**Câu 16:** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O.M, N là trung điểm SA, SD.

a). Xác định giao điểm của NC và



b). Xác định thiết diện của hình chóp với qua MO và .



**LỜI GIẢI**



a) Có



Trong mp(SCD) gọi , có



.



b)

**Trường hợp 1:**

Gọi , có .



Trong m(SCD) gọi J, K lần lượt là giao điểm của d với CD và SD (1).

Trong mp(ABCD) gọi L là giao điểm của OJ và AB (2).

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là từ giác MKJL.



**Trường hợp 2:**

Gọi , có



.



Trong m(SBC) gọi J, K lần lượt là giao điểm của d với BC và SB (1).

Trong mp(ABCD) gọi L là giao điểm của OJ và AD (2).

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là từ giác MKJL.

**Câu 17:** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a; SAD là tam giác vuông cân tại A; M là một điểm trên SC; là qua M và song song với SA và BC cắt các cạnh lần lượt tại .



a) Hình MNPQ là hình gì? Tính diện tích MNPQ trong trường hợp SAC là tam giác vuông tại



b)



c) Gọi . Tìm tập hợp các điểm I khi M di động SC.



**LỜI GIẢI**



Có (1).



Có (2).



Có (3).



Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác MNPQ là hình thang, vì có .



Ngoài ra có



Từ và suy ra MNPQ là hình thang vuông tại N và P.



Vì vuông tại A nên có .



Trong có và



.



Trong có .



Vì ABCD là hình vuông và .



Vậy



b) Có , ngoài ra (Theo định lý đảo Ta lét).



Mà .



c) Có .



Có , có . Hay . Suy ra I chạy trên tia Sx cố định khi M di động trên SC.



**Câu 18:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, , biết hai tam giác SAB và SCD đều. Điểm M thuộc cạnh SA và . Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N.



a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD); (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh tứ giác BMNC là hình thang cân.

c) Tính diện tích tứ giác BMNC theo a và x.

**LỜI GIẢI**



a) Có S, O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). Do đó:



Có



b) Có .



Trong (SAD) gọi .



Từ đó suy ra BCNM là hình thang (với ).



Có .



Xét tam giác SBM và tam giác SCN có:



Tứ giác BMNC có là hình thang cân.



c) Áp dụng định lý cosin vào ta có:



Dựng tại H. Ta có .



Diện tích tứ giác BMNC là:



**Câu 19:** Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Gọi S là một điểm ở ngoài mặt phẳng (ABCD) sao cho SB = SD. Gọi M là điểm tùy ý trên AO với AM = x. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD cắt SO , SB , AB tại N, P , Q .

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Cho SA = a. Tính diện tích MNPQ theo a và x. Tính x để diện tích lớn nhất.

**LỜI GIẢI**



a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

Ta có: SB = SD ⇒



Gọi I là trung điểm SC thì



.



Vậy ΔIBD cân tại I ⇒ IO ⊥ BD.

Mà OI // SA ⇒ SA ⊥ BD (\*)

Ta có: (1)



Tương tự: (2)



Từ (1) và (2), suy ra (3)



Ta có: (4)



Tương tự : (5)



Từ (4) và (5), suy ra (6)



Từ (3), (6) và (\*), suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích MNPQ theo a và x:

Ta có: .



Tính MQ: Xét tam giác AQM:

Ta có: cân tại M. Vậy MQ = AM = x.



Tính MQ: Xét tam giác SAO:

Ta có: MN // SA ⇒



⇒ .



Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương và ():



Đẳng thức xảy ra khi



⇔ M là trung điểm AO

Vậy: thì đạt giá trị lớn nhất.



**Câu 20:** Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Trên cạnh AB lấy một điểm M với AM = x. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) cắt SB, SC, và CD lần lượt tại N, P, Q.

a) Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp. Thiết diện là hình gì?

b) Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.

c) Cho và SA = a. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.



Tìm x để diện tích của thiết diện bằng .



**LỜI GIẢI**

a) Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp:



Vì mp ⇒ // với mọi đường thuộc mặt phẳng (SAD).



• Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ABCD).

Có M là điểm chung của hai mặt phẳng và mp (ABCD), vì , nên giao tuyến của chúng qua M và song song với AD, giao tuyến này cắt CD tại điểm Q.



Tương tự:

Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAB) có M là điểm chung và , nên giao tuyến của chúng là MN với MN // SA và .



Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SBC) có N là điểm chung và , nên giao tuyến của chúng là NP với NP // BC và (2)



Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SCD) có 2 là điểm chung là P, Q.



Vậy: giao tuyến của chúng là PQ.

Suy ra: thiết diện cần tìm là MNPQ.

Từ (1) và (2) thì . Vậy là hình thang.



b) Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB:

Ta có:



Mà: Vậy I ∈ Sx.



Giới hạn quĩ tích : Khi thì . Còn khi thì



c) Tính diện tích của thiết diện theo a và x:

Ta có:(Vì ΔIMQ = Δ SAD (c.g.c))



Tính : Ta có Δ SAD vuông cân tại A, do đó:.



Tính : Xét tam giác SBC, tam giác SBS0 và tam giác SAB có:



(1)



(2)



(3)



Từ (1), (2) và (3), ta được: .



⇒ Δ INP vuông cân tại N, vì NI // SA, PN // AD và



Do đó: .



Vậy: diện tích thiết diện:



Để ⇒ ⇔



⇔ ⇔ .



**Câu 21:** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và tam giác SCD.

c) Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Hãy chứng minh 3 điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số .



LỜI GIẢI



a) Gọi .



Gọi



.



Gọi .



Suy ra: E, F cũng là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (P).

Vậy: Thiết diện cần tìm là tứ giác AEMF.

b) Để ý ta có: I là trọng tâm của tam giác SAC nên: .



Xét tam giác SBD có EF song song với BD ta có: .



;



c)(1)



(2)



(3)



Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm K, J, K thuộc giao tuyến của mp (P) và mp (ABCD).



Ta có: .



Xét tam giác MJK có: :



. Vậy .



**Câu 22:** Cho hình chóp S.ABCD có G là trọng tâm Δ ABC. Gọi M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG.

a) Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và SG = 2MH = 4RG.

b) G' là trọng tâm Δ SBC. Chứng minh rằng GG' // (SAB), GG' // (SAC).

c) Mặt phẳng (α) qua GG' và song song BC. Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α).

**LỜI GIẢI**

a) Chứng minh rằng: S , R , G thẳng hàng và SG = 2MH = 4RG.



Gọi E trung điểm của GC .

Trong có RG là đường trung bình của tam giác nên có:



(1)



Trong có: NE là đường trung bình của tam giác nên có:



(2)



Từ (1) và (2) suy ra ba điểm G, R, S thẳng hàng và GS = 4GR.

Trong có HM là đường trung bình của tam giác nên có .



b) Chứng minh rằng: GG' // (SAB); GG' // (SAC).

Trong tam giác SAP có: .



Hai mặt (SAB) và (SAC) cùng chứa SA.

Suy ra GG' // (SAB), GG' // (SAC).

c) Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α)

Vì , nên cắt mặt phẳng đáy (ABCD) theo giao tuyến qua G và song song với BC. Giao tuyến này cắt AB tại F, cắt AD tại L.



Vì GG' // SA nên cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến qua F và song song với SA. Giao tuyến này cắt SB tại T.



Vì GG' // SA nên cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến qua F và song song với SA. Giao tuyến này cắt SB tại T.



TG' là giao tuyến của mặt phẳng với mặt phẳng (SBC), giao tuyến này cắt SC tại S.



Thiết diện cần tìm là ngũ giác FLKST .

**BÀI 3**

**HAI MAËT PHAÚNG SONG SONG**

**Định lí 1:**

Nếu mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng thì song song với .



*Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song:*

*Ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.*

**Định lí 2:**



Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

*Hệ quả*:

Nếu đường thẳng song song với mặt phẳng thì trong có một đường thẳng song song với và qua có duy nhất một mặt phẳng song song với .



*Phương pháp chứng minh đường thẳng d song song với* : Ta phải chứng minh d thuộc và // .



*Hệ quả 2*:



Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

*Hệ quả 3*:

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với .



**Định lí 3:**

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

*Hệ quả*:



Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



**Định lí Ta-lét:**

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

**Hình lăng trụ và hình hộp.**



Cho hai mặt phẳng song song và . Trên cho đa giác lồi .



Qua các đỉnh ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt lần lượt tại .



Hình gồm hai đa giác , và các hình bình hành , được gọi là hình lăng trụ và được kí hiệu là .



Hai đa giác và được gọi là hai mặt đáy của hình lăng trụ.



Các đoạn thẳng được gọi là các cạnh bên của hình lăng trụ.



Các hình bình hành được gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.



Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.

***Nhận xét:***

Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

Các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành.

Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy.



**Hình chóp cụt**

Cho hình chóp , một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh lần lượt tại . Hình tạo bởi thiết diện và đáy của hình chóp cùng với các tứ giác gọi là hình chóp cụt.



Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.



Các tứ giác gọi là các mặt bên của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng gọi là các cạnh bên của hình chóp cụt.



Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác …, ta có hình chóp cụt tam giác,

hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác.

Vì hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp nên ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của hình chóp cụt.

**Tính chất:**

Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.



Các mặt bên là những hình thang.



Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.



**DẠNG 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song, đường song song với mặt**

**Câu 1:** Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

a) Chứng minh rằng : .



b) Gọi P, Q , R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chứng minh : PQ (SBC), (MOR) (SCD)



**LỜI GIẢI**



**a) Chứng minh (OMN)(SBC):**



Trong hai tam giác SAC và SDB có

OM SC và ON SB (đường trung bình của tam giác)



Có .



**b) Chứng minh : PQ (SBC)**



Có OP AD mà AD MN suy ra OP MN . Suy ra



Vì



**Chứng minh : (MOR)(SCD)**



Ta có MRAB mà ABCD , suy ra MRCD . Và có OMSC



Vì và . Từ đó suy ra



**Câu 2:** Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng. I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF. Chứng minh:

a) (ADF)(BCE) b (DIK)(JBE)



**LỜI GIẢI**

**a) mp(ADF)mp(BCE):**



Ta có AFBE và ADBC. Mà



và . Từ đó suy ra



**b) mp (DIK)mp(JBE)**



Dễ dàng chứng minh hai tứ giác BIDJ và BIKE là hình bình hành. Từ đó suy ra DIBJ và



IK BE . Suy ra mp (DIK)mp(JBE).



**Câu 3:** Cho các hình bình hành ABCD , ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự lấy các điểm M,N sao cho MC = 2AM , NF = 2BN . Qua M , N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng :



a) b) c)



**LỜI GIẢI**



**a) Chứng minh** : Gọi I trung điểm của AB .



Ta có

.



Ngoài ra AM là đường trung tuyến của tam giác ABD từ đó suy ra M trọng tâm của tam giác ABD. Chứng minh hoàn toàn tương tự N là trọng tâm của tam giác EAB. Suy ra ba đường thẳng DM , EN , AB đồng qui tại điểm I

Trong , theo tính chất trọng tâm có .



**b) Chứng minh :**



Ta có : (3) .



Tương tự có (4)



Từ (3) và (4) suy ra .



Vì



**c) Chứng minh :**



Có và , mà và .



Từ đó suy ra .



**Câu 4:** Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC và I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE . Chứng minh (IJK)(CDFE)



**LỜI GIẢI**

Xét tam giác MFC ta có :



( tính chất trọng tâm )



⇒ (1)



Xét hình bình hành MNEF có :

(2)



Từ (1) và (2) ta được



Kết luận .



**Câu 5:** Từ bốn đỉnh của hình bình hành ABCD vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều ,,,. Sao cho chúng cắt mặt phẳng ABCD. Một mặt phẳng cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại A' , B' , C' , D'.



a) Chứng minh và



b) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

c) Chứng minh



**LỜI GIẢI**

**a) Chứng minh và**



Có , và



Từ (1) và (2) và



Chứng minh tương tự suy ra .



**b) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?**

Có , và



Từ (1) và (2) suy ra tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

**c)** Gọi . Vì O , O' là tâm của hai bình bình hành ABCD và A'B'C'D' , nên có OO' là đường trung bình của hai hình thang ACC'A' và BDD'B', theo tính chất đường trung bình của hình thang suy ra :



.



**Câu 6:** Cho hình chóp S.ABCD, mp(P) cắt các cạnh SA , SB , SC , SD lần lượt tại A', B', C', D'. Tìm điều kiện của mặt phẳng (P) để A'B'C'D' là hình bình hành.

**LỜI GIẢI**



+ A'B'C'D' là hình bình hành

.



Trong mp(ABCD) gọi và



Ta có và .



+ Ta có:

(Định lí về giao tuyến của 3 mặt phẳng).



+ Tương tự, SF(P).



Vậy nếu (P)SE và (P)SF thì A'B'C'D' là hình bình hành.



**Câu 7:** Cho tứ diện ABCD có AB = CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD, E là điểm thuộc AD khác Avà D. Tìm vị trí của E để thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mp(JEI) là hình thoi.

**LỜI GIẢI**



- Có IJ là đường trung bình của tam giác BCD. Do đó, IJCD CDmp(IJEF)(do CD, EF đồng phẳng). Do đó, thiết diện IJEF là hình thang.



Để thiết diện là hình thoi thì E là trung điểm của AD.



Ngược lại, khi E là trung điểm của AD thì



IJEF là hình thoi.



**Câu 8:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt các đoạn SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song với mp(ABCD).

**LỜI GIẢI**



- Giả sử mp(P)mp(ABCD) . Khi đó mp(P) và (ABCD) bị mp(SAB) cắt theo hai giao tuyến A'B' và AB song song. Tương tự, C'D'CD , B'C'BC , A'D'AD.



A'B'C'D' và A'D'B'C' A'B'C'D' là hình bình hành.



- Giả sử A'B'C'D' là hình bình hành :

+ Ta có: .



+ Mặt khác: .



Do đó, A'B' AB A'B'(ABCD). (1)



+ Tương tự A'D'(ABCD). (2)



Từ (1) , (2) suy ra mp(P)mp(ABCD).



**Câu 9:** Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M’ và N’. Chứng minh rằng:

a) mp(ADF)mp(BCE) b) mp(DEF)mp(MM’N’N).



**LỜI GIẢI**



a) Ta có: AFBE , BE ⊂ (BCE) và AD BC ,



BC⊂ (BCE)

⇒ AF và AD cùng song song với mp(BCE) , mà AF, AD ⊂ (ADF) .

Vậy : (ADF)(BCE).



b) Ta có: mà ⇒ ⊂ (DEF) (\*)



Mặt khác :,



Mà AM = BN, AC = BF



Từ (1), (2) và (3) (\*\*)



Mà MM', M'N' ⊂ (MM'N'N) (\*\*\*) .

Từ (\*), (\*\*), (\*\*\*) ⇒ (DEF)(MM'N'N).



**DẠNG 2: THIẾT DIỆN CỦA HÌNH CHÓP VỚI MẶT PHẲNG , BIẾT  SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG THUỘC KHỐI CHÓP.**

PHƯƠNG PHÁP:

Vì  song song với mặt phẳng, suy ra  song song với mọi đường thuộc mặt phẳng đã biết.

Sau đó tìm giao tuyến của  với các mặt của khối chóp. Dựa vào tính chất:

.

**Câu 1:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, O là giao điểm hai đường chéo,  tam giác SBD đều.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và  .

b) Gọi  lần lượt là trọng tâm của các tam giác . Chứng minh  song song với mặt phẳng .

c) Gọi M là điểm di động trên đoạn AO với (vớiGọi là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng . Tìm thiết diện tạo bởi và hình chóp S.ABCD.

d) Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu c) theo . Tìm x để diện tích này đạt giá trị lớn nhất.

**LỜI GIẢI**



a) Có 

.

b) Gọi E trung điể của CD.Xét trong , theo tính chất trọng tâm có:

(Tính chất Talét) , mà .

c) Do có 

 Có  giao tuyến của  và (ABCD) qua M và song song với BD. Giao tuyến này cắt AB, AD lần lượt tại H và K.

 Có  giao tuyến của  và (SAB) qua K và song song với BD. Giao tuyến này cắt SA tại L.

 Có 

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác HKL.

Trong  có 

.

Trong  có .

Tương tự .

Từ đó suy ra tam giác HKL đều.

d) Vì HKL là tam giác đều nên . Để diện tích này lớn nhất khi x lớn nhất .

**Câu 2:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, 

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và  .

b) Gọi M là điểm di động trên cạnh AB với . Gọi  là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng . Tìm thiết diện tạo bởi và hình chóp S.ABCD.

c) Cho tam giác SAD vuông cân tại A. Tính diện tích của thiết diện tìm được ở câu b) theo a và x.



**LỜI GIẢI**

a) Vì 

Do  giao tuyến của mpvới mp(ABCD) qua M và song song với AD, giao tuyến này cắt CD tại N.

Do  giao tuyến của mpvới mp(SCD) qua N và song song với SD, giao tuyến này cắt SC tại P.

Do  giao tuyến của mpvới mp(SAB) qua M và song song với SA, giao tuyến này cắt SB tại Q.

Ngoài ra có .

Suy ra thiết diện cần tìm là hình thang MNPQ, do .

b) Do 

Trong  có 

 và .

Trong có 

Vì ADNM là hình bình hành nên .

Diện tích hình thang MNPQ:

.

**Câu 1:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm bất kỳ trên trên AA' và BC. Tìm giao điểm của B'C' với mặt phẳng (AA'N) và giao điểm của MN với (AB'C').

**LỜI GIẢI**

C' là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Trong mặt phẳng (ABB'A') gọi G là giao điểm của AB' và BA'.



Suy ra G là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Kết luận .



Chọn mặt phẳng (BCC'B') chứa B'C'.

Ta có:



.



Gọi .



Chọn mặt phẳng (ANJA') chứa MN.

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ANJA') và (AB'C').

Ta có (1)



Và (2)



Từ (1) và (2) suy ra .



Trong mp(ANJA') gọi .



**Câu 2:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', AD, DC. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, P với hình lập phương.

LỜI GIẢI



Trong mặt phẳng đáy ABCD gọi I và L là giao điểm của đường thẳng NP với AB và BC.

MI là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABB'A'). MI cắt A'B' tại điểm K.

K là điểm chung của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (A'B'C'D') và có NP // AC // A'C', nên giao tuyến của chúng qua K và song song với A'C', giao tuyến này cắt B'C' tại điểm O.

O và L là hai điểm chung của (MNP) và (BCC'B') nên , giao tuyến OL cắt CC' tại H.



Kết luận thiết diện của hình lập phương khi bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là lục giác MNPHOK, có các cặp cạnh đối song song.

**Câu 3:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DC, AD, BB'. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình hộp và giao tuyến của (MNP) với mặt phẳng (A'B'C'D').

**LỜI GIẢI**

Trong mặt phẳng đáy ABCD gọi F và E là giao điểm của đường thẳng MN với AB và BC.

PF là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với (ABB'A').

Gọi H là giao điểm của AA' và PF.

PE là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với (BCC'B').

Gọi K là giao điểm của CC' và PE.

Kết luận thiết diện của hình lập phương khi bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác MNHPK.



Trong mp (ABB'A'),

gọi:.



Trong mp (BCC'B'), gọi:

.



L và I là hai điểm chung của hai mp (MNP) và (A'B'C'D').

Nên .



|  |
| --- |
| **Câu 4:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của BB', G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm thiết diện tạo bởi (A'MG) cắt hình lăng trụ ABC.A'B'C', và giao tuyến của mặt phẳng (A'MG) với (A'B'C'). |

**LỜI GIẢI**



Trong mặt phẳng (ABB'A') gọi .



Ta có I và G là hai điểm chung của (ABC) và (A'MG).

Vậy .



Trong mặt phẳng đáy (ABC) gọi E, F lần lượt là giao điểm của IG với BC và AC. Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là A'FEM .

Trong mặt phẳng (BCC'B'), gọi:

.



Suy ra A' và H là hai điểm chung của (A'MG) với (A'B'C').

Kết luận .



|  |
| --- |
| **Câu 5:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) song song với (AB'D') và đi qua M cắt hình hộp. |

**LỜI GIẢI**



Vì mặt phẳng (P) song song với mp(AB'D') suy ra mặt phẳng (P) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (AB'D').

M là điểm chung của (P) và (ABCD), có (P) //BD // B'D', suy ra giao tuyến qua M và song song với BD. Giao tuyến này cắt AD tại E.

E là điểm chung của (P) và (ADD'A'), có (P) // AD'.

⇒ Giao tuyến qua E và song song với AD'.

Giao tuyến này cắt DD' tại F.

M là điểm chung của (P) và (ABB'A'), có (P) // AB', suy ra giao tuyến qua M và song song với AB'. Giao tuyến này cắt BB' tại H .

Trong mặt phẳng (ABB'A'), gọi:

(1)



Trong mặt phẳng (ADD'A'), gọi:

(2)



Từ (1) và (2) suy ra .



Trong mặt (A'B'C'D') gọi .



Thiết diện cần tìm là lục giác MEFNPH .

**Câu 6:** Cho hình lăng trụ tam giác ACB.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của A'B'.

a) Tìm giao tuyến của hai mp(AB'C') và (ABC).

b) Chứng minh rằng CB' // (AHC')

LỜI GIẢI



a) Ta có A là điểm chung của (AB'C') và (ABC).

Mà



b) Ta có tứ giác AA'C'C là hình bình hành.

Suy ra A'C cắt AC' tại trung điểm I của mỗi đường.

Do đó IH // CB' (IH là đường trung bình của ΔCB'A').

Mặt khác IH ⊂ (AHC') nên CB' // (AHC').

**Câu 7:** Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’. Gọi H là trung điểm của

cạnh A’B’.

a) CMR đường thẳng CB’ song song với mp(AHC’).

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB’C’) và (A’BC). Chứng minh

rằng d song song với mp(BB’C’C).

c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ ABC.A’B’C’ khi cắt bởi mặt

phẳng.

**LỜI GIẢI**



a) Gọi I là tâm của hình bình hành AA'C'C.

Có HI là đường trung bình của tam giác A'B'C, nên .



Mặt khác HI nằm trong mặt phẳng (AHC').

Vậy CB' // mp(AHC')

b) Gọi J là tâm của hình bình hành AA'B'B.

Rõ ràng I, J là là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC).

Vậy giao tuyến d của chúng là đường thẳng IJ.

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác A'BC

d // BC, mà d // (BB'C'C).



c) Trong mp(ABB'A') gọi .



Có E là điểm chung của hai mặt phẳng (H,d) và (ABC), nên giao tuyến của chúng qua E và song song với BC // d, giao tuyến này cắt AC tại K.

KI là giao tuyến của (H,d) và (ACC'A'), KI cắt A'C' tại L.

Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành HEKL. Vì dễ dàng chứng minh E, K, L lần lượt trung điểm của AB, AC, A'C'.

**Câu 8:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi Q, R, lần lượt là tâm các mặt

(BCC'B'), (CDD'C').

a). Chứng minh RQ // (ABCD).

b). Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR).

c). Gọi M là giao điểm của CC' với (AQR). Tính tỉ số MC'/MC.

**LỜI GIẢI**



a) Chứng minh RQ // (ABCD).

Vì QR là đường trung bình của tam giác C'BD , nên QR // BD .

Do BD ⊂ (ABCD) nên RQ // (ABCD).

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR).

A là điểm chung của mặt phẳng (AQR) và mặt đáy (ABCD).

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD thì:

.



Giao tuyến d cắt đường thẳng BC tại điểm I.

I và Q là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AQR) và (BCC'B') nên:

, giao tuyến IQ cắt BB' tại J và cắt CC' tại M.



MR là giao tuyến của hai mp (AQR) và (CDD'C').

Gọi L là giao điểm của MR và DD' .

Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành AJML.

Vì: ;



.



c) Trong mặt phẳng đáy (ABCD) có AI // BD và AD // IB, nên tứ giác ADBI là hình bình hành.

BI là đường trung bình của tam giác ICM có: (1)



Dựng , trong có: (2)



QE là đường trung bình của (3)



Từ (1) , (2) và (3), ta có: .



**Câu 9:** Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', gọi I, J, K lần lượt là tâm của hình bình hành ACC'A', BCC'B', ABB'A' .

a) Chứng minh :IJ // (ABB'A'), JK // (ACC'A'), IK // (BCC'B'), mp (IJK) song song với mặt đáy của lăng trụ.

b) Ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng qui tại điểm O.

c) Gọi G, G' là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh G, O, G' thẳng hàng.



LỜI GIẢI

a) KI là đường trung bình của ΔA'BC ⇒ KI // BC.

Suy ra KI // (BCC'B').

IJ là đường trung bình của tam giác C'AB, suy ra IJ // AB. Suy ra IJ // (ABB'A').

KJ là đường trung bình của tam giác B'AC, suy ra KJ // AC. Suy ra KJ // (ACC'A').

Suy ra (IJK) // (ABC) vì (ABC) // (A'B'C') nên (IJK) // (A'B'C').

b) Chứng minh ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng qui tại điểm O .

Trong mặt phẳng (C'AB) có AJ và BI là hai đường trung tuyến.

Gọi .



Suy ra O là trọng tâm của tam giác (C'AB) có (1)



Trong mặt phẳng (A'BC) có BI và CK là hai đường trung tuyến.

Gọi .



Suy ra O' là trọng tâm của tam giác (A'BC) có (2)



Từ (1) và (2) suy ra O và O' trùng nhau.

Kết luận ba đường thẳng AJ , BI , CK đồng qui tại điểm O .

c) Chứng minh G , O , G' thẳng hàng.

Gọi E, E' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'.

Suy ra EE' là đường trung bình của hình bình hành BCC'B' nên

. Mà AEE'A' là hình bình hành.



Vì G, G' lần lượt là trọng tâm của hai ABC và A'B'C'.



Ta có: (3)



Trong AEI có: (4)



Ta có ba điểm E, J, E' thẳng hàng.

Từ (3) và (4) suy ra ba điểm G, O, G' thẳng hàng.

**Câu 10:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', gọi O' là tâm hình bình hành A'B'C'D', K là trung điểm của CD, E là trung điểm của BO'. Chứng minh E thuộc (ACB'). Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua K và song song với (EAC).



LỜI GIẢI

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD.

Ta có BOO'B' là hình bình hành, nên hai đường chéo BO' và B'O cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Suy ra E trung điểm của B'O. Mà B'O nằm trong mặt phẳng (ACB') suy ra E thuộc (ACB').

Ta có: mp (ACB') cũng là mp (ACE).

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ACB') nên mặt phẳng (P) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (ACB').

Trong mp(ABCD) có: K là điểm chung và AC // (P) nên giao tuyến của chúng qua K và song song với AC. Giao tuyến này cắt AB, AD, BC lần lượt tại F, M, N.

F là điểm chung của hai mặt phẳng (ABB'A') và mặt phẳng (P), có AB' // (P).

Nên giao tuyến của chúng qua F và song song với AB', giao tuyến này cắt AA', A'B' lần lượt tại P và Q.

Giao tuyến của (P) và mp(A'B'C'D') qua Q và song song với A'C', giao tuyến này cắt B'C' tại R.

Giao tuyến của (P) và mp(BCC'B') qua R và song song với B'C, giao tuyến này cắt CC' tại S.

Kết luận: thiết diện cần tìm là lục giác KMPQRS. Lục giác có tính chất các cặp cạnh đối song song.