f(n)$ là một số chính phương.

Nói riêng, $f(1), f(2), f(3), f(4)$ đều là các số chính phương.

Ta có $f(2)=8+4\text{a}+2b+c$; $f(4)=64+16\text{a}+4b+c$.

Khi đó $f(2)-f(4)=-56-2\text{a}-2b \Rightarrow f(2)-f(4)=-2b(mod\ 4)$ (**)

Mặt khác, do $f(2), f(4)$ đều là các số chính phương nên từ (*) ta có:

$$\left[\begin{array}{l} f(2)-f(4)\equiv 0(mod\ 4)\\ f(2)-f(4)\equiv -1(mod\ 4)\\ f(2)-f(4)\equiv 1(mod\ 4)\end{array}\right.$$

Kết hợp với (**) ta có: $2b\equiv 0(mod\ 4)$.

Lại có $f(3)-f(1)=24+8a+(2b+2) \Rightarrow f(3)-f(1)=2b+2(\bmod 4)$

Nhận thấy $f(3), f(1)$ đều là các số chính phương nên: $2b+2\equiv 0(mod\ 4)$.

Từ (1) và (2) suy ra $2\equiv 0(mod\ 4)$. Đây là điều vô lý, tức giả thiết phản chứng sai.

Lời giải 2

Đặt $f(n)=n^3+an^2+bn+c.$

Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ sao cho với mọi số nguyên dương n thì $f(n)$ là một số chính phương.

Ta có: $f(n+2)\equiv f(n)(mod\ 2) \Rightarrow f(n+2)\equiv f(n)(mod\ 4)$ với mọi n .

Điều này dẫn đến: $6n^2+2b\equiv 0(mod\ 4)$, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ (vô lý).

Vậy $f(n)$ không phải là số chính phương.

24. Cho $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên thoả mãn $P(0)=0, P(1)=2.$ Chứng minh rằng $P(7)$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Vì $P(0)=0; P(1)=2$ nên $P(x)$ có dạng $P(x)=x(x-1)Q(x)+2$ trong đó $Q(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.

Ta có $P(7)=2+42Q(7)=2(\bmod 3)$

Như vậy $P(7)$ không thể là số chính phương.

25. (diendantoanhoc.net 2014)

Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$

Chứng minh rằng: $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là một số chính phương.

Lời giải

Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$ suy ra $ab+bc+ca=1$

Khi đó $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$

Tương tự $1+b^2=(a+b)(b+c)$; $1+c^2=(a+c)(b+c)$

Như vậy $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2$ là một số chính phương.

26. (Komal- Hungary C646, 2001)

Xét một dãy số gồm các số tự nhiên liên tiếp. Ta thiết lập dãy mới bằng cách bỏ đi các số chính phương. Hỏi trong dãy mới này, số hạng thứ 2001 là số bao nhiêu? Số 2001 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

Vì $44^2=1936<2001<2025=45^2$ nên từ 1 đến 2001 có 44 số chính phương. Suy ra số 2001 có vị trí trong dãy mới là số hạng thứ $2001-44=1957$

Sau 2001, số chính phương đầu tiên là $2025=45^2$, số chính phương tiếp theo là $2116=46^2$. Như vậy trong dãy các số tự nhiên tiếp theo sau số 2001, tính cho đến lúc gặp số chính phương tiếp theo 2025 có tất cả 23 số chính phương (từ 2002 đến 2024). Số 2024 nằm ở vị trí thứ 1957 +23 =1980 trong dãy mới. Từ 45^2 đến 46^2 có tất cả 2115-2020=90 số không chính phương: 2026;2027;…;2115. Chính trong dãy này, số hạng thứ 21 là 2006+20=2046. Vậy số hạng thứ 2001 trong dãy mới là 2046.

27. (The Winter Mathematical Competitions in Bunlgaria 2000)

Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2+3pq+q^2$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $p^2+3pq+q^2=r^2$ với p,q là các số nguyên tố và r là số nguyên dương

Nếu $p\neq 3$ và $q\neq 3$ thì $p^2+3pq+q^2=2(\bmod 3)$, trong đó $r^2\neq 2(\bmod 3)$. Điều này mâu thuẫn vì vậy $p=3$ hoặc $q=3$. Không mất tính tổng quát, giả sử $p=3$ khi đó ta có:

$9+9q+q^2=r^2 \Leftrightarrow 4q^2+36q+36=(2r)^2 \Leftrightarrow (2q+9+2r)(2q+9-2r)=45$

Vì 45=1.45=3.45=5.9 và $r>1$ nên ta xét các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: $2q+9+2r=15$ khi đó $q+r=15$ (điều này không thể xảy ra)

Trường hợp 2: $\begin{cases}2q+9+2r=45\\2q+9-2r=1\end{cases}\Rightarrow q=7$

Do vai trò đối xứng của p và q nên ta tìm được các nghiệm (p,q) là $(3;7),(7;3)$.

8 (The Winter Mathematical Competitions in Bunlgaria 2001)

Ivan và Peter thay nhau viết các chữ số 0 hoặc 1 cho đến khi mỗi người viết được 2001 chữ số. Peter sẽ là người thắng cuộc nếu như anh ta viết được một số trong biểu diễn nhị phân sao cho số đó không thể viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng Peter có chiến lược để đảm bảo thắng cuộc.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh rằng nếu biểu diễn nhị phân của hai số nguyên dương có tận cùng bằng hai chữ số 1 và có một số chẵn các chữ số 0 thì số này không thể viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai số chính phương.

Thật vậy số đó có dạng $4^k(4x+3)$

Giả sử ngược lại $x^2+y^2=4^k(4x+3)$. Do $x^2+y^2=0(\bmod 4)$ nếu và chỉ nếu x và y cùng số chẵn. Dẫn đến tồn tại p,q sao cho $p^2+q^2=4x+3$ điều này mâu thuẫn.

Từ kết quả trên chiến lược để đảm bảo thắng lợi của Peter như sau:

* Nếu mọt trong cấc chữ số mà Ivan viết cuống là 1 thì Peter sẽ lặp lại tất cả các chữ số mà Ivan viết. Cuối cùng sẽ được số có dạng $4^k(4x+3)$, số này không thể viết được dưới dạng x^2+y^2

* Nếu Ivan viết toàn các chữ số 0 thì Peter viết 3 chữ số đầu tiên là 1,1,1 và sau đó chỉ viết toàn chữ số 0. Số cuối cùng là $\overline{0101010...0_{(2)}}=21.4^{1908}$. Số này không viết được dưới dạng p^2+q^2. Vì 21 không thể viết được dưới dạng đó.

29. (The Spring Mathermatical Competitions in Bulgaria 2001)

Tìm số nguyên dương bé nhất $n>1$ sao cho $\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n}$ là một số chính phương.

Lời giải

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được:

$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (mọi $n\in N^*$)

Vì $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\in Z$ nên $n(n+1)(2n+1)=6m^2$

Để ý rằng $2n+1$ lẻ $\Rightarrow n+1$ chẵn $\Rightarrow n$ lẻ tức là $n=2k-1$

Khi đó $k(4k-1)=3m^2\Rightarrow 3|k$ hoặc $3|4k-1$

Giả sử $k=3d$ khi đó $d(12d-1)=m^2$. Vì hai số d và $12d-1$ nguyên tố cùng nhau nên $d=u^2$;

$12d-1=v^2$. Dễ dàng nhận thấy $12d-1=v^2$ không thể xảy ra.

Ta xét trường hợp $3|4k-1$. Đặt $k=3d+1$ suy ra $(3d+1)(4d+1)=m^2$

Vì $god(3d+1,4d+1)=1$ nên $3d+1=u^2;4d+1=v^2$ với $u,v>1$

Lần lượt cho u bởi các giá trị 3;5;7;9;11;13;… ta được các giá trị của d tương ứng là 2;6;12;20;30;42;56;…

Như vậy $3d+1\in\{7;19;37;61;91;127;169;...\}$

Dễ thấy $169=13^2$ do đó số n bé nhất cần tìm là $2k-1$ với $k=3d+1=3.56+1=169$ suy ra $n=337$

30. (http://Juliellty.wordpress.com 2014) Tìm các cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn x^2+3y và y^2+3x đều là số chính phương.

Lời giải

* Xét $x=y$ ta cần tìm k sao cho $x^2+3x=k^2$ với $k\in N^*$

Ta có $x^2+3x=k^2 \Leftrightarrow (2x-2k+3)(2x+2k+3)=9$

Vì $2x+2k+3>2x-2k+3$ và $2x+2k+3>0$ nên chỉ có thể là

$$\begin{cases}2x-2k+3=1\\2x+2k+3=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2k=-2\\2x+2k=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\k=2\end{cases}$$

Do đó $(x;y)=(1;1)$ là nghiệm

* Xét $x\neq y$ không mất tính tổng quát, giả sử $x<y$

Đặt $y^2+3x=a^2$ với $a\in N^*$

Khi đó $x^2<y^2+3x=a^2<y^2+3y<(y+2)^2$

Suy ra $y^2+3x=(y+1)^2 \Leftrightarrow 3x=2y+1$

Lại vì x^2+3y cũng là số chính phương nên $x^2+3y=b^2$ với $b\in N^*$

Điều này tương đương với

$$x^2+3\frac{3x-1}{2}=b^2 \Leftrightarrow 2x^2+9x-3=2b^2 \Leftrightarrow (4x-4b+9)(4x+4b+9)=105$$

Giải phương trình ước số này ta được $x=1$ hoặc $x=11$

Vậy các cặp $(x;y)$ cần tìm là $(1;1);(11;16);(16;11)$

30. (Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 tỉnh Đồng Nai năm học 2013-2014)

Cho các số nguyên tố a,b và số nguyên tố p thỏa mãn $\frac{a^2+b^2}{p}\in Z$. Cho biết p là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{p}$ cũng là tổng của hai số chính phương.

Lời giải

Đặt $p=c^2+d^2$ với $c,d\in Z$

Ta có $$\frac{a^2+b^2}{p}=\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{p^2}=\frac{(ad+bc)^2+(ac+bd)^2}{p^2}$$

$$=\left(\frac{ad+bc}{p}\right)^2+\left(\frac{ac-bd}{p}\right)^2=\left(\frac{ad-bc}{p}\right)^2+\left(\frac{ac+bd}{p}\right)^2$$

Mặt khác $(ac+bd)(ac-bd)=a^2c^2-b^2d^2$

$$= a^2(c^2+d^2) - d^2(a^2+b^2) = \left[a^2p - d^2(a^2+b^2)\right] \vdots\, p$$

Suy ra $p | ac+bd$ hoặc $p | ac-bd$

Trường hợp 1: Nếu $p | ac+bd$ thì $\frac{a^2+b^2}{p} = \left(\frac{ad+bc}{p}\right)^2 + \left(\frac{ac-bd}{p}\right)^2$

Vì $\frac{a^2+b^2}{p}; \frac{ac+bd}{p} \in Z$ nên $\frac{ac-bd}{p} \in Z$

Như vậy $\frac{a^2+b^2}{p}$ cũng là tổng của hai số chính phương

Trường hợp 2: Nếu $p | ac-bd$ thì $\frac{a^2+b^2}{p} = \left(\frac{ad+bc}{p}\right)^2 + \left(\frac{ac-bd}{p}\right)^2$

Vì Vì $\frac{a^2+b^2}{p}; \frac{ac-bd}{p} \in Z$ nên $\frac{ac+bd}{p} \in Z$

Như vậy $\frac{a^2+b^2}{p}$ cũng là tổng của hai số chính phương

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

31. (http://juliellty.wordpress.com 2014)

Cho a,b,k là các số nguyên dương thỏa mãn $k = \frac{a^2+ab+b^2}{ab+1}$. Chứng minh rằng k là một số chính phương.

Lời giải

Cố định k và xét tập hợp $S = \left\{(a,b) \in Z \middle| k = \frac{a^2+ab+b^2}{ab+1}\right\}$

Trong các phần tử của S ta chọn ra cặp $(A;B)$ thỏa mãn A+B nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát, giả sử A>B>0

Xét phương trình bậc hai ẩn x như sau:

$$k = \frac{x^2+xB+B^2}{xB+1} \Leftrightarrow x^2 + (B-kB)x + B^2 - k = 0$$

Phương trình hiển nhiên có nghiệm A và x_0

Áp dụng định lý Viet ta có $\begin{cases} x_0 + A = kB - B & (1) \\ x_0 A = B^2 - k & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra x_0 nguyên

* Nếu $x_0 < 0$ thì $x_0 < -1 \Rightarrow x^2 - (B-kB)x + B^2 - k \ge x^2 + (B-kB)x + B^2 - k > 0$ mâu thuẫn

* Nếu $x_0 = 0$ thì từ (2) suy ra $k = B^2$ là một số chính phương (loại)

*Nếu $x_0 > 0$ thì $(x_0;B) \in S$

Từ đó $x_0 + B = \frac{B^2-k}{A} + B < \frac{B^2}{A} + A < \frac{A^2}{A} + A = A + B$

Mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của tổng A+B

Vậy giả thiết phản chứng sai, từ đó ta có k là số chính phương.

32. (http://juliellty.wordpress.com 2014)

Cho ba số nguyên dương a,b,c có ước chung lớn nhất bằng 1 và thỏa mãn $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $a-b$ là một số chính phương

Lời giải

Gọi $d=god(a,b)\Rightarrow\begin{cases}a=da_1\\b=db_1\\god(d,c)=1\end{cases}$ với $a_1,b_1\in Z^*,god(a_1,b_1)=1$

Thay vào giả thiết $d^2a_1b_1=cd(a_1-b_1)\Rightarrow da_1b_1=ca_1-cb_1\Rightarrow\begin{cases}a_1|cb_1\\b_1|ca_1\end{cases}$

Lại có $god(a_1,b_1)=1$ nên $a_1|cb_1|c\Rightarrow a_1b_1|c$

Mặt khác do $da_1b_1=c(a_1-b_1)\Rightarrow c|da_1b_1\Rightarrow c|a_1b_1$ (do $god(a_1,b_1)=1$)

Từ đó suy ra $c=a_1b_1$

Vậy $d(a_1-b_1)=d^2\Leftrightarrow a-b=d^2$ là một số chính phương.

33. (Kvant – Rusia 4/2000)

Cho các số tự nhiên a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Chứng minh rằng các số ab,bc,ca và $ab+bc+ca$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Từ $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ suy ra $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$ (1)

$\Rightarrow(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca)$

Vì $(a+b+c)^2$ và 4 là những số chính phương nên $ab+bc+ca$ pahir là các số chính phương

$(1)\Rightarrow(a+b-c)^2=4ab$

Vì $(a+b-c)^2$ và 4 là các số chính phương nên ab là số chính phương.

Tương tự bc và ca cũng là các số chính phương.

34. (Junior Balkan MO 2000)

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 3^n+n^2 là các ố chính phương.

Lời giải 1

Giả sử $3^n+n^2=m^2$ với $m\in N^*$

Ta có $(m-n)(m+n)=3^n\Rightarrow\begin{cases}m-n=3^k\\m+n=3^{n-k}\end{cases}$

Mà $m-n<m+n\Rightarrow k<n-k$ vì vậy $2-2k\ge1$

* Nếu $n-2k=1$ thì $2n=(m+n)-(m-n)=3^{n-k}-3^k=3^k(3^{n-2k}-1)=2.3^k$

Vì vậy $n=3^k=2k+1$

Ta có $3^m=(1+2)^m=1+2m+2^2C_m^2+...>2m+1$ do đó $k=0$ hoặc $k=1$ tương ứng với $n=1$ hoặc $n=3$

* Nếu $n-2k>1$ thì $n-2k\ge2$ và $k\le n-k-2\Rightarrow3^k\le3^{n-k-2}$

Khi đó $2n=3^{n-k}-3^k\ge3^{n-k}-3^{n-k-2}=3^{n-k-2}(3^2-1)=8.3^{n-k-2}$

$$\geq 8\left[1+2(n-k-2)\right]=16n-16k-24$$

Điều đó có nghĩa là $8k+12\geq 7n$

Mặt khác $n\geq 2k+2$ do đó $7n\geq 7k+14$ mâu thuẫn

Vậy $n=1,n=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải 2

Đặt $3^n+n^2=a^2$ với $a\in N^*$ và $n=3^p q$ với $p,q\in N, god(3,q)=1$

Vì $n\geq 1$ nên $q\geq 1$. Do đó $3^p q>2p$

Ta suy ra $3^{2p}\left|3^n+n^2\right.$ do đó $3^p\left|a\right.$

Đặt $a=3^p.k$ với $k\in N^*, god(k.3)=1$

Khi đó phương trình trở thành $q^2+3^h=k^2(*)$ với

$h=3^p.q-2p\in N^*, god(3,q)=1, god(k,3)=1$

Phương trình (*) tương đương với $(k-q)(k+q)=3^h$

Đặt $k-q=3^a, k+q=3^b$ với $a,b\in N, a<b, a+b=h$

Khi đó $2q=3^a(3^{b-a}-1)$

Vì $god(3,q)=1$ nên $a=0$

Do đó $2q=3^b-1$ hay $2q=3^{bq-2p}-1$ (**)

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp hai bổ đề sau:

Bổ đề 1: Với mọi $p\in N$ **thì** $3^p\geq 2p+1$

Chứng minh

* Với $p=0$ thì bất đẳng thức đúng.

* Giả sử bất đẳng thức đúng đến p, tức là $3^p\geq 2p+1$

* Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng đến $p+1$. Thật vậy

$3^{p+1}=3.3^p\geq 3(2p+1)\geq 2(p+1)+1$

Vậy bổ đề này được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $p=0$ hoặc $p=1$

Bổ đề 2: Với mọi $q\in N$ **thì** $3^p q\geq 2p+q$ **trong đó** $p\in N$

Chứng minh

* Với $q=1$ thì $3^p\geq 2p+1$ đúng với bổ đề 1

* Giả sử bất đẳng thức đúng đến q, tức là $3^p q\geq 2p+q$

* Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng đến $q+1$. Thật vậy

$3^p(q+1)\geq 2p+q+3^p\geq 2p+q+1$

Vậy bổ đề này được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $q=1, p=0$ hoặc $q=1, p=1$

Quay lại (**) theo bổ đề 2 ta có $3^p q-2p\geq q\Rightarrow 2q+1\geq 3^q-1$ theo bổ đề 1 ta suy ra $q=1$.

Khi đó $3^p=2p+1$. Áp dụng một lần nữa bổ đề 1 ta dẫn đến $p=0$ hoặc $p=1$

Tóm lại $n=1,n=3$ thảo mãn bài toán.

32. (http://juliellty.wordpress.com 2014)

Tìm tất cả các số tự nhiên n lẻ sao cho $n^{11}+199$ là một số chính phương.

Lời giải

Sử dụng hai bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề 1: Cho cac số nguyên dương x, y và các số nguyên tố p có dạng $4k+3$ thảo mãn $p|x^2+y^2$. Khi đó $p|y$ và $p|x$

Bổ đề 2: Cho cac số nguyên dương x, y thỏa mãn $god(x,y)=1$. Khi đó mọi số nguyên tố của x^2+y^2 không có dạng $4k+3$

Quay trở lại bài toán

Đặt $n^{11}+199=m^2$ với $m \in N$

Vì n lẻ nên $n=1;3(\text{mod }4)$

Nếu $n=3(\text{mod }4) \Rightarrow m^2=3^{11}+199=2(\text{mod }4)$ (vô lý)

Do đó $n=1(\text{mod }4)$

Ta có $n^{11}+199=m^2 \Leftrightarrow n^{11}+2^{11}=m^2+43^2$

$$\Leftrightarrow (n+2)(n^{10}-2n^9+...-512n+1024)=m^2+43^2$$

$$\Leftrightarrow (n+2)b=m^2+43^2$$

Vì $n=1(\text{mod }4)$ nên $b=n^{10}-2n^9+...-2^9n+2^{10}=3(\text{mod }4) \Rightarrow b$ só ít nhất một ước nguyên tố

$p=1(\text{mod }4)$

Theo bổ đề 1 thì $b|a^2+43^2 \Rightarrow p|a^2+43^2 \Rightarrow p=43 \Rightarrow 43|b$

Nên $43|n+2 \Rightarrow n=-2\text{mod}(43)$

$\Rightarrow b=n^{10}-2n^9+4n^8-8n^7+16n^6-32n^5+64n^4-128n^3+256n^2-512n+1024 \equiv 8\ (\text{mod }43)$

Điều này vô lí vì $43|b$. Suy ra $43\nmid n+2$.

Ta có $a^2+43^2=(n+2)b \vdots 43 \Rightarrow a \vdots 43 \Rightarrow a^2+43^2 \vdots 43^2 \Rightarrow b(n+2) \vdots 43^2$.

Vì $43\nmid n+2$ nên $b=43^2m$ với $m \in \mathbb{N}$, $\gcd(m,2)=1$.

Hơn nữa, vì $a \vdots 43 \Rightarrow a=43q$ với $q \in \mathbb{N}$.

Do đó $(n+2)n=a^2+43^2=43^2(q^2+1)$

$\Leftrightarrow (n+2)43^2m=43^2(q^2+1) \Leftrightarrow q^2+1=m(n+2)$.

Vì $\gcd(1,q=1)$ nên theo bổ đề 2 thì q^2+1 không có ước nguyên tố nào dạng $4k+3$ nhưng $n+2\equiv 3(\text{mod }4)$ (vì $n\equiv 1(\text{mod }4)$). Điều này mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

36. (http://juliellltv.wordpress.com 2014).

Tìm số nguyên tố p thỏa mãn p^3-4p+9 là số chính phương.

Lời giải

Đặt $p^3-4p+9=t^2$ (*), với $t \in \mathbb{N}$.

Khi đó ta biến đổi thành $p\left(p^2-4\right)=t^2-9 \Leftrightarrow p\left(p^2-4\right)=(t-3)(t+3)$.

Suy ra: $p \mid t-3$ hoặc $p \mid t+3$.

Trường hợp 1: Nếu $p \mid t-3$. Đặt $t-3=pk$ với $k \in \mathbb{N}$.

Thay vào (*) ta được

$p\left(p^2-4\right)=pk(t+3) \Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4 \Rightarrow p^2=kt+3k+4$.

Mặt khác, ta có $(t-3)^2=p^2k^2 \Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

Hay $t^2-\left(k^3+6\right)t+9-3k^3-4k^2=0$

Xem đây là một phương trình bậc hai ẩn t. Điều kiện cần để tồn tại nghiệm nguyên của phương trình là $\Delta=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác, với $k>3$ ta dễ dàng chứng minh được:

$\left(k^2\right)^2<k^4+24k+16<\left(k^2+4\right)^2$.

Suy ra các trường hợp nhỏ sau đây:

- $k^4+24k+16=\left(k^2+1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k-15=0$
- $k^4+24k+16=\left(k^2+2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k-3=0$
- $k^4+24k+16=\left(k^2+3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k-7=0$

Do đó phải có $k \le 3$. Thử trực tiếp thấy $k=3$ thỏa mãn. Từ đó tìm được $t=36, p=11$.

Trường hợp 2: Nếu $p \mid t+3$. Đặt $t+3=pk$ với $k \in \mathbb{N}$.

Thay vào (*) ta được

$p\left(p^2-4\right)=pk(t-3) \Rightarrow p^2=kt-3k+4$.

Mặt khác, ta có $(t+3)^2=p^2k^2 \Rightarrow t^2+6t+9=k^2(kt-3k+4)$

Hay $t^2+\left(6-k^3\right)t+9+3k^3-4k^2=0$

Xem đây là một phương trình bậc hai ẩn t. Điều kiện cần để tồn tại nghiệm nguyên của phương trình là $\Delta=k^2\left(k^4-24k+16\right)$ là một số chính phương.

Muốn vậy thì $k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Suy ra các trường hợp nhỏ sau đây:

- $k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$

- $k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k+3=0$
- $k^4-24k+16=\left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$

Do đó phải có $k\le 3$. Thử trực tiếp thấy $k=3$ thỏa mãn. Từ đó tìm được $t=3;18$ tương ứng với $p=2;7$.

Vậy các giá trị của p cần tìm là $2;7;11$.

37. (http://julielltv.wordpress.com 2014).

Cho ba số tự nhiên a,b,c thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2=c\left(a+b\right)+ab$. Chứng minh rằng $8c+1$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả thiết đã cho tương đương với $4c^2=c^2+ab+bc+ca=\left(a+c\right)\left(b+c\right)$.

Đặt $\left(a+c;b+c\right)=d$ thì $d\,|\left(a+c\right)-\left(b+c\right)\Rightarrow d\,|\,a-b\Rightarrow d=a-b$ hoặc $d=1$ (chú ý rằng $a-b$ là số nguyên tố).

Trường hợp 1: Nếu $d=1$ thì $a+c$ và $b+c$ đều là các số chính phương.

Đặt $a+c=m^2, b+c=n^2$ với $m,n\in\mathbb{Z}$.

Khi đó $m^2-n^2=a-b\Rightarrow m-n=1\Rightarrow m=n+1$

Mặt khác:

$4c^2=m^2n^2\Rightarrow 2c=mn\Rightarrow 8c+1=4mn+1=4n\left(n+1\right)+1=\left(2n+1\right)^2$ là số chính phương.

Trường hợp 2: Nếu $d=a-b$ thì $a+c=\left(a-b\right)x$ và $b+c=\left(a-b\right)y$ với $x,y\in\mathbb{Z}$.

Khi đó $\left(a+c\right)-\left(b+c\right)=\left(a-b\right)x-\left(a-b\right)y\Rightarrow a-b=\left(a-b\right)\left(x-y\right)$

$\Rightarrow x-y=1\Rightarrow x=y+1$

Ta có $4c^2=\left(a+c\right)\left(b+c\right)=\left(a-b\right)^2xy=\left(a-b\right)^2y\left(y+1\right)$.

Do đó $y\left(y+1\right)$ là số chính phương. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp là số chính phương khi tích đó bằng 0. Suy ra $c=0$. Khi đó $8c+1=1$ là số chính phương.

Vậy $8c+1$ là số chính phương.

38. (Romania TST 1999).

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $S_n=C_{2n+1}^0.2^{2n}+C_{2n+1}^2.2^{2n-2}.3+\ldots+C_{2n+1}^{2n}.3^n$ là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải

Đặt $a=1+\sqrt{3}, b=1-\sqrt{3}, T_n=\frac{1}{2}\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)$.

Ta có $ab=-2, \frac{a^2}{2}=2+\sqrt{3}, \frac{b^2}{2}=2-\sqrt{3}$.

Áp dụng khai triển nhị thức Newton cho $\left(1+\sqrt{3}\right)^n, \left(1-\sqrt{3}\right)^n$ ta được

$T_n=\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}3^k$, T_n là số nguyên dương với mọi n.

Lại áp dụng khai triển nhị thức Newton cho $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1}, \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$

Ta được $S_n=\dfrac{\left(\frac{a^2}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{b^2}{2}\right)^{2n+1}}{4}=\dfrac{a^{4n+2}+b^{4n+2}}{2^{2n+3}}$

$=\dfrac{a^{4n+2}+2(ab)^{2n+1}+b^{4n+2}}{2^{2n+3}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)^2}{2^{2n+3}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{T_n^2}{2^{2n+1}}+\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $2^{2n+1}S_n=T_n^2+2^{2n}$. Lúc đó T_n^2 chia hết cho 2^{2n} nhưng không chia hết cho 2^{2n+1}.

Suy ra $T_n\equiv 2^n \left(\bmod 2^{n+1}\right)$.

Như vậy, $S_n=\dfrac{T_n^2}{2^{2n+1}}+\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{T_n-2^n}{2^{n+1}}\right)^2+\left(\dfrac{T_n+2^n}{2^{n+1}}\right)^2$ là tổng của hai số chính phương.

39. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ là số chính phương. Chứng minh $xy+1, yz+1, zx+1$ đều là số chính phương.

Lời giải.

Trong các bộ số $(x;y;z)$ thỏa mãn bài toán , ta xét bộ số $(x;y;z)$ sao cho $x+y+z$ nhỏ nhất (1).

Không giảm tổng quát giả sử $z=\max(x;y;z)$.

Gọi t là số thỏa phương trình bậc hai:

$t^2+x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zt+tx+xr+ty)-4xyz-4=0$ (2).

$\Leftrightarrow t^2-2t(x+y+z+2xyz)+x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)-4=0$.

Nhận xét rằng (2) tương đương với 3 phương trình sau:

$(x+y-z-t)^2=4(xy+1)(zt+1)$

$(x+z-y-t)^2=4(xz+1)(yt+1)$

$(x+t-y-z)^2=4(xt+1)(yz+1)$

Lại vì t nguyên do phương trình (2) có hai nghiệm nguyên:

$t_{1,2} = x + y + z + 2xyz \pm 2\sqrt{(xy+1)}(yz+1)(zx+1)$ nên nhân cả 3 phương trình trên vế theo vế , ta suy ra $(xt+1)(yt+1)(zx+1)$ là số chính phương.

Mặt khác , ta có $xt+1 \ge 0, yt+1 \ge 0, zt+1 \ge 0$.

Suy ra $t \ge \dfrac{-1}{\max\{x,y,z\}} > -1$ (do $x = y = z = 1$ không thỏa mãn).

Nếu $t = 0$ thì từ (2) ta suy ra

$(x+y+z)^2 = 4(xy+yz+zx) \Leftrightarrow (x+y-z)^2 = 4(xy+1)$

Vì $(x+y+z)^2$ và 4 là các số chính phương nên $xy+1$ là số chính phương.

Chứng minh tương tự ta cũng có $yz+1, zx+1$ là số chính phương.

Nếu $t > 0$ thì từ (1) suy ra $t \ge z$ với mọi t thỏa (2).

Nhưng t chỉ có thể bằng t_1 hoặc t_2 và ta lại có:

$t_1, t_2 = x^2 + y^2 + x^2 - 2(xy+yz+zx) - 4 \le z^2 - x(2z-x) - y(2z-y) < z^2$ mâu thuẫn .

Vậy là ta hoàn tất chứng minh.

40.(APMO 2011). Cho các số nguyên a,b,c . Chứng minh rằng không thể xảy ra đồng thời cả ba số $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ đều là những số chính phương.

Lời giải 1

Giả sử cả ba số $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ đều là những số chính phương .

Khi đó số chính phương a^2+b+c lớn hơn a^2 nên $a^2+b+c \ge (a+1)^2$.

Suy ra $b+c \ge 2a+1$

Chứng minh tương tự ta thu được $c+a \ge 2b+1; a+b \ge 2c+1$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức này ta thu được:

$2(a+b+c) \ge 2(a+b+c)+3 \Leftrightarrow 0 \ge 3$ (vô lí).

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

Lời giải 2

Do tính chất đối xứng của a,b,c nên có thể giả sử rằng $a \ge b \ge c$.

Giả sử a^2+b+c là số chính phương. Theo lời giải trên ta có được $b+c \ge 2a+1$.

Mặt khác $2a \ge b+c \ge 2a+1$, mâu thuẫn. Vậy ta hoàn tất chứng minh.

41. (National Team Training Singapore 2006).

Cho k là số nguyên dương lẻ. Giả sử $\left(2+\sqrt{3}\right)^k = m+n\sqrt{3}$ với m,n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng $m-1$ là số chính phương.

Lời giải

Ta viết số lẻ k thành $2j-1$ và đặt $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2j-1} = m_j + n_j\sqrt{3}$.

Ta có $m_{j+1}+n_{j+1}\sqrt{3} = \left(m_j+n_j\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ (1)

Suy ra $m_{j+1} = 7m_j + 12n_j$ và $n_{j+1} = 4m_j + 7n_j$

Do đó $m_{j+2} = 97m_j + 168n_j$.

Kết hợp với (1) để khử n_j ta thu được $m_{j+2} = 14m_{j+1} - m_j$

Rõ ràng $m_1 = 1, m_2 = 26$.

Gọi $\{c_j\}$ là dãy xác định bởi $c_1 = 1, c_2 = 5$ và $c_{j+2} = 4c_{j+1} - c_j$

Ta sẽ chứng minh rằng $m_j = c_j^2 + 1$ với mọi j.

Đầu tiên, ta sử dụng nguyên lý quy nạp để chứng minh rằng:

$c_{j+1}^2 + c_j^2 = 4c_{j+1}c_j + 6$. (2)

- Dễ thấy (2) đúng khi $j=1$.
- Giả sử (2) đúng với j nào đó.
- Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $j+1$. Thật vậy,
  $c_{j+2}^2 + c_{j+1}^2 = 17c_{j+1}^2 + c_j^2 - 8c_{j+1}c_j = 15c_{j+1}^2 - c_j^2 + 12$.

Lại có $4c_{j+2}c_{j+1} + 6 = 16c_{j+1}^2 - 4c_{j+1}c_j + 6 = 15c_{j+1}^2 - c_j^2 + 12$.

Suy ra (2) được chứng minh.

Tiếp theo ta cũng sử dụng nguyên lý quy nạp để chứng minh $m_j = c_j^2 + 1$.

- Rõ ràng khi $j = 1,2$ thì (3) đúng.
- Giả sử (3) đúng với j.
- Ta sẽ chứng minh (3) đúng với $j+1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} c_{j+1}^2 + 1 &= 16c_{j+1}^2 - 8c_{j+1}c_j + c_j^2 + 1 \\ &= 14c_{j+1}^2 - c_j^2 + 13 \text{ (theo (2))} \\ &= 14\left(m_{j+1}-1\right) - \left(m_j - 1\right) + 13 \text{ (theo giả thiết quy nạp)} \\ &= 14m_{j+1} - m_j = m_{j+2}. \end{aligned}$$

Ta hoàn tất việc chứng minh bài toán này.

42. (Malaysia 1998).

Chứng minh rằng a^2+b^2 không thể nào là một số chính phương nếu a,b là các số nguyên lẻ.

Lời giải

Vì $a^2\equiv 1\pmod 4$, $b^2\equiv 1\pmod 4$ nên $a^2+b^2\equiv 2\pmod 4$.

Thế nhưng $0^2\equiv 0\pmod 4, 1^2\equiv 1\pmod 4, 2^2\equiv 0\pmod 4$ và $3^2\equiv 1\pmod 4$ nên ta suy ra điều phải chứng minh.

43. (Malaysia 2000). Chứng minh rằng $2^{2p}+2^{2q}$ không bao giờ là một số chính phương với p,q là các số nguyên không âm.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $p\ge q$. Ta có $2^{2p}+2^{2q}=4^q\left(4^{p-q}+1\right)$.

Vì 4^q là số chính phương nên ta cần chứng minh $4^{p-q}+1$ không phải là số chính phương.

Giả sử ngược lại tức là tồn tại số nguyên n sao cho $4^{p-q}+1=(2n+1)^2$.

Khi đó ta có điều mâu thuẫn là $4^{p-q-1}=n(n+1)$, vì $n(n+1)\ne 1$ và một trong hai số $n,n+1$ phải lẻ.

Vậy ta hoàn tất việc chứng minh.

44. (diendantoanhoc.net 2014). Cho ba số nguyên dương a,b,c thỏa mãn đẳng thức: $c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b)$.

Chứng minh rằng c là số chính phương lẻ.

Lời giải 1.

Ta có $c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b)\Leftrightarrow 2b^2+9cb+10c^2-c(ac+1)^2=0$.

Xem đây là một phương trình bậc hai theo b. Phương trình này có nghiệm khi $\Delta_b=c\left[c+8(ac+1)^2\right]=x^2$ với $x\in\mathbb{N}^*$ (nghĩa là Δ_b phải là số chính phương).

Đặt $d=\gcd\left(c;c+8(ac+1)^2\right)\Rightarrow d\,|\,8(ac+1)^2$. (1)

Hơn nữa $d\,|\,c\Rightarrow \gcd\left((ac+1)^2;d\right)=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $d\,|\,8$.

Trường hợp 1: Xét $d=8$, suy ra $\left(\frac{c}{8};\frac{c}{8}+(ac+1)^2\right)=1$

Ta có $c\left[c+8(ac+1)^2\right]=x^2\Leftrightarrow \frac{c}{8}\left[\frac{c}{8}+(ac+1)^2\right]=\left(\frac{x}{8}\right)^2 \quad \left(x\in\mathbb{N}^*\right)$.

Khi đó $8|x$. Đặt $x=8k$ với $k\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $\frac{c}{8}\left[\frac{c}{8}+(ac+1)^2\right]=k^2$

Điều này dẫn đến $\begin{cases}\frac{c}{8}=t^2\\ \frac{c}{8}+(ac+1)^2=s^2\end{cases}$ với $t,s\in\mathbb{N}^*$ và $\gcd(t,s)=1$

$\Rightarrow\begin{cases}c=8t^2\\ t^2+(8t^2a+1)^2=s^2\end{cases}$

Chú ý vào đánh giá sau: $8t^2a+1<t^2+(8t^2a+1)^2<(8t^2a+2)^2$

$\Rightarrow 8t^2a+1<s^2<(8t^2a+2)^2$ (mâu thuẫn).

Do đó trường hợp này bị loại.

Trường hợp 2: Xét $d=4$, suy ra $\gcd\left(\frac{c}{4};\frac{c}{4}+2(ac+1)^2\right)=1$

Điều này dẫn đến $\frac{c}{4};\frac{c}{4}+2(ac+1)^2$ là những số chính phương. (*)

Nếu $\frac{c}{4}$ chẵn thì $\left[\frac{c}{4}+2(ac+1)^2\right]\vdots 2$ suy ra $\gcd\left(\frac{c}{4};\frac{c}{4}+2(ac+1)^2\right)=1$ (mâu thuẫn).

Do đó $\frac{c}{4}$ là số lẻ. Lại vì $\frac{c}{4}$ là số chính phương nên $\frac{c}{4}\equiv 1(\bmod 4)$.

Mặt khác do c chẵn nên $ac+1$ là số lẻ.

Khi đó $(ac+1)^2\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow\frac{c}{4}+2(ac+1)^2\equiv 1+2.1\equiv 3(\bmod 4)$ (vô lí do (*))

Do đó trường hợp này bị loại.

Trường hợp 3: Xét $d=2$.

Tương tự trường hợp 2, ta có $\frac{c}{2}$ là số lẻ $\Rightarrow\frac{c}{2}\equiv 1(\bmod 8)$

Ta có c chẵn $\Rightarrow ac+1$ lẻ.

$\Rightarrow(ac+1)^2\equiv 1(\bmod 8)\Rightarrow\frac{c}{2}+4(ac+1)^2\equiv 1+4.1\equiv 5(\bmod 8)$ (vô lí)

Do đó trường hợp này bị loại.

Trường hợp 4: Xét $d=1$.

Tương tự trường hợp 2, ta có ngay c lẻ và do $\left(c,c+8(ac+1)^2\right)=1$ nên c là số chính phương.

Vậy ta kết thúc việc chứng minh tại đây.

Lời giải 2

Đặt $d=\gcd(b,c)\Rightarrow\begin{cases}c=dm\\ b=dn\end{cases}$ với $m,n\in\mathbb{N}^*$ và $\gcd(m,n)=1$.

Đẳng thức đã cho ở bài toán trở thành:

$m(dam+1)^2=d(5m+2n)(2m+n)$. (*)

Suy ra $d\mid m(dam+1)^2$, mà $\gcd(d,dam+1)=1$ dẫn đến $d\mid m\Rightarrow m=dk\Rightarrow\gcd(k,n)=\gcd(d,n)=1$

.

Khi đó (*) trở thành $k\left(d^2ak+1\right)^2=(5dk+2n)(2dk+n)$.

Suy ra $k\mid 5dk+2n\Rightarrow k\mid 2n$.

Do $\gcd(k,n)=1$ nên $k\mid 2$. Do đó $k\in\{1;2\}$.

Trường hợp 1: Xét $k=2$

Khi đó:

$2\left(ad^2+1\right)^2=(10d+2n)(4d+n)\Leftrightarrow\left(ad^2+1\right)^2=(5d+n)(4d+n)$

Vì $\gcd(5d+n,4d+n)=\gcd(d,4d+n)=\gcd(d,n)=1$ nên

$\begin{cases}5d+n=x^2\\ 4d+n=y^2\end{cases}$ với $x,y\in\mathbb{N}^*$ và $\gcd(x,y)=1$.

Suy ra $d=x^2-y^2$.

Mặt khác $2ad^2+1=xy\Leftrightarrow a=\dfrac{xy-1}{2d^2}\Leftrightarrow a=\dfrac{xy-1}{2\left(x^2-y^2\right)^2}$.

Để ý rằng $(x+y)^2\ge 4xy>xy-1$ và $2\left(x^2-y^2\right)^2-(x+y)^2=(x+y)^2\left[2(x-y)^2-1\right]>0$.

Do đó $2(x-y)^2>(x+y)^2>xy-1$. Điều này dẫn đến $a<1$, trái với giả thiết.

Thế thì trường hợp $k=2$ bị loại.

Trường hợp 2: Xét $k=1$.

Khi đó $d=m\Rightarrow\begin{cases}c=d^2\\ b=dn\end{cases}$.

Đẳng thức đã cho ở đề toán trở thành:

$d^2\left(ad^2+1\right)^2=\left(5d^2+2dn\right)\left(2d^2+dn\right)\Leftrightarrow\left(ad^2+1\right)^2=(5d+2n)(2d+n)$ (**).

Vì $gcd\left(5d+2n,2d+n\right)=gcd\left(d,2d+n\right)=gcd\left(d,n\right)=1$ nên $\begin{cases}5d+2n=x^2\\ 2d+n=y^2\end{cases}$ với $x,y\in\mathbb{N}^*$ và $gcd\left(x,y\right)=1$. Suy ra $\begin{cases}d=x^2-2y^2\\ n=5y^2-2x^2\end{cases}$.

Nếu $x=2t$ với $t\in\mathbb{N}^*$ thì $\begin{cases}d=4t^2-2y^2\\ n=5y^2-8t^2\end{cases}$.

Khi đó (**) trở thành $\left(ad^2+1\right)^2=4t^2y^2 \Leftrightarrow a\left(4t^2-2y^2\right)^2+1=2ty$ (***).

Phương trình (***) vô nghiệm do hai vế của nó khác tính chẵn lẻ. Điều này có nghĩa là x lẻ. Suy ra d lẻ hay c lẻ.

Như vậy c là số chính phương lẻ. Vậy ta hoàn tất chứng minh.

45. Chứng minh rằng có vô số số chính phương viết ở dạng $2n^2+2$ và $2n^2-1$.

Lời giải

Xét phương trình nghiệm nguyên: $2x^2-1=y^2$. (1)

Phương trình (1) tương đương với $4x^2-2=2y^2 \Leftrightarrow \left(2x\right)^2=2y^2+2$.

Để hoàn thành bài toán này ta đi chứng minh phương trình (1) có vô số nghiệm.

Từ (1) suy ra y là một số lẻ, tức là $y=2m+1$ với $m\in Z^*$. Thay vào (1) ta được:

$$2x^2-1=\left(2m+1\right)^2 \Leftrightarrow 4m^2+4m+1=2x^2-1 \Leftrightarrow 2m^2+2m+1=x^2. \qquad (2)$$

Xét dãy các cặp số nguyên xác định như sau:

$$\begin{cases}m_1=3x_1=5\\ m_{k+1}=3m_k+2x_k+1, x_{k+1}=4x_k+3x_k+2, \forall k\geq 1\end{cases}.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta sẽ chứng minh $\left(m_{k,}x_k\right)$ là nghiệm của (2).

Dễ thấy $\left(m_1,x_1\right)=\left(3,5\right)$ là một nghiệm của (2).

Giả sử $\left(m_{k,}x_k\right)$ là nghiệm của (2).

Ta cần chứng minh $\left(m_{k+1,}x_{k+1}\right)$ là nghiệm của (2). Thật vậy,

$$\begin{aligned}2m^2_{k+1}+2m_{k+1}+1&=2\left(3m_k+2x_k+1\right)^2+2\left(3m_k+2x_k+1\right)+1\\ &=18m_k^{\ 2}+8x^2_{\ k}+24m_k.x_k+18m_\partial+12x_k+5\\ &=\left(4m_k+3x_k+2\right)^2+2m^2_{\ k}+2m_k+1-x_k^{\ 2}\\ &=x^2_{\ k+1}\ (\text{vì } 2m_k^{\ 2}+2m_k+1-x_k^{\ 2}=0).\end{aligned}$$

Điều này cho thấy rằng $\left(m_{k+1,}x_{k+1}\right)$ là nghiệm của (2).

Mặt khác, $m_{k+1}>m_k, x_{k+1}>x_k$ với mọi $k\geq 1$, cho nên $\{m_k\},\{x_k\}$ là những dãy tăng thực sự. Vậy (2) có vô số nghiệm.

46. Cho a,b là các số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $2a^2+a=3b^2+b$. Chứng minh rằng $a-b$ và $2a+2b+1$ là những số chính phương.

Lời giải

Ta có: $2a^2+a=3b^2+b \Leftrightarrow 2a^2-2b^2+a-b=b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2$. (1)

Đặt $d=gcd(a-b,2a+2b+1)$.

Khi đó $d\,|\,a-b$ và $d\,|\,2a+2b+1$.

Suy ra $d^2\,|\,(a-b)(2a+2b+1) \Rightarrow d^2\,|\,b^2 \Rightarrow d\,|\,b$.

Vì $d\,|\,a-b$ và $d\,|\,b$ nên $d\,|\,a$.

Lại vì $d\,|\,a$, $d\,|\,b$ mà $d\,|\,2a+2b+1$ nên $d\,|\,1$ tức là $d=1$.

Do đó $gcd(a-b,2a+2b+1)=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a-b$ và $2a+2b+1$ là những số chính phương.

47. Cho n là số nguyên dương sao cho $2n+1, 3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $n \vdots 40$

Lời giải

Giả sử $2n+1=x^2$, $3n+1=y^2$ với $x,y\in\mathbb{N}$.

Theo cách đặt này, dễ dàng suy ra x lẻ và $(x-1)(x+1)=2n$.

Vì x lẻ nên $(x-1)(x+1) \vdots 4 \Rightarrow 2n \vdots 4 \Rightarrow n$ là số chẵn.

Do n chẵn nên $3n+1$ là số lẻ $\Rightarrow y$ là số lẻ.

Mặt khác $3n=y^2-1=(y-1)(y+1) \vdots 8$. Do $gcd(3,8)=1$ nên $n \vdots 8$

Để ý rằng với mọi số chính phương k^2 ta luôn có:

$k^2=0(\mathrm{mod}\,5)$, $k^2=1(\mathrm{mod}\,5)$, $k^2=-1(\mathrm{mod}\,5)$. (*)

Lại theo cách đặt ở trên, ta có:

$(2n+1)+(3n+1)=x^2+y^2 \Rightarrow 5n+2=x^2+y^2$

$\Rightarrow 5n+2=x^2+y^2(\mathrm{mod}\,5) \Rightarrow x^2+y^2=2(\mathrm{mod}\,5)$.

Từ (*) ta suy ra:

$x^2 = y^2 = 1 \pmod 5 \Rightarrow x^2 - y^2 \vdots 5 \Rightarrow \left[(3n+1)-(2n+1)\right] \vdots 5\ n \vdots 5$.

Vì $gcd(8,5)=1$ nên $n \vdots 40$.

48. Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không phải là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương thì $b^2 - 4ac = k^2$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $4a.\overline{abc} = 400a^2 + 40ab + 4ac = 400a^2 + 40ab + b^2 - k^2$.

$$= (20a+b)^2 - k^2 = (20a+b+k)(20a+b-k).$$

Vì $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $c \neq 0 \Rightarrow ac > 0$.

Do đó $b > k \Rightarrow 20a + b + k > 20a + b - k > 20a$.

Từ đó suy ra $\overline{abc} = \dfrac{(20a+b-k)(20a+b+k)}{4a} = m.n$.

Mà $20a+b+k$ và $20a+b-k$ đều lớn hơn $4a$ nên m và n đều lớn hơn 1.

Như vậy $\overline{abc}$ là hợp số, mâu thuẫn với giả thiết.

49. Chứng minh rằng nếu $2n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ là tổng của hai số chính phương thì n cũng là tổng của số chính phương.

Lời giải

Gọi n là số tự nhiên thỏa mãn $2n = a^2 + b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}$.

Từ đây suy ra a, b cùng tính chẵn lẻ.

Do đó $a+b$ và $a-b$ là các số chẵn.

Đặt $a+b = 2u$, $a-b = 2v$. Suy ra $a = u+v, b = u-v$.

Khi đó $2n = (u+v)^2 + (u-v)^2 \Leftrightarrow n = u^2 + v^2$.

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

50. Tìm n nguyên dương sao cho $X = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ là một số chính phương.

Lời giải

Nếu X là số chính phương thì:

$2^8 + 2^{11} + 2^n = x \Leftrightarrow 2^n = (x-48)(x+48)$ với x là một số nguyên dương nào đó.

Khi đó $\begin{cases} x - 48 = 2^n \\ x + 48 = 2^{n-s} \end{cases}$ với $n > 2s$.

Từ đó suy ra $2^{n-s} - 2^s = 96 \Leftrightarrow 2^s\left(2^{n-2s} - 1\right) = 3.2^5$.

Như vậy $\begin{cases} s=5 \\ 2^{n-2s}-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=5 \\ n=12 \end{cases}$.

51. Chứng minh rằng $X=1^k+9^k+19^k+2013^k$ không phải là số chính phương với mọi k nguyên dương lẻ.

Lời giải

Với mọi k nguyên dương lẻ ta có:

$1^k \equiv 1(\bmod 4); 9^k \equiv 1(\bmod 4), 19^k \equiv -1(\bmod 4), 2013^k \equiv 1(\bmod 4)$.

Suy ra $X \equiv 2(\bmod 4)$.

Vậy X không thể là số chính phương.

52. Cho p là tích của n số nguyên tố đầu tiên $(n>1)$. Chứng minh rằng $p-1$ không phải là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $p-1$ là số chính phương. Do p là tích của n số nguyên tố đầu tiên $(n>1)$ nên $p \vdots 3$. Do đó $p-1 \equiv -1(\bmod 3)$.

Đặt $p-1=3k-1$. Một số chính phương không có dạng $3k-1$.

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

53. Cho $k_1<k_2<k_3<\ldots$ là những số nguyên dương, không có hai số nào liên tiếp và đặt $S_n=k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n$, $\forall n=1,2,\ldots$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương, nửa khoảng $[S_n, S_{n+1})$ chứa ít nhất một số chính phương.

Lời giải

Nhận xét: Nửa khoảng $[S_n, S_{n+1})$ chứa ít nhất một số chính phương khi và chỉ khi nửa khoảng $\left[\sqrt{S_n}, \sqrt{S_{n+1}}\right)$ có ít nhất một số nguyên dương, tức là $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n} \geq 1$.

Ta có $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{S_{n+1}} \geq \sqrt{S_n}+1 \Leftrightarrow S_{n+1} \geq S_n+2\sqrt{S_n}+1 \Leftrightarrow S_n+k_{n+1} \geq S_n+2\sqrt{S_n}+1$

$\Leftrightarrow k_{n+1} \geq 2\sqrt{S_n}+1$.

Theo đề bài rõ ràng $k_{n+1} \geq k_n+2$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S_n \leq n.k_{n+1}-n(n+1)$.

Ta cần chứng minh $k_{n+1} \geq 2\sqrt{nk_{n+1}-n(n+1)}+1$.(*)

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow k^2{}_{n+1}-2k_{n+1}+1 \geq 4nk_{n+1}-4n(n+1)$

$\Leftrightarrow k^2{}_{n+1}-2(2n+1)k_{n+1}+(2n+1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (k_{n+1}-2n-1)^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối là đúng.

Vậy mọi số nguyên dương n nửa khoảng $\left[\sqrt{S_n}, \sqrt{S_{n+1}}\right)$ chứa ít nhất một số chính phương.

54. (Polish 2001). Cho a, b là các số nguyên sao cho với mọi n thì $2^n a + b$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng $a = 0$.

Lời giải

Giả sử $a \neq 0$.

Nếu $a \neq 0$, $b = 0$ thì $2^1 a + b$ và $2^2 a + b$ không thể đồng thời là số chính phương. Do đó a và b đều phải khác 0. Từ đó dễ dàng suy ra được a và b đều dương.

Xét hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ như sau: $x_n = 2\sqrt{2^n a + b}$ và $y_n = 2\sqrt{2^{n+2} a + b}$.

Dễ thấy $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy số nguyên dương, đơn điệu tăng vô hạn.

Ta có $(x_n + y_n)(x_n - y_n) = 3b$.

Suy ra $3b \mid x_n + y_n$ với mọi $n \Rightarrow 3b \geq x_n + y_n$ với mọi n (vô lí).

Thế thì điều giả sử là sai.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

55. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $\dfrac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^n - \left(17+12\sqrt{2}\right)^n}{4\sqrt{2}}$ là một số nguyên và không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có $17 + 12\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+1\right)^4$ và $17 - 12\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^4$.

Khi đó $\dfrac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^n - \left(17+12\sqrt{2}\right)^n}{4\sqrt{2}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}}{2\sqrt{2}}.$$

Đặt $A = \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}}{2}$, $B = \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}}{2\sqrt{2}}$

Sử dụng nhị thức Newton ta suy ra: $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} = x + y\sqrt{2}$ và $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} = x - y\sqrt{2}$, với x, y là các số nguyên dương.

Từ đó suy ra $A = x$, $B = y$. Do đó A, B là các số nguyên dương.

Mặt khác, $A^2-2B^2=\left(A-B\sqrt{2}\right)\left(A+B\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}=1$.

Do đó, A,B là các số nguyên tố cùng nhau.

Để chứng minh AB không phải là số chính phương ta chỉ cần chứng minh một trong hai số đó không phải là số chính phương.

Ta có $A=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}}{2}=\dfrac{\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right]^2}{2}-1$

$B=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}}{2}=\dfrac{\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right]^2}{2}+1$.

Dễ dàng suy ra A không phải là số chính phương.

56.(Romanian Team Selection Test for JBMO 2002). Bốn chữ số cuối của một chữ số chính phương là bằng nhau. Chứng minh rằng chúng bằng 0.

Lời giải

Kí hiệu k^2 là số chính phương và a là chữ số xuất hiện ở bốn vị trí cuối cùng. Dễ dàng suy ra rằng $a\in\{0,1,4,5,6,9\}$.

Do đó $k^2\equiv a.1111\pmod{16}$.

* Nếu $a=0$ thì bài toán được chứng minh.

* Giả sử rằng $a\in\{1,5,9\}$. Từ $k^2\equiv 0\pmod 8$, $k^2\equiv 1\pmod 8$ hoặc $k^2\equiv 4\pmod 8$ và $1111\equiv 7\pmod 8$ ta thu được: $1111\equiv 7\pmod 8$, $5.1111\equiv 3\pmod 8$ và $9.1111\equiv 7\pmod 8$.

Như vậy đồng thức dư $k^2\equiv a.1111\pmod{16}$ không thể xảy ra.

* Giả sử rằng $a\in\{4;6\}$. Từ $1111\equiv 7\pmod{16}$, $4.1111\equiv 12\pmod{16}$ và $6.1111\equiv 10\pmod{16}$ ta suy ra đồng thức dư $k^2\equiv a.1111\pmod{16}$ không thể xảy ra.

Vậy $a=0$.

57. Tìm tất cả các số nguyên x,y sao cho $4^x+4^y+4^z$ là một số chính phương.

Lời giải

Rõ ràng bài toán không có nghiệm $x<0$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x\le y\le z$ và đặt $4^x+4^y+4^z=u^2$.

Thế thì $2^{2x}\left(1+4^{y-x}+4^{z-x}\right)=u^2$. Ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $1+4^{y-x}+4^{z-x}$ là lẻ thì $1+4^{y-x}+4^{z-x}=(2a+1)^2$.

Suy ra rằng $4^{y-x-1}+4^{z-x-1}=a(a+1)$ hay $4^{y-x-1}\left(1+4^{z-y}\right)=a(a+1)$.

Đến đây chúng ta lại xét hai trường hợp nhỏ:

Nếu a là chẵn thì $a+1$ lẻ. Vì vậy $4^{y-x-1}=a$ và $1+4^{z-y}=a+1$.

Suy ra $4^{y-x-1}=4^{z-y} \Leftrightarrow y-x-1=z-y \Leftrightarrow z=2y-x-1$.

Và $4^x+4^y+4^z=4^x+4^y+4^{2y-x-1}=\left(2^x+2^{2y-x-1}\right)^2$.

Nếu a là lẻ thì $a+1$ chẵn, vì vậy $a=4^{z-y}+1$, $a+1=4^{y-x-1}$ và $4^{y-x-1}-4^{z-y}=2$. Suy ra rằng $2^{2y-2x-3}=2^{2x-2y-1}+1$ không thể xảy ra vì $2x-2y-1\neq 0$.

Trường hợp 2: Nếu $1+4^{y-x}+4^{z-x}$ là chẵn, thế thì $y=x$ hoặc $z=x$. Dù sao cũng phải có $y=x$ và dẫn đến $2+4^{z-x}$ là một số chính phương. Điều này là không thể vì $2+4^{z-x}\equiv 2$ hoặc $3(\bmod 4)$

58. (Romanian MO 2000)

Cho k là một số nguyên. Chứng minh rằng $(2k+1)^3-(2k-1)^3$ là tổng của ba số chính phương

Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $(2n+1)^3-2$ có thể biểu diễn dưới dạng tổng của $3n-1$ số chính phương lớn hơn 1.

Lời giải

a) Ta có $(2k+1)^3-(2k-1)^3$

$$=\left[(2k+1)-(2k-1)\right]\left[(2k+1)^2+(2k+1)(2k-1)+(2k-1)^2\right]$$

$$=2\left[(2k+1)^2+2(2k+1)(2k-1)+(2k-1)^2\right]$$

$$=(2k+1)^2+(2k-1)^2+\left[(2k+1)^2+2(2k+1)(2k-1)+(2k-1)^2\right]$$

$$=(2k+1)^2+(2k-1)^2+(2k+1+2k-1)^2$$

$$=(2k+1)^2+(2k-1)^2+(4k)^2 \text{ (điều phải chứng minh).}$$

b) Để ý rằng

$(2n+1)^3-1=(2n+1)^3-(2n-1)^3-(2n-1)^3-(2n-3)^3+\ldots+3^3-1^3$.

Ta có:

$(2n+1)^3-2=\sum_{k=1}^{n}\left[(2k+1)^2+(2k-1)^2+(4k)^2\right]-1$ (theo kết quả câu a)

$$= 3^2 + 1^2 + 4^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[(2k+1)^2 + (2k-1)^2 + (4k)^2\right] - 1$$

$$= 3^2 + 4^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[(2k+1)^2 + (2k-1)^2 + (4k)^2\right].$$

Vậy $(2n+1)^3 - 2$ có thể biểu diễn dưới dạng tổng $3n-1$ số chính phương.

59. (Romanian MO 2003) Cho $n \geq 3$ là một số nguyên. Chứng minh rằng có thể loại bỏ tối đa hai phần tử ử giữa các phần tử của tập $\{1, 2, 3, ..., n\}$ sao cho tổng các số còn lại là một số chính phương.

Lời giải

Đặt $m = \left\lfloor \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \right\rfloor$. Từ $m^2 \leq \frac{n(n+1)}{2} < (m+1)^2$

Ta có $\frac{n(n+1)}{2} - m^2 < (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

Do đó ta có $\frac{n(n+1)}{2} - m^2 \leq 2m \leq \sqrt{2n^2 + 2n} \leq 2n - 1$.

Với mỗi k sao cho $k \leq 2n-1$ có thể thu được bằng cách thêm vào nhiều nhất là hai con số từ $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Vậy ta hoàn tất chứng minh.

60. Tìm các số tự nhiên n sao cho $n-50$ và $n+50$ đều là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $\begin{cases} n - 50 = a^2 \\ n + 50 = b^2 \end{cases}$ với a, b nguyên dương và $a > b$.

Do $b - a < b + a$ và chúng có cùng tính chẵn lẻ nên $a + b$ và $b - a$ phải là các số chẵn.

Do đó $\begin{cases} b - a = 2 \\ b + a = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 26 \end{cases}$

Vậy ta tìm được $n = 626$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

61. Tìm tất cả các số tự nhiên $m,\ n$ sao cho $2^m + 3^n$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2^m + 3^n = k^2$ với $k^2 \in \mathbb{N}^*$.

Vì $k^2 \equiv 0$ hoặc $1 \pmod{3}$ nên m phải là số chẵn và $m \geq 2$. Do đó k^2 là số lẻ và $k^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Điều này dẫn đến $3^n \equiv 1 \pmod{4}$, vì vậy n là số chẵn. Đặt $n = 2x$ với $x \in \mathbb{N}^*$. Ta có $2^m = k^2 - 3^{2x} = (k + 3^x)(k - 3^x)$. Vì $(k + 3^x) + (k - 3^x) = 2k$ và k lẻ nên lũy thừa cao nhất của 2 mà là ước của cả hai nhân tử chỉ có thể là 2. Điều này đồng nghĩa với

$$\begin{cases} k+3^x=2 \\ k+3^x=2^{m-1} \end{cases}$$

Trừ vế theo vế của phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất ta được $3^x+1=2^{m-2}$. (*)

Lại vì m chẵn và $m\neq 2$ nên $3^x+1\equiv 0 \pmod 4$. Do đó x lẻ.

Xét $x>1$ ta có $3^x+1=3^x+1^x=(3+1)\left(\sum_{i=0}^{x-1}(-1)^i 3^{x-1-i}\right)$

Nhận thấy $\sum_{i=0}^{x-1}(-1)^i 3^{x-1-i}$ là tổng của x số lẻ. Kết hợp với (*) ta suy ra, $\sum_{i=0}^{x-1}(-1)^i 3^{x-1-i}=1$ vì vậy $2^{m-2}=4 \Leftrightarrow m=4$. Dẫn đến $n=2, k=5$. Thử lại ta thấy $2^4+3^2=5^2$ luôn đúng.

Vậy $m=4$, $n=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

62. a) Tìm 11 số tự nhiên liên tiếp mà tổng các bình phương của chúng là số chính phương.

b) Chứng minh rằng khi $3\le n\le 10$, không tồn tại n số tự nhiên liên tiếp có tính chất trên.

Lời giải

a) Một kết quả thật thú vị:

$18^2+19^2+20^2+21^2+22^2+23^2+24^2+25^2+26^2+27^2+28^2=77^2$

b) Giả sử $n\in\mathbb{N}$ sao cho tồn tại n số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương là một số chính phương. Khi đó tồn tại $x, y\in\mathbb{N}$ thỏa mãn đẳng thức

$(x+1)^2+(x+2)^2+...+(x+n)^2=y^2$

Khai triển các hằng đẳng thức và thu gọn ta được:

$$nx^2+n(n+1)x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=y^2. \quad (*)$$

Giả sử (*) xảy ra sẽ dẫn đến $y^2\equiv m \pmod n$ với $m=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Khi $n\in\{3;4;9\}$ thì y^2 và m có cùng số dư tương ứng là 2; 2; 6 $(m=14;30;15.19)$. Lúc này sẽ không tồn tại y thỏa mãn.

Khi $n\in\{5;7\}$ thì $n\,|\,m$ và $n\,|\,y$ (do n nguyên tố). Đặt $y=nz$ và $t=x+\dfrac{n+1}{2}$.

Suy ra phương trình $t^2+\dfrac{n^2-1}{12}=z^2 \Leftrightarrow z^2-t^2=\dfrac{n^2-1}{12}$ (phương trình này vô nghiệm).

63. **(diendantoanhoc.net 2014).** Tìm số nguyên a lớn nhất sao cho $4^{27}+4^{2016}+4^a$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $A=4^{27}+4^{2016}+4^n=2^{54}\left(1+2.2^{1977}+2^{2a-54}\right)$

Để A là số chính phương ta chọn $a=2004$

Xét $a>2004 \Rightarrow 2.2^{1977}<2.2^{a-27}$

$\Rightarrow \left(2^{a-27}\right)^2<1+2.2^{1997}+2^{2a-54}<1+2.2^{a-27}+2^{2a-54}=\left(2^{a-27}+1\right)^2$.

Suy ra $1+2.2^{1977}+2^{2a-54}$ không phải là số chính phương.

Do đó A là số chính phương.

Vậy $a_{max}=2004$

64. **(diendantoanhoc.net 2014).** Chứng minh rằng với $m>3$ thì biểu thức $A=(m-1)^4-4m$ không thể viết dưới dạng một số chính phương.

Lời giải

Ta có: $m>3 \Rightarrow m\ge 4 \Rightarrow 2m(m-4)+1>0 \Rightarrow \left(m^2-2m\right)^2<A.$

Lại có $A<(m-1)^4=\left(m^2-2m+1\right)^2$.

Cho nên $\left(m^2-2m\right)^2<A<(m-1)^4=\left(m^2-2m+1\right)^2$.

Vậy $A=(m-1)^4-4m$ không thể viết dưới dạng một số chính phương.

65. **(diendantoanhoc.net 2014).** Chứng minh rằng với tồn tại vô số bội số (x,y,u,v) sao cho $xy+1,\ xu+1,\ xv+1,\ yu+1,\ yv+1,\ uv+1$ đều là những số chính phương.

Lời giải

Chọn $x=t, y=t+2, u=4t+4, v=4(t+1)(2t+1)(2t+3)$ với $t\in\mathbb{Z}$.

Dễ dàng kiểm tra được $xy+1,\ xu+1,\ xv+1,\ yu+1,\ yv+1,\ uv+1$ đều là những số chính phương với mọi $t\in\mathbb{Z}$.

Có vô số giá trị của t nên sẽ có vô số giá trị của x,y,u,v.

Vậy tồn tại vô số bộ số (x,y,u,v) sao cho $xy+1,\ xu+1,\ xv+1,\ yu+1,\ yv+1,\ uv+1$ đều là những số chính phương.

66. **(diendantoanhoc.net 2014).** Cho hai số tự nhiên a và b. Chứng minh rằng: Nếu ab là số chẵn thì luôn luôn tìm được số nguyên c sao cho $a^2+b^2+c^2$ là số chính phương.

Lời giải

- Nếu a và b đều là số chẵn thì $a^2+b^2=4k$ với $k\in\mathbb{N}$.
- Chọn $c=k-1$. Ta có $a^2+b^2+c^2=4k+(k-1)^2=k^2+2k+1=(k+1)^2$.
- Nếu a và b khác tính chẵn lẻ thì $a^2+b^2=4k+1$.

Vậy ta hoàn tất việc chứng minh.

67. **(United Kingdom MO 1998).** Cho x,y,z là các số nguyên dương sao cho $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Kí hiệu h là ước chung lớn nhất của x,y,z. Chứng minh rằng $hxyz$ và $h(y-x)$ là các số chính phương.

Lời giải

Đặt $x=ha, y=hb, z=hc$. Thế thì a,b,c là các số nguyên dương sao cho $gcd(a,b,c)=1$. Đặt $gcd(a,b)=g$.

Vì vậy $a=ga', b=gb'$ và a',b' là các số nguyên dương sao cho $gcd(a',b')=gcd(a'-b',b')=gcd(a',a'-b')=1$.

Ta có $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\Leftrightarrow c(b-a)=ab\Leftrightarrow c(b'-a')=a'b'g$.

Vì vậy, $g\,|\,c$ và $gcd(a,b,c)=g=1$.

Do đó $gcd(a,b)=1$ và $\gcd(b-a,ab)=1$

Như vậy, $b-a=1$ và $c=ab$.

Bây giờ $hxyz=h^4abc=(h^2ab)^2$ và $h(y-x)=h^2$

Vậy $hxyz$ và $h(y-x)$ là các số chính phương.

68. **(Czech-Polish_Slovak Mathematical Compettion 2002).** Cho n,p là các số nguyên sao cho $n>1$ và p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu $n\,|\,p-1$ và $p\,|\,n^3-1$ thì $4p-3$ là một số chính phương.

Lời giải

Từ $n\,|\,p-1$, suy ra $p-1\ge n$ và $p>n$.

Bởi vì $p\,|\,n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$

Khi đó $p\,|\,n^2+n+1$ hay $pk=n^2+n+1$ với mọi số nguyên dương k.

Mặt khác, $n \mid p-1 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod n$ và $pk \equiv k \pmod n$

Ta có $n^2+n+1 \equiv k \pmod n$, do đó $k \equiv 1 \pmod n$

Suy ra $p = an+1, k = bn+1$ với mọi số nguyên $a > 0, b \geq 0$

Ta có thể viết:

$(an+1)(bn+1) = n^2+n+1 \Leftrightarrow abn^2+(a+b)n+1 = n^2+n+1$
$\Leftrightarrow abn+(a+b) = n+1$

Nếu $b \geq 1$ thì $abn+(a+b) \geq n+2 > n+1$

Vì vậy $b = 0, k = 1, p = n^2+n+1$

Vậy $4p-3 = 4n^2+4n+4-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$ là số chính phương.

CHUYÊN ĐỀ 22: BÀI TẬP VỀ SỐ LẬP PHƯƠNG ĐÚNG (PERFECT CUBES)

Số nguyên a được gọi là lập phương đúng nếu nó là lập phương của một số nguyên, tức là $a = b^3$ với b là số nguyên.

1. a) Chứng minh rằng nếu n là một số lập phương đúng thì n^2+3n+3 không thể là một số lập phương đúng.

b) Cho m là một số nguyên dương. Tìm một số nguyên dương n sao cho $m+n+1$ là một số chính phương và $mn+1$ là một số lập phương đúng.

Lời giải

a) Giả sử ngược lại n^2+3n+3 là một số lập phương đúng. Do đó $n(n^2+3n+3)$ cũng là một lập phương đúng. Để ý rằng: $n(n^2+3n+3) = n^3+3n^2+3n = (n+1)^3-1$ không phải là một lập phương đúng. Điều này mâu thuẫn. Vậy ta hoàn tất chứng minh.

b) Chọn $n = m^2+3m+3$

Ta có $m+n+1 = m^2+4m+4 = (m+2)^2$

Và $mn+1 = m^3+3m^2+3m+1 = (m+1)^3$

2. Cho x, y là các số nguyên sao cho $A = \dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ là số nguyên. Chứng minh rằng A là một số lập phương đúng.

Lời giải

Giả sử $x, y > 0$. Cố định A, chọn cặp x, y sao cho $x+y$ nhỏ nhất và $x \geq y$. Coi $x^2+y^2+6-Axy = 0$ là phương trình bậc hai đối với x và gọi x' là nghiệm còn lại. Ta có

$x+x'=Ay,\ x'x=y^2+6$ nên $x'\in\mathbb{Z}$ và $x'>0$. Do cách chọn các cặp x,y nên $x'\geq x$ và $x^2\leq y^2+6$.

Suy ra $x^2-y^2\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$

Nếu $x=y$ thì do A là số nguyên nên $x^2\mid 6$ hay $x=1$. Khi đó $A=8$ là lập phương đúng.

Nếu $x>y$ thì bằng cách giải trực tiếp phương trình nghiệm nguyên ta suy ra không tồn tại x,y.

3. Cho dãy số vô hạn $\{u_n\}$ xác định như sau: $u_n=3\left(n^2+n\right)+7, n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng không có phần tử nào của dãy là lập phương của một số nguyên.

Lời giải

Giả sử tồn tại n để $u_n=a^3, a\in\mathbb{N}^*$.

Ta có: $3\left(n^2+n\right)+7=a^3.$ (1)

Vì $3\left(n^2+n\right)=3n(n+1)$ là một số chẵn nên a^3 số lẻ, suy ra là a số lẻ, nghĩa là $a=2k+1$ với $k\in\mathbb{N}^*$

Thay $a=2k+1$ vào (*) ta thu được: $3\left(n^2+n+2\right)=8k^3+12k^2+6k.$ (2)

Vì $3\left(n^2+n+2\right)\vdots 3$ nên $\left(8k^3+12k^2+6k\right)\vdots 3$

Mà $\left(12k^2+6k\right)\vdots 3\Rightarrow 8k^3\vdots 3\Rightarrow k^3\vdots 3\Rightarrow k\vdots 3$ suy ra $k=3l, l\in\mathbb{N}.$

Thay vào (2) ta được: $3\left(n^2+n+2\right)=8.27l^3+129l^2+6.3l$

Hay $n^2+n+2=6\left(12l^3+6l^2+l\right).$

Rõ ràng vế phải của (3) chia hết cho 6. Ta kiểm tra và thấy rằng vế phải không hết cho 3. Điều này vô lí. Vậy không có phần tử nào của dãy số là lập phương của một số nguyên.

4. **(Iran National Olympiad Second Round 2008).** Cho a là một số tự nhiên. Biết rằng với mọi số tự nhiên n thì $4\left(a^n+1\right)$ là một lập phương đúng. Chứng minh $a=1$.

Lời giải

Ta có $4\left(a^3+1\right), 4\left(a^9+1\right)$ là lập phương đúng.

Để ý rằng $4\left(a^9+1\right)=4\left(a^3+1\right)\left(a^6-a^3+1\right).$

Suy ra a^6-a^3+1 là một lập phương đúng.

Đặt $a^6-a^3+1=t^3$ với $t\in\mathbb{N}.$

Chú ý nếu mà $a>1$ thì $\left(a^2-1\right)^3<a^6-a^3+1<\left(a^2\right)^3$, mâu thuẫn với a^6-a^3+1 là một lập phương đúng. Như vậy $a=1$.

5. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n sao cho $2^{n+1}-1$ và $2^{n-1}\left(2^n-1\right)$ đồng thời là lập phương của các số nguyên.

Lời giải

Giả sử ngược lại, tồn tại n sao cho $2^{n+1}-1$ và $2^{n-1}\left(2^n-1\right)$ đều là lập phương của các số nguyên. Khi đó $2^{n-1}\left(2^n-1\right)=k^3$.

Mà 2^n-1 không chia hết cho 2 nên 2^{n-1} cũng phải là lập phương của một số nguyên hay $n-1=3m$.

Từ đó suy ra $a^3=2^{n+1}-1=2^{3n+2}-1=4.8^m-1\equiv 3\pmod 7$, vô lí vì $a^3\equiv 0;\pm 1\pmod 7$.

Vậy ta hoàn tất việc chứng minh.

6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên âm n thì $A=2^n+3^n+5^n+6^n$ không thể là lập phương của một số nguyên.

Lời giải

Ta có $2^6\equiv 3^6\equiv 5^6\equiv 6^6\pmod 7$.

- Nếu $n=6k$ thì $A\equiv 4\pmod 7$, do đó $A\neq m^3$.
- Nếu $n=6k+1$ thì $A=2.\left(2^6\right)^k+3.\left(3^6\right)^k+5.\left(5^6\right)^k+6.\left(6^6\right)^k=2+3+5+6\equiv 2\pmod 7$, do đó $A\neq m^3$.
- Nếu $n=6k+2$ thì $A=2^2+3^2+5^2+6^2\equiv 4\pmod 7$, do đó $A\neq m^3$.
- Nếu $n=6k+3$ thì $A=2^3+3^3+5^3+6^3\equiv 5\pmod 7$, do đó $A\neq m^3$.
- Nếu $n=6k+4$ thì $A=2^4+3^4+5^4+6^4\equiv 2\pmod 7$, do đó $A\neq m^3$.
- Nếu $n=6k+5$ thì $A=2^5+3^5+5^5+6^5\equiv 4\pmod 7$, do đó $A\neq m^3$.

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

7. **(Iran MO 1998).** Chứng minh rằng không có số tự nhiên nào có dạng $\overline{abab}$ trong hệ cơ số 10 là lập phương của một số nguyên. Hãy tìm cơ số b nhỏ nhất sao cho trong hệ cơ số b có ít nhất một số có dạng $\overline{abab}$ là lập phương của một số nguyên.

Lời giải

Ta có $\overline{abab}=101\overline{ab}$ là lập phương của một số nguyên thì $101\,|\,\overline{ab}$ (vô lí).

Do đó $\overline{abab}$ không thể là lập phương của một số nguyên.

Xét trong hệ cơ số b ta có $\overline{abab}_{(n)} = \left(n^2+1\right)\overline{ab}_{(n)} = \left(n^2+1\right)(an+b)$ với $a,b<n$ và $n^2+1>an+b.$

Nếu n^2+1 không chia hết cho một số chính phương thì:

$n^2+1=p_1p_2...p_k.$

Khi đó $an+b$ phải chia hết cho $\left(p_1p_2...p_k\right)^2$ vô lí. Do đó n^2+1 phải chia hết cho một số chính phương.

Thử trực tiếp thấy $n=7$ là số nhỏ nhất, như vậy $n^2+1=50.$

Mặt khác $\overline{2626}_{(7)}=1000=10^3.$ Do đó $n=7$ là số cần tìm.

8. **(Balkan MO 2005).** Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2-p+1 là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Đặt $p^2-p+1=a^3$ với $a\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $p(p-1)=(a-1)\left(a^2+a+1\right).$ (1)

Nếu $p\,|\,a-1$ thì $a=pk+1$ với $k\in\mathbb{N}.$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow p^2-p+1=p^3k^3+3p^2k^2+3pk+1$. Với $k\ge 2$ thì $VT(1)<VP(1),$ do đó $0\le k\le 1$

*Với $k=0$ thì $p^2-p+1=1\Leftrightarrow p(p-1)=0$, mâu thuẫn.

*Với $k=1$ thì $p^3-2p^2+4p=0\Leftrightarrow p^2-2p+4=0\Leftrightarrow (p-1)^2+3=0$, mâu thuẫn.

Do đó $p\,|\,a-1$, cho nên $p\,|\,a^2+a+1.$ (2)

Lại có $a-1\,|\,p(p-1)$ mà $\gcd(p,a-1)=1$ nên $a-1\,|\,p-1.$

Đặt $p=(a-1)b+1$ với $b\in\mathbb{N}.$ Khi đó từ (2) suy ra $\dfrac{a^2+a+1}{(a-1)b+1}$ là số nguyên dương.

Điều này tương đương với $\dfrac{a^2b+ab+b}{ab-b+1}=a+2+\dfrac{3b-2-a}{ab-b+1}$ nguyên dương. (3)

Do đó ta phải có $|3b-2-a|\ge ab-b+1.$

Trường hợp 1: Nếu $2b-2-a\ge ab-b+1\Leftrightarrow b(4-a)\ge a+3.$

Nếu $a\ge 4$ thì $b(4-a)<a+3$, mâu thuẫn. Do đó $2\le a\le 3.$ Nếu $a=3$ thì phương trình tương đương với $p(p-1)=26$, mâu thuẫn. Nếu $a=2$ thì phương trình đầu tương đương với $p(p-1)=7,$ mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Nếu $2+a-3b\ge ab-b+1\Leftrightarrow b(2+a)\le a+1$, mâu thuẫn vì $a+1>a+2$

Trường hợp 3: Nếu $2b-2-a=0\Leftrightarrow a=3b-2$. Khi đó $p=3b(b-1)+1$ và

$a^2-a+1=(3b-2)^2+(3b-2)+1=9b^2-9b+3$. Do đó $\dfrac{a^2+a+1}{p}=3$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow p-1=3(a-1)\Leftrightarrow (b-1)(b-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=3 \end{array}\right.$

*Nếu $b=1$ thì $p=a$, mâu thuẫn vì khi đó $p^2+p+1=p^3\Leftrightarrow p(p^2-p-1)=1$.

*Nếu $b=3$ thì $p=3a-2$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 9a^2-15a+7=a^3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=7 \end{array}\right.$

Thử lại thấy $a=7$ thỏa mãn. Khi đó $p=19$.

Vậy $p=19$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

9. Chứng minh rằng mọi số nguyên đều là tổng của 5 số lập phương đúng.

Lời giải

Với mọi số nguyên n, ta có $6n=(n+1)^3+(n-1)^3+(-n)^3+(-n)^3$.

Với m là số nguyên tùy ý, ta chọn số nguyên v sao cho $v\equiv m(\bmod 6)$ với mọi số nguyên n.

Khi đó $m-v^3=6n$ với mọi số nguyên n.

Khi đó $m-v^3=(n+1)^3+(n-1)^3+(-n)^3+(-n)^3$

$\Leftrightarrow m=v^3+(n+1)^3+(n-1)^3+(-n)^3+(-n)^3$.

Vậy mọi số nguyên đều là tổng của 5 số lập phương đúng.

10. Chứng minh rằng mọi số hữu tỉ có thể viết dưới dạng tổng của 3 số lập phương đúng.

Lời giải

Giả sử n là một số hữ tỉ. Chúng ta sẽ tìm một mối quan hệ dạng: