|  |  |
| --- | --- |
|  | **Giải chi tiết đề HỌC SINH GIỎI thPT CẤP TỈNH**  **SỞ GDĐT NINH BÌNH**  **Năm học 2018 – 2019**  **MÔN TOÁN**  **ngày THI 12/09/ 2018**  **Time: 180 PHÚT** |

**ĐỀ BÀI**

**Câu 1 (4,0 điểm) .**

Cho đa thức có hệ số nguyên  là các số nguyên thỏa mãn  và . Chứng minh rằng: .

**Câu 2 (5,0 điểm).**

Cho ba số thực dương  . Chứng minh bất đẳng thức:

.

**Câu 3.** **(6,0 điểm).**

Cho tứ giác lồi  nội tiếp trong đường tròn, đường tròn tâm  tiếp xúc với các tia,  lần lượt tại  và , đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn  tại điểm . Hai tiếp tuyến tại  và  của đường tròn  cắt nhau tại . Các đường thẳng ,  lần lượt cắt đường tròn  thứ tự tại các điểm  ( khác ).

a) Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng.

b) Đường phân giác của góc  cắt đường thẳng  tại , đường thẳng  cắt đường thẳng  tại . Chứng minh rằng: Nếu  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  thì bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác  và  bằng nhau.

**Câu 4 (5,0 điểm).**

Với số  nguyên dương, đặt là các ước nguyên dương của. Xét tập hợpvà gọi  là số nguyên tố thứ 

Chứng minh rằng: Nếu thuộc và là ước nguyên tố của thì là ước của .

Với số nguyên tố , gọi là các số nguyên dương thỏa mãn và. Chứng minh rằng: Nếuvà thuộc thì chia hết cho.

**HẾT.**

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

**Câu 1 (4,0 điểm) .**

Cho đa thức có hệ số nguyên  là các số nguyên thỏa mãn  và . Chứng minh rằng: .

**Lời giải**

***Tác giả: Trần Dung ; Fb: Trần Dung***

**Cách 1:**

Đa thức có nghiệm có thể viết dưới dạng .

Vì  nên ta có với .

Ta có:  thay vào  ta được

Vì  là những số nguyên nên  và  là ước của 1.

Ta có  Suy ra:  hoặc 



**Cách 2:**

Bổ đề: Cho là đa thức với hệ số nguyên;  là hai số nguyên khác nhau. Khi đó: .

Trở lại bài toán.

Ta có:  nên  .

Khi đó: 

Như vậy:  và  là ước của .. .

Suy ra:  hoặc 

**Câu 2 (4,0 điểm).**

Cho ba số thực dương  . Chứng minh bất đẳng thức:

.

**Lời giải**

Ta có 



Không giảm tổng quát giả sử 

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:





Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  .

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM: 

Suy ra 

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  hoặc 

 ( vì  )

Từ  suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi  hoặc  và các hoán vị.

**Câu 3 (4,0 điểm).**

Cho tứ giác lồi  nội tiếp trong đường tròn, đường tròn tâm  tiếp xúc với các tia,  lần lượt tại  và , đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn  tại điểm . Hai tiếp tuyến tại  và  của đường tròn  cắt nhau tại . Các đường thẳng ,  lần lượt cắt đường tròn  thứ tự tại các điểm  ( khác ).

a) Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng.

b) Đường phân giác của góc  cắt đường thẳng  tại , đường thẳng  cắt đường thẳng  tại . Chứng minh rằng: Nếu  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  thì bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác  và  bằng nhau.

**Lời giải**

***Tác giả: Võ Thanh Phong; Fb: Võ thanh Phong***

Phép vị tự tâm , tỉ số  biến đường tròn  thành đường tròn .

Khi đó vì  thẳng hàng và nên *.*

Do  thẳng hàng và .

Gọi  là giao điểm của  và  suy ra .

Tiếp tuyến tại  của  và  đồng qui tại  là tứ giác điều hòa.

Phép vị tự tâm , tỉ số  biến tứ giác  thành  nên  là tứ giác điều hòa.

Suy ra  thẳng hàng.

Từ  nên  là điểm chính giữa cung  của  .

Tương tự:  là điểm chính giữa cung  của .

Phân giác góc  cắt  tại , mà  là phân giác góc  nên  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

Ngoài ra,  thuộc  là phân giác góc  và  nên  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD .

Gọi  là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác  và .

Do  thẳng hàng nên theo định lý Menelaus cho tam giác  với cát tuyến  ta có: .

Tam giác .

Mặt khác: .

Suy ra  .

Suy ra . Ta có điều phải chứng minh.

**Câu 4: (5,0 điểm)**

Với số  nguyên dương, đặt là các ước nguyên dương của. Xét tập hợpvà gọi  là số nguyên tố thứ 

Chứng minh rằng: Nếu thuộc và là ước nguyên tố của thì là ước của .

Với số nguyên tố , gọi là các số nguyên dương thỏa mãn và. Chứng minh rằng: Nếuvà thuộc thì chia hết cho.

**Lời giải**

***Tác giả:***

**3 điểm**

Giả sử 

Giả sử  chia hết cho , tồn tại  thỏa mãn  mà không chia hết cho 

Suy ra 

Xét  ta có:

 và 

Do nên mâu thuẫn.

Vậychia hết chovới mọi 

**2 điểm**

Xét và.

Giả sử không chia hết cho  thì mọi ước của  đều thuộc tập 

( Thật vậy, giả sử  có ước  thì theo ý (a)  chia hết cho  Mâu thuẫn.)

Suy ra : 

Vì  nên tồn tại:  sao cho 

Đặt  và  . Do  suy ra .





Vì  Mâu thuẫn.

Vậy có điều cần chứng minh.

**HẾT.**