

TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN
Năm học: 2017 – 2018

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP LỚP 9 HKII
MÔN TOÁN

DẠNG 1: Biến đổi các biểu thức chứa căn

Bài 1: Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{2(x - 2\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$$

(Kết quả rút gọn $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$)

- 1) Rút gọn A
- 2) Tìm x để $A < 0$
- 3) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên

Bài 2: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{4\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 2} \right)$$

(Kết quả rút gọn $P = \frac{\sqrt{x} - 3}{4}$)

- 1) Rút gọn P
- 2) Tìm các giá trị của x để $P > 0$
- 3) Tính giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{P}$

Bài 3: Cho biểu thức

$$C = \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{x^2}}{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$

(Kết quả rút gọn $C = \sqrt{x} - 1$)

- 1) Rút gọn C
- 2) Tính giá trị của biểu thức C khi $x = 8 - 2\sqrt{7}$
- 3) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C bằng -3
- 4) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C lớn hơn $-\frac{1}{3}$
- 5) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C nhỏ hơn $2\sqrt{x} + 3$

$$A = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

Bài 4: Cho biểu thức

- 1) Khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$, tính giá trị biểu thức A

$$B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$$

(Kết quả rút gọn $B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$)

- 2) Rút gọn biểu thức
- 3) Tìm x để biểu thức $M = B - A$ nhận giá trị nguyên.

Bài 5:

$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} \text{ với } x = 7 + 4\sqrt{3}$$

- 1) Tính giá trị của biểu thức

2) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-\sqrt{x}-2}$. Chứng minh rằng $B = \frac{3}{2-\sqrt{x}}$

3) Tìm x để $P = \frac{B}{A} < -1$

$A = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$

Bài 6: Cho hai biểu thức

1) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức A (Kết quả rút gọn $A = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$)
 2) Tìm các giá trị của x để B = 1

3) Tìm m để $\frac{B\sqrt{x}}{A} = m$ có nghiệm.

Bài 7: Cho biểu thức $B = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x > 0, x \neq 9$ (Kết quả rút gọn $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$)

1) Rút gọn B

2) Tính giá trị của B khi $x = \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{18+8\sqrt{2}}$

3) Chứng minh $B > \frac{1}{3}$

Bài 8: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$; $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ (Kết quả rút gọn $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$)

a) Tính giá trị B tại x = 36

b) Rút gọn A

c) Tìm số nguyên P để P = A.B là số nguyên.

Bài 9: Cho biểu thức $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$. Tìm x để B = 2

1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

2) Tính $P = \frac{B}{A}$

3) Tìm x thỏa mãn $P(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x} + 2\sqrt{x-1} = 2x - 2\sqrt{2}x + 4$

Bài 10: Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ và $Q = \frac{6}{x-3\sqrt{x}}$ (Kết quả rút gọn $P = \frac{6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$)

a) Tính giá trị Q tại $x = 121$

b) Rút gọn P

c) Tìm giá trị của x để $A = \frac{Q}{P} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2}$

d) So sánh A và A^2

DẠNG 2: Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Bài 1: Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc lên 10km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định và thời gian lần bánh trên đường biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

Bài 2: Quãng đường AB dài 220km. Hai ô tô khởi hành từ A và B đi ngược chiều nhau. Nếu cùng khởi hành thì sau 2 giờ chúng sẽ gặp nhau. Nếu xe đi từ A khởi hành trước xe kia 1 giờ 6 phút thì hai xe gặp nhau sau khi xe đi từ A đi được 2 giờ 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Bài 3: Một ca nô xuôi từ A đến B với vận tốc 30km/h, sau đó lại ngược từ B về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược 1h 20p. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5km/h và vận tốc riêng của ca nô khi xuôi và ngược là bằng nhau.

Bài 4: Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81km và ngược dòng 105km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, ca nô này chạy trong 4h, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài 5: Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2h với năng suất dự kiến người đó đã cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.

Bài 6: Một đội sản xuất làm 1000 sản phẩm trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động, mỗi ngày đội làm thêm được 10 sản phẩm so với kế hoạch. Vì vậy, chẳng những đã làm vượt mức kế hoạch 80 sản phẩm mà còn hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với quy định. Tính số sản phẩm đội sản xuất phải làm trong một ngày theo kế hoạch.

Bài 7: Để hoàn thành một công việc hai tổ phải làm chung trong 6h. Sau 2h làm chung thì tổ hai bị điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10h. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

Bài 8: Một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại để chở 120 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành đội được bổ sung thêm 5 xe nữa cùng loại. Nhờ vậy, so với ban đầu, mỗi xe phải chở ít hơn 2 tấn. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe. Biết khối lượng mỗi xe phải chở như nhau.

Bài 9: Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài hơn chiều rộng là 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Bài 10: Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 10. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

DẠNG 3: Hệ phương trình

Bài 1: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

- 1) Giải phương trình với $m = 1$
- 2) Tìm m để hệ vô nghiệm

Bài 2: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$$

- 1) Giải hệ phương trình $m = 1$
- 2) Tìm m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x - y = 2$
- 3) Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì điểm $M(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Bài 3: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m - 1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$$
. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất mà $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = 2 \\ -mx + y = m \end{cases}$$

- 1) Giải hệ khi $m = 2$
- 2) Tìm các số nguyên m để cho hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với $x > 0, y < 0$
- 3) Tìm các số nguyên m để cho hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên.

Bài 5: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -mx + y = m \end{cases}$$

- 1) CMR hệ có nghiệm duy nhất với mọi m
- 2) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất sao cho $x < 1, y < 1$

DẠNG 4: Quan hệ giữa (P) và (d)

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{3}{2}x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = \frac{1}{2}x - 2$ có đồ thị (d).

- 1) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ
- 2) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)
- 3) Không tính, hãy so sánh

a) $f(-2)$ và $f(-3)$ b) $f(1 - \sqrt{2})$ và $f(\sqrt{3} - 2)$

Bài 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P)

- 1) Tìm các điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt bằng -1 và 2 .
- 2) Viết phương trình đường thẳng AB
- 3) Viết phương trình đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 3: Cho parabol (P): $y = ax^2$

- 1) Tìm a biết (P) đi qua điểm A thuộc đường thẳng (d): $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ có hoành độ bằng 2 .
- 2) Tìm giao điểm B còn lại của (d) và (P)
- 3) Tính diện tích tam giác OAB

Bài 4: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = mx + 2m + 1$ có đồ thị (d)

- 1) Chứng minh (d) luôn đi qua một điểm M cố định
- 2) Tìm a để (P) đi qua điểm cố định đó
- 3) Viết phương trình đường thẳng qua M và tiếp xúc với parabol (P) tại M.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = 2x - \frac{3}{2}$

- 1) Vẽ (d) và (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy
- 2) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (d) và (P). Tính chu vi $\triangle AOB$
- 3) Tìm tọa độ giao điểm C thuộc Ox để chu vi $\triangle ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6: Cho parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$

- 1) Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc là k và đi qua M(1,5; -1)
- 2) Tìm k để đường thẳng (d) và parabol (P) tiếp xúc nhau

3) Tìm k để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Bài 7: Cho hàm số (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và (d): $y = \frac{1}{2}x + n$

- 1) Cho $n = 1$
 - a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ
 - b) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d)
 - c) Tính diện tích $\triangle AOB$
- 2) Tìm n để (P) tiếp xúc với (d)
- 3) Tìm n để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm
- 4) Tìm n để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm ở hai phía trục tung.

Bài 8: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + m + 1$

- 1) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B
- 2) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ của A và B. Tìm m để $|x_1 - x_2| = 2$
- 3) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm cùng bên trái của trục tung.

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol (P), đường thẳng $y = mx + 2$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 mà $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 10: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P), đường thẳng d: $y = -mx - m + 1$. Tìm m để d cắt parabol (P) tại A và phân biệt với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ mà $(y_1 + y_2)$ nhỏ nhất.

DẠNG 5: Phương trình bậc hai

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$, m là tham số

- 1) Giải phương trình trên khi $m = 1$
- 2) Xác định m để phương trình có một nghiệm là 2. Khi đó phương trình còn một nghiệm nữa, tìm nghiệm đó?
- 3) CMR phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m
- 4) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 1$
- 5) Định m để phương trình có nghiệm này bằng 3 nghiệm kia.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x - m = 0$, m là tham số

- 1) CMR phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

- 2) Với $m \neq 0$. Hãy lập phương trình ẩn y có hai nghiệm là $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$
- 3) Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 3$
- 4) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2(k+3)x + 2k - 1 = 0$, k là tham số

- 1) Giải phương trình khi $k = \frac{1}{2}$
- 2) Tìm k để phương trình có một nghiệm là 3, khi đó phương trình còn một nghiệm nữa, tìm nghiệm ấy.
- 3) CMR phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi k
- 4) CMR giữa tổng và tích các nghiệm có một sự liên hệ không phụ thuộc k ?
- 5) Tìm k để phương trình x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{3}{x_1 x_2} = 2$
- 6) Tìm k để tổng bình phương các nghiệm có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$, m là tham số

- 1) Giải phương trình khi $x = -5$
- 2) CMR phương trình luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi m
- 3) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu
- 4) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương
- 5) CMR biểu thức $A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc m
- 6) Tính giá trị của biểu thức $x_1 - x_2$

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - 3(m-1)x + m - 3 = 0$, m là tham số

- 1) CMR phương trình luôn có nghiệm với mọi m
- 2) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m
- 3) Xác định m để phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.

Bài 6: Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$, m là tham số

- 1) CM phương trình luôn có nghiệm với mọi m
- 2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $B = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) < 4$
- 3) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m .

Bài 7: Cho phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$ m là tham số

- 1) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_2 - x_1 = 17$
- 2) Tìm m để biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$ có giá trị nhỏ nhất
- 3) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào x.

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 1 = 0$, m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$.

Bài 9: Cho phương trình $x^4 - 2x^2 + m - 2 = 0$, m là tham số

- 1) Giải phương trình khi $m = -1$
- 2) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt

Bài 10: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)|x| + m^2 - 1 = 0$, m là tham số. Tìm m là phương trình có nghiệm duy nhất.

DẠNG 6: Hình học

Bài 1: Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MNP (MN < MP) đến (O) sao cho tia MP nằm giữa hai tia MA và MO. Gọi K là trung điểm của NP

- 1) Chứng minh rằng các điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn
- 2) Chứng minh tia KM là phân giác của $\angle AKB$
- 3) Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O). Chứng minh rằng $AQ \parallel NP$.
- 4) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh rằng $MA^2 = MH \cdot MO = MN \cdot MP$
- 5) Chứng minh rằng 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn
- 6) Gọi E là giao điểm của AB và KO. Chứng minh rằng $AB^2 = 4HE \cdot HF$ (F là giao điểm của AB và NP).
- 7) Chứng minh rằng KEMH là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ rằng OK.OE không đổi.
- 8) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$
- 9) Chứng minh $\angle NHA = \angle PHA$
- 10) Chứng minh rằng KE là phân giác góc ngoài của $\angle AKB$. Từ đó suy ra $AE \cdot BF = AF \cdot BE$
- 11) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của $\triangle NAP$ luôn chạy trên một đường tròn cố định.

12) Nếu $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA , OB và cung nhỏ AB .

Bài 2: Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng MA lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N . Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P . Chứng minh:

- 1) Tứ giác $OMNP$ nội tiếp
- 2) Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành
- 3) $CM.CN$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M
- 4) Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CND$ di chuyển trên một cung tròn cố định nào.

Bài 3: Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và đường thẳng (d) vuông góc với AC tại A . Vẽ đường tròn đường kính BC , trên đó lấy điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D ; tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N ; tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $ABMD$ nội tiếp được
- 2) Tứ giác $APND$ là hình gì? Tại sao?
- 3) Chứng minh rằng $CM.CD$ không phụ thuộc vị trí của M
- 4) Chứng minh trọng tâm G của $\triangle MAC$ chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

Bài 4: Cho đường tròn $(O; R)$ với dây BC cố định (BC không qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Điểm E thuộc cung lớn BC . Nối AE cắt BC tại D . Hạ $CH \perp AE$ tại H ; CH cắt BE tại M . Gọi I là trung điểm của BC

- 1) Chứng minh bốn điểm A, I, H, C thuộc một đường tròn
- 2) Chứng minh khi E chuyển động trên cung lớn BC thì tích $AD.AE$ không đổi
- 3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle BED$ tiếp xúc với AB
- 4) Tìm vị trí của E để diện tích $\triangle MAC$ lớn nhất

Bài 5: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và H (O và O' ở hai phía của AH). Vẽ các đường kính AOB và $AO'C$ của hai đường tròn. Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại M , cắt đường tròn (O') tại N .

- 1) Chứng minh ba điểm B, H, C thẳng hàng
- 2) Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì tỉ số $\frac{HM}{HN}$ không đổi
- 3) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN và BC . Chứng minh bốn điểm A, H, I, K thuộc một đường tròn
- 4) Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích $\triangle HMN$ lớn nhất.

Bài 6: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A ($R = 2R'$). Điểm B thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho $AB = R$. Điểm M thuộc cung lớn AB của đường tròn $(O; R)$ sao cho $MA \leq MB$.

Nối MA cắt đường tròn (O' ; R') tại N. Từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt đường tròn (O' ; R') tại E, cắt MB tại F.

- 1) Chứng minh ΔAOM đồng dạng với $\Delta AO'N$
- 2) Chứng minh rằng độ dài đoạn NF không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của đường tròn (O ; R).
- 3) Chứng minh ABFE là hình thang cân
- 4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác ABFN lớn nhất.

Bài 7: Cho đường tròn (O ; R), đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm của đoạn OB. Dây CD vuông góc với AB tại M. Điểm E chuyển động trên cung lớn CD (E khác A). Nối AE cắt CD tại K. Nối BE cắt CD tại H.

- 1) Chứng minh bốn điểm B, M, E, K thuộc một đường tròn
- 2) Chứng minh $AE \cdot AK$ không đổi
- 3) Tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BC
- 4) Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔBHK luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm E chuyển động trên cung lớn CD.

Bài 8: Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính AB. Điểm M thuộc nửa đường tròn. Gọi H là điểm chính giữa cung AM. Tia BH cắt AM tại I. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A cắt BH tại K. Nối AH cắt BM tại E.

- 1) Chứng minh ΔBAE là tam giác cân. Chứng minh $KH \cdot KB = KE^2$
- 2) Đường tròn tâm B, bán kính BA cắt AM tại N. Chứng minh tứ giác BIEN nội tiếp
- 3) Tìm vị trí của M để $\angle MKA = 90^\circ$

Bài 9: Cho đường tròn (O ; R) đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OB, H khác O và B. Dây CD vuông góc với AB tại H. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại A. Nối CO và DO cắt đường thẳng d tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt đường tròn (O) tại E và F. ($E \neq C, F \neq D$)

- 1) Chứng minh MNFE là tứ giác nội tiếp
- 2) Chứng minh $ME \cdot MC = NF \cdot ND$
- 3) Tìm vị trí của H để AE OF là hình thoi
- 4) Lấy K đối xứng với C qua A. Gọi G là trọng tâm ΔKAB . Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OB thì G thuộc một đường tròn cố định.

Bài 10: Cho ΔABC có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi E' là điểm đối xứng với H qua AC, F' là điểm đối xứng với H qua AB. Chứng minh

- 1) Tứ giác BCE'F' nội tiếp đường tròn (O)
- 2) Năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn

- 3) AO và EF vuông góc với nhau
 4) Khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ không đổi.

DẠNG 7: Một số bài nâng cao

Bài 1: Giải các phương trình sau

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau

Bài 3: Cho đường thẳng $y = (m - 1)x + 2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng đó lớn nhất.

Bài 4: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$. Gọi A và B là hai giao điểm của (d) và (P). Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) để diện tích $\triangle ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5: Cho 4 số a, b, c, d bất kỳ. Chứng minh rằng $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

Bài 6: Cho a, b, c > 0. Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

Bài 7: Cho c > 0 và a, b ≥ c. Chứng minh $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

Bài 8: Cho a, b ≥ 0 và $a^2 + b^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)}$

Bài 9: Cho a, b ≥ 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}}$

Bài 10: Giả sử n là một số tự nhiên khác không, chứng minh $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$